Prerequisiti:
- Saper operare con le quattro operazioni fondamentali e con l'elevamento a potenza nell'insieme dei numeri naturali, razionali e reali.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *scrivere un numero in notazione scientifica*
- *calcolare l'ordine di grandezza di un numero*
- *operare, a livello elementare, con valori approssimati*
- *determinare l'errore relativo di un valore approssimato*
- *spiegare come si perviene alla stima della misura di una grandezza e all'incertezza di tale stima*

Approssimazioni

Unità 4

4.1 ERRORI ASSOLUTO E RELATIVO

4.1.1 Riprendiamo il discorso sui valori approssimati dei numeri, cui abbiamo accennato nelle due precedenti unità, per un approfondimento, in particolare riguardo agli errori di approssimazione.

Nelle scienze sperimentali ma anche nella pratica quotidiana, in genere non si riesce a determinare il valore esatto della misura di una data grandezza, ma solo una sua approssimazione o, come anche si dice, una ***stima*** di quella misura.

Quando al posto del valore esatto V di un dato numero, esprimente eventualmente la misura di una grandezza, si assume una sua stima V_a, quest'ultimo numero si definisce ***valore approssimato*** di V. In particolare:

- se $V_a<V$, il numero V_a si chiama valore approssimato *per difetto* di V;
- se $V_a>V$, il numero V_a si chiama valore approssimato *per eccesso* di V.

Abbiamo già accennato ai valori approssimati per difetto e per eccesso di un numero reale, a meno di una unità, di 1/10, di 1/100, eccetera.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Tra i seguenti numeri:
   [A] 0,17 [B] 1,68 [C] 0,82 [D] 0,20
   indica quello che approssima meglio il quadrato di 0,41.
2. Tra i seguenti numeri:
   [A] 0,2 [B] 0,3 [C] 0,6 [D] 0,8
   indica quello che approssima meglio la radice quadrata di 0,4.
3. Tra i seguenti numeri:
   [A] 1,11 [B] 1,44 [C] 1,01 [D] 0,11
   indica quello che approssima meglio la radice quadrata di 1,25.
4. ® Stima, nel modo più rapido possibile e senza usare strumenti di calcolo automatico, quali delle seguenti espressioni hanno valori appartenenti all'intervallo [2, 3] e quali no.
   $$\text{[A]}\ \frac{327}{145}+\frac{408}{153},\quad \text{[B]}\ \frac{2377}{1400}+\frac{2945}{3291},\quad \text{[C]}\ \frac{2987}{2999}+\frac{1874}{2001},\quad \text{[D]}\ \frac{150}{277}+\frac{277}{150}.$$

4.1.2 È evidente che, quando al posto del valore esatto di un dato numero si assume una sua stima, si commette un errore più o meno grande.

Si usa distinguere fra *errore assoluto* ed *errore relativo*.

- L'***errore assoluto*** è dato dal valore assoluto della differenza tra il valore esatto e la stima.
  In altri termini, se V è il valore esatto e V_a la stima (cioè il valore approssimato), l'errore assoluto è il numero ε tale che:
  $$\varepsilon = |V - V_a|\,.$$
  Un altro modo di scrivere questa uguaglianza è il seguente:
  $$-\varepsilon < V - V_a < \varepsilon\,.$$
  O anche, sommando V_a a tutti e tre in membri della disuguaglianza:
  $$V_a - \varepsilon < V < V_a + \varepsilon\,.$$
  Questa relazione, a sua volta, per convenzione è scritta spesso, ma con lo stesso significato, nella seguente maniera:
  $$V = V_a \pm \varepsilon\,.$$

Insomma, le quattro formule precedenti sono modi diversi di esprimere la stessa cosa.
Cosicché, dire che il valore di una certa misura è V=15±0,2 significa [1] affermare che si ha:

$$14{,}98<V<15{,}2.$$

- L'***errore relativo*** è dato dal rapporto fra l'errore assoluto e il valore esatto.
  Ossia esso è il numero ε_r tale che:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{V}.$$

Esempio: se al posto del numero $74/3$ – che è uguale a $24,\overline{6}$ – si prende il valore approssimato $24{,}6$ si commette l'errore assoluto:

$$\varepsilon = \left|\frac{74}{3} - 24{,}6\right| = 24{,}\overline{6} - 24{,}6 \approx 0{,}066$$

e l'errore relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{0{,}066}{\frac{74}{3}} \approx 0{,}0026 = 0{,}26\%\,.$$

L'errore assoluto, quando si riferisce ad una specifica grandezza è accompagnato dalla "etichetta" che contraddistingue la grandezza (metro, metro quadrato, chilogrammo, secondo, eccetera).
L'errore relativo è invece quello che si chiama un ***numero puro***, vale a dire un numero "senza etichette".

4.1.3 Nella pratica è utile conoscere sia l'errore assoluto nella misurazione di una grandezza, sia l'errore relativo, ma spesso è più interessante il secondo. Spieghiamo la ragione di ciò attraverso un esempio.

Supponiamo che una certa città abbia 861.154 abitanti. Se, facendo cifra tonda, diciamo che quegli abitanti sono in numero di 900.000 commettiamo un errore assoluto, per eccesso, pari a 900.000–81.154= 38.846 (abitanti).
Supponiamo che un'altra città abbia 44.363 abitanti. Se diciamo che quegli abitanti sono in numero di 40.000, commettiamo un errore assoluto, per difetto, pari a 44.363–40.000 = 4.363 (abitanti).
A parte l'eccesso o il difetto, sembra che nel primo caso si commetta un errore molto più grande che nel secondo. Ed è così in termini assoluti, ma non lo è in termini relativi. L'errore di 38.846 si commette infatti rispetto a 861.154, mentre quello di 4.363 si commette rispetto a 44.363. Nel primo caso l'errore relativo è:

$$\varepsilon_r' = \frac{38.846}{861.154} \approx 0{,}045 = 4{,}5\%\,;$$

nel secondo caso è:

$$\varepsilon_r'' = \frac{4.363}{44.363} \approx 0{,}098 = 9{,}8\%\,;$$

vale a dire che nel secondo caso si commette un errore relativo che è più del doppio di quello che si commette nel primo caso.

Un esercizio per te. Calcola l'errore assoluto e l'errore relativo di ciascuno dei seguenti numeri quando si prende come stima il numero decimale approssimato per difetto a meno di 1/10:

[1] Avvertiamo fin d'ora che più avanti nel corso degli studi, la stessa scrittura sarà usata per indicare cose diverse e precisamente i due numeri 15+0,2=15,02 e 15–0,2=14,98. Si capirà comunque dal contesto a quale significato bisogna riferirsi.

$$\frac{1}{3}\ ;\quad \frac{25}{7}\ ;\quad \frac{137}{98}\ ;\quad \sqrt{12{,}29}\ ;\quad \sqrt{\frac{7}{3}}\,.$$

4.1.4 Gli errori di approssimazione hanno una notevole importanza quando si opera con strumenti di calcolo automatico. Anche adesso cerchiamo di spiegarci attraverso esempi.

Ammettiamo che una calcolatrice tronchi tutti i valori numerici immessi a partire dalla 6ª cifra, cioè immagazzini solo le prime 5 cifre.
Questo significa che se si immette il numero $8/9$ esso viene immagazzinato come $0{,}8888$ con un errore relativo pari a:

$$\frac{0{,}\bar{8}-0{,}8888}{0{,}\bar{8}} \approx 0{,}000099\,.$$

Se si immette, invece, il numero $257{,}4983$ esso viene immagazzinato come $257{,}49$ con un errore relativo pari a:

$$\frac{257{,}4983-257{,}49}{257{,}4983} \approx 0{,}00003\,.$$

E se si immette il numero $0{,}0037689$ esso viene immagazzinato come $0{,}0037$ con un errore relativo pari a:

$$\frac{0{,}0037689-0{,}0037}{0{,}0037689} \approx 0{,}018\,.$$

In realtà, le calcolatrici in commercio immagazzinano almeno 8 cifre, ma il discorso non cambia nella sostanza.

- Ad ogni modo, supponiamo ora di voler calcolare con la suddetta calcolatrice la differenza D tra i numeri A=4,56784 e B=3,48786. Il valore esatto di D è D=1,07998.

  Immettendo i dati nella calcolatrice, essa immagazzina: A'=4,5678 e B'=3,4878 con errori relativi rispettivamente pari a:

  $$\varepsilon_r^{'} = \frac{4{,}56784-4{,}5678}{4{,}56784} \approx 0{,}0000087 \quad \text{ed} \quad \varepsilon_r^{''} = \frac{3{,}48786-3{,}4578}{3{,}48786} \approx 0{,}000017\,.$$

  Calcoliamo la differenza con la calcolatrice. Otteniamo: D'=A'–B'=1,08, con un errore relativo pari a:

  $$\varepsilon_r = \frac{|D-D'|}{D} = \frac{|1{,}07998-1{,}08|}{1{,}07998} \approx 0{,}000018\,.$$

  Praticamente un errore uguale a quelli di partenza.

- Supponiamo però di voler calcolare la differenza D=A–B essendo A=34,5678 e B=34,5647. Il valore esatto di D è D=0,0031.

  Immettendo i dati nella calcolatrice, essa immagazzina: A'=34,567 e B'=34,564, con errori relativi rispettivamente uguali a:

  $$\varepsilon_r^{'} = \frac{34{,}5678-34{,}567}{34{,}5678} \approx 0{,}00002 \quad \text{ed} \quad \varepsilon_r^{''} = \frac{34{,}5647-34{,}564}{34{,}5647} \approx 0{,}00002\,.$$

  Per cui: D'=A'–B'=0,003, con un errore relativo pari a:

  $$\varepsilon_r = \frac{|D-D'|}{D} = \frac{|0{,}0031-0{,}003|}{0{,}0031} \approx 0{,}032\,;$$

  vale a dire un errore enormemente più grande degli errori di partenza.

Quando gli errori di immagazzinamento dei dati si ripercuotono in maniera rilevante sui risultati si parla di **propagazione degli errori**.

Un esercizio per te. Ammettendo che una calcolatrice tronchi i valori immessi a partire dalla 5ª cifra, calcolare l'errore relativo che si commette se con essa si calcola A+B, A–B, AB, A:B, sapendo che:

1) $A = 89{,}578;\ B = 89{,}568$. 2) $A = 47{,}785;\ B = 53{,}426$. 3) $A = 23{,}456;\ B = 18{,}678$.

4.1.5 È utile conoscere l'errore che si propaga quando si opera con le quattro operazioni fondamentali su numeri (eventualmente misure di grandezze) affetti da errore. L'argomento (come anche quello sviluppato nel prossimo paragrafo n. 4.2) è di solito affrontato nello studio delle scienze sperimentali, ma vogliamo farvi ugualmente un cenno.

- Ci occupiamo dapprima della **somma** e **differenza** di due numeri (misure) affetti da errore.

  Siano allora B e b le misure delle basi di un trapezio tali che:
  $$B = (58{,}5 \pm 0{,}6)\ \text{cm} \quad \text{e} \quad b = (35{,}5 \pm 0{,}3)\ \text{cm}\,.$$
  Risulta evidentemente (sottintendiamo provvisoriamente l'unità di misura):
  $$58{,}5-0{,}6 < B < 58{,}5+0{,}6 \quad \text{e} \quad 35{,}5-0{,}3 < b < 35{,}5+0{,}3$$
  e pertanto:
  $$(58{,}5-0{,}6) + (35{,}5-0{,}3) < B+b < (58{,}5+0{,}6) + (35{,}5+0{,}3),$$
  ossia:
  $$(58{,}5+35{,}5) - (0{,}6+0{,}3) < B+b < (58{,}5+35{,}5) + (0{,}6 + 0{,}3),$$
  quindi:
  $$94{,}0-0{,}9 < B+b < 94{,}0+0{,}9;$$
  infine:
  $$B+b = (94{,}0\pm0{,}9)\ \text{cm};$$
  con un errore assoluto di 0,9 cm ed un errore relativo $\varepsilon_r=\frac{0{,}9}{94{,}0}\approx0{,}96\%$.

  Il procedimento e le conclusioni si ripetono con altri esempi e anche in generale. Ed analogo discorso vale nel caso in cui si debba calcolare la differenza delle due misure.

  In conclusione:

  Se x' ed x'' sono due numeri approssimati (misure) affetti dagli errori assoluti ε' ed ε'', la loro somma x'+x'' e la loro differenza x'−x'' sono affette dall'errore assoluto ε'+ε''.

- Le cose si complicano un po' nel caso della **moltiplicazione** e della **divisione**.

  Siano allora, questa volta, le stesse B e b considerate sopra rispettivamente la base B e l'altezza h di un rettangolo: vogliamo calcolare la sua area. Risulta:
  $$(58{,}5-0{,}6)\ (35{,}5-0{,}3) < B\,h < (58{,}5+0{,}6)\ (35{,}5+0{,}3),$$
  ossia:
  $$58{,}5\cdot35{,}5-(58{,}5\cdot0{,}3+35{,}5\cdot0{,}6)+ 0{,}6\cdot0{,}3 < B\,h < 58{,}5\cdot35{,}5+(58{,}5\cdot0{,}3+35{,}5\cdot0{,}6)+0{,}6\cdot0{,}3;$$
  o anche:
  $$2076{,}75-38{,}85+0{,}18 < B\,h < 2076{,}75+38{,}85+0{,}18.$$
  Se si trascura la quantità 0,18 rispetto a tutto il resto, possiamo scrivere:
  $$2076{,}75-38{,}85 < B\,h < 2076{,}75+38{,}85$$
  e perciò:
  $$B\,h = (2076{,}75\pm38{,}85)\ \text{cm}^2.$$
  Per cui il prodotto è affetto da un errore assoluto pari a 38,85 cm^2 e da un errore relativo $\varepsilon_r=\frac{38{,}85}{2076{,}75}\approx1{,}9\%$.

Anche in altri casi analoghi potremmo procedere alla stessa maniera. Ma il procedimento seguito ci consente alcune considerazioni utili ad un risultato più comodo.

Dunque l'errore assoluto ε è 38,85, vale a dire, tenendo presente i calcoli precedenti:

$$\varepsilon = 58{,}5 \cdot 0{,}3 + 35{,}5 \cdot 0{,}6;$$

da qui, dividendo entrambi i membri per 58,5·35,5 segue:

$$\frac{\varepsilon}{58{,}5 \cdot 35{,}5} = \frac{0{,}3}{35{,}5} + \frac{0{,}6}{58{,}5}\ ;$$

ma $\frac{\varepsilon}{58{,}5 \cdot 35{,}5}$ è l'errore relativo ε_r da cui è affetto il prodotto Bh, mentre $\frac{0{,}3}{35{,}5}$ e $\frac{0{,}6}{58{,}5}$ sono gli errori relativi da cui sono affetti i due fattori. Ne discende che:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + \varepsilon_r''\ .$$

Il procedimento vale in generale e, pur con qualche piccola differenza, anche nel caso in cui si dividono due numeri approssimati.

In conclusione:

> Se x' ed x" sono due numeri approssimati (misure) affetti dagli errori relativi ε_r' ed ε_r'', il loro prodotto x'x" e il loro quoziente x'/x" sono affetti dall'errore relativo $\varepsilon_r' + \varepsilon_r''$.

Quindi, nel caso del prodotto e del quoziente di due numeri approssimati, dapprima è conveniente calcolare l'errore relativo e da questo risalire all'errore assoluto, in base alla formula: $\varepsilon_r = \varepsilon / V$.

Sei invitato a risolvere i seguenti esercizi:

- Si prendano, dei numeri $a=\sqrt{8{,}54}$ e $b=235/43$, i valori approssimati rispettivamente 2,92 e 5,47 e si trovino gli errori assoluti e relativi dei numeri $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b.
- Le misure delle basi B, b e dell'altezza h di un trapezio sono tali che:

  $$B = (2{,}45 \pm 0{,}03)\ \text{m}\ ,\quad b = (1{,}96 \pm 0{,}03)\ \text{m}\ ,\quad h = (2{,}20 \pm 0{,}02)\ .$$

  Ricordando la formula dell'area A di un trapezio, $A=\frac{(B+b)h}{2}$, calcolare un valore approssimato di quest'area e gli errori assoluto e relativo da cui è affetta la misura trovata.
- Le misure degli spigoli a, b, c, di una stanza a forma di parallelepipedo sono tali che:

  $$a = (4{,}20 \pm 0{,}05)\ \text{m}\ ,\quad b = (5{,}00 \pm 0{,}05)\ \text{m}\ ,\quad c = (2{,}85 \pm 0{,}04)\ \text{m}\ .$$

  Ricordando la formula del volume V di un parallelepipedo, V=abc, calcolare un valore approssimato del volume della stanza e gli errori assoluto e relativo da cui è affetta la misura trovata.

4.2 CIFRE SIGNIFICATIVE

4.2.1 La notazione convenzionale L=58,56±0,08 (m) – usata per indicare che della lunghezza L è data la stima 58,56 m, affetta da un errore di 0,08 m – è poco pratica e per questo è spesso adottata un'altra convenzione. Si scrive, infatti:

$$L \approx 58{,}56\ \text{m}$$

ma con un significato un po' diverso dal precedente. C'è infatti, adesso, la tacita intesa che le prime tre cifre del numero 58,56 sono "sicure" mentre sulla quarta grava un'incertezza di ±1. Il che è come dire che l'ultima cifra del numero può essere 6, ma anche 6–1=5 o 6+1=7. In altri termini, usando la notazione precedente è come se si scrivesse:

$$L = (58{,}56 \pm 0{,}01)\ \text{m}\quad \text{ovvero:}\quad 58{,}55\ \text{m} < L < 58{,}57\ \text{m}.$$

Ragion per cui si commette un errore relativo pari a:

$$\frac{0{,}01}{58{,}56} \approx 0{,}00017 = 0{,}017\%\,.$$

Se, invece, per la lunghezza L si assume la stima 12 cm, per cui:

$$\mathrm{L} = (12 \pm 1)\ \text{cm, ossia: } 11\ \text{cm} < \mathrm{L} < 13\ \text{cm},$$

si commette l'errore relativo:

$$\frac{1}{12} \approx 0{,}083 = 8{,}3\%\,.$$

- Quando si adotta la convenzione suddetta si dice che **il numero 58,56 ha 4 cifre significative**. E, ugualmente, che **il numero 12 ha 2 cifre significative**.

Il numero delle cifre significative di una misura dipende ovviamente dalla sensibilità dello strumento di misura e tali cifre sono quelle che, di fatto, lo strumento è in grado di registrare.
Si parla di cifre significative anche quando si ha a che fare con numeri positivi, che non sono necessariamente misure di grandezze. Ad esempio, considerato il numero $\sqrt{2}$, una sua approssimazione con 3 cifre significative è 1,41.

4.2.2 Alla base del conteggio delle cifre significative di un numero (eventualmente di una misura), scritto nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, ci sono le seguenti regole:

1) Tutte le cifre diverse da zero sono cifre significative.
2) Tutte le cifre, zeri compresi, situate fra due cifre diverse da zero, sono cifre significative.
3) In un numero minore di 1, gli zeri situati dopo la virgola e prima della prima cifra diversa da zero NON sono cifre significative.
4) Gli zeri che compaiono alla fine di un numero sono considerate cifre significative solo se il numero è un numero decimale.

Esempi:

- il numero 20,03 ha 4 cifre significative: tutte le cifre sono significative;
- il numero 0,103 ha 3 cifre significative: lo zero della parte intera non è una cifra significativa;
- il numero 0,00205 ha 3 cifre significative: sono le ultime tre cifre, mentre i primi tre zeri non sono cifre significative;
- il numero 2500 ha 2 cifre significative: i due zeri, con cui termina il numero, non sono cifre significative;
- il numero 25,00 ha 4 cifre significative: tutte le cifre sono significative.

ESERCIZIO. Indica il numero di cifre significative di ciascuno dei seguenti numeri:

9,8;   9,80;   0,98;   0,098;   980;   98,0.

4.2.3 Una breve considerazione aggiuntiva. Quando si sommano o si sottraggono due misure approssimate, almeno una delle quali è un numero decimale, il numero di cifre decimali del risultato deve essere uguale a quello del termine che ha il minor numero di cifre decimali.
Per esempio:

- il valore corretto della somma 17,8+15,36 è 33,1 e non 33,16;
- il valore corretto della differenza 45,62−24,0 è 21,6 e non 21,62 o 21;
- invece il valore corretto della somma 17,80+15,36 è 33,16.

4.3 VALORE ARROTONDATO E ORDINE DI GRANDEZZA

4.3.1 Particolari valori approssimati di un numero (eventualmente una misura) sono i cosiddetti "valori

arrotondati” e “ordini di grandezza”.
Per comprendere di cosa si tratti partiamo da un esempio. Si sa che in apogeo (è il punto più lontano dalla Terra) la distanza Terra-Luna è di circa 405.696 km, mentre in perigeo (punto più vicino alla Terra) la distanza Terra-Luna è di circa 363.104 km.
Se diciamo che quella distanza è, nel primo caso di circa 405.000 km e nel secondo di circa 363.000 km, abbiamo usato degli *arrotondamenti* (ciascuno con tre cifre significative).

In parole povere, il **valore arrotondato** (o **arrotondamento**) di un numero è quel numero, con un numero prestabilito di cifre significative, che meglio approssima il numero dato.

Per esempio, 363.000 è il valore approssimato, con tre cifre significative, che meglio approssima 363.104; invece 360.000 è il valore approssimato, con due cifre significative, che meglio approssima 363.104.
Per ottenere il valore arrotondato di un numero, per esempio con tre cifre significative, si scrivono senza modifiche le prime due cifre significative, mentre la terza si scrive essa pure senza modifiche, se la quarta cifra è compresa fra 0 e 4 inclusi, altrimenti si aumenta di una unità.
Abbiamo visto sopra un esempio di arrotondamento. Un altro è costituito dal numero 2600, che è il valore arrotondato con due cifre significative, del numero 2572. Il valore arrotondato, con una cifra significativa, di questo stesso numero è invece 3000.

La potenza di 10 che meglio approssima il numero si chiama **ordine di grandezza** del numero.

Allora, per stabilire l’ordine di grandezza di un numero, ecco come si può procedere:
- Anzitutto si scrive il valore arrotondato del numero, con una sola cifra significativa.
- Quindi si scrive tale arrotondamento moltiplicando l’unica cifra significativa per un’idonea potenza di 10.
- Se, nel numero così ottenuto, la cifra per la quale la potenza di 10 è moltiplicata non è maggiore di 5, tale potenza è l’ordine di grandezza, altrimenti quest’ordine è la potenza successiva di 10.

Per esempio, ritornando alla distanza Terra-Luna in apogeo, si ha anzitutto:

$$405.696\ \text{km} \approx 400.000\ \text{km} \approx 4\times10^5\ \text{km};$$

dunque 10^5 km è il suo *ordine di grandezza*.
Un altro esempio. Posto che $N=56.685.468$ sia il numero esatto degli abitanti di una data nazione, osservato che:

$$56.685.468 \approx 60.000.000 = 6\times10^7,$$

concludiamo che 10^8 è il suo *ordine di grandezza*.
Ancora:
- posto $a = 0{,}02743$ e osservato che $a\approx0{,}03=3\times10^{-2}$, diciamo che 10^{-2} è il suo *ordine di grandezza*;
- considerata la massa M della Terra, sappiamo che $M\approx5{,}97\times10^{24}$ kg. Poiché $M\approx6\times10^{24}$ kg, diciamo che 10^{25} kg è il suo *ordine di grandezza*.

In particolare consideriamo i numeri 549 e 550. Siccome $549 \approx 500 = 5\times10^2$, il suo ordine di grandezza è 10^2; invece, poiché $550\approx600=6\times10^2$, il suo ordine di grandezza è 10^3.

Adesso un esercizio per te. Scrivi i valori arrotondati (con una, due o tre cifre significative) e l’ordine di grandezza di ciascuno dei seguenti numeri:

15.489; 2,476; 0,06754; 7.456.000.000 ; 478,54.

4.3.2 Spesso, ma soprattutto quando un numero presenta lunghe file di zeri che ne rendono difficoltosa la

lettura, si preferisce scriverlo usando la cosiddetta **notazione esponenziale**: il numero è espresso come prodotto di un idoneo coefficiente per una opportuna potenza di 10.
Se, poi, il coefficiente è un numero compreso fra 1 incluso e 10 escluso (come dire che esso è un numero decimale con **una sola cifra non nulla nella parte intera**), si parla di **notazione scientifica** del numero: è usata prevalentemente nelle scienze sperimentali.
Esempi:

- un anno-luce, vale a dire la distanza percorsa dalla luce in un anno, che è di circa

  $$9.460.800.000.000.000 \text{ m},$$

  è scritta, in notazione esponenziale in uno dei seguenti modi:

  $$1 \text{ anno-luce} \approx 9{,}46\times10^{15} \text{ m}\ ; \quad 1 \text{ anno-luce} \approx 94{,}60\times10^{14} \text{ m}\ ; \ 1 \text{ anno-luce} \approx 9.460\times10^{12} \text{ m}\ ;$$

  in notazione scientifica, in uno dei seguenti modi:

  $$1 \text{ anno-luce} \approx 9{,}46\times10^{15} \text{ m}; \quad 1 \text{ anno-luce} \approx 9{,}5\times10^{15} \text{ m}.$$

- la massa m di un protone, che è di circa

  $$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 67 \text{ kg},$$

  è scritta, in notazione esponenziale, in uno dei seguenti modi:

  $$m \approx 1{,}67\times10^{-27} \text{ kg}; \quad m \approx 16{,}7\times10^{-28} \text{ kg};$$

  in notazione scientifica, in uno dei seguenti modi:

  $$m \approx 1{,}7\times10^{-27} \text{ kg}; \quad m \approx 1{,}67\times10^{-27} \text{ kg}.$$

Ti proponiamo, per esercizio, di scrivere in notazione scientifica ed esponenziale i seguenti numeri:

$5.497.000.000.000$; $30.000.030.000$; $389{,}452\ 000$;
$0{,}028\ 700$; $0{,}000\ 563$; $5{,}65$.

NOTA 1. Nei calcolatori, dove occorre servirsi di una notazione "lineare", si scrive, al posto della potenza 10^n, ma con lo stesso significato, il simbolo **En**. Quindi, per esempio, E3 invece di 10^3, E–6 invece di 10^{-6}.
Alcuni esempi:

- con riferimento al numero 47.689,65 la scrittura $4{,}77\times10^5$, che è una sua notazione scientifica, può essere immessa in un calcolatore nella forma equivalente 4,77E5;
- con riferimento al numero 0,00364 la scrittura $3{,}6\times10^{-3}$, che è una sua notazione scientifica, può essere immessa in un calcolatore nella forma equivalente 3,6E–3.

NOTA 2. In realtà anche i numeri che, nella parte intera o in quella decimale, presentano molte cifre si possono leggere. Per questo il cosiddetto Sistema Internazionale delle unità di misura (**SI**) prevede dei nomi particolari, anche abbastanza strani se si vuole, per alcune potenze di 10. Elenchiamo qui di seguito tali nomi (Tab. 1) indicando anche, per ognuno di essi, il prefisso che viene usato solitamente ed il relativo simbolo.

Tab. 1 – prefissi delle potenze di 10 definiti dal SI

valore	nome	prefisso	simbolo	esempio
10^3	mille	chilo	k	50 chilogrammi = 50 kg
10^6	milione	mega	M	64 megabyte = 64 MB
10^9	miliardo	giga	G	2 gigabyte = 2 GB
10^{12}	bilione	tera	T	superficie della Terra ≈ $510\cdot10^2$ m^2 = 510 Tm^2
10^{15}	biliardo	peta	P	1 anno-luce ≈ $9{,}46\cdot10^{15}$ m = 9,46 Pm

10^{18}	trilione	exa	E	1 miliardo di miliardi = 1 trilione [2]
10^{21}	triliardo	zetta	Z	volume della Terra ≈ $1{,}08 \cdot 10^{21}$ m^3 = 1,08 Zm^3
10^{24}	quadrilione	yotta	Y	massa della Terra ≈ $5{,}97 \cdot 10^{27}$ kg = $5{,}97 \cdot 10^3$ Yg
10^{-3}	millesimo	milli	m	1 milligrammo = 1 millesimo di grammo = 1 mg
10^{-6}	milionesimo	micro	µ	1 micrometro = 1 milionesimo di metro = 1 µm
10^{-9}	miliardesimo	nano	n	1 nanosecondo =1 miliardesimo di secondo = 1 ns
10^{-12}	bilionesimo	pico	p	1 picometro = 1 bilionesimo di metro = 1 pm
10^{-15}	biliardesimo	femto	f	1 femtometro = 1 biliardesimo di metro = 1 fm
10^{-18}	trilionesimo	atto	a	carica dell'elettrone ≈ $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C = 0,16 aC
10^{-21}	triliardesimo	zepto	z	1 miliardesimo di miliardesimo= 1 trilionesimo [3]
10^{-24}	quadrilionesimo	yocto	y	massa del protone = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg = 1,67 yg

4.3.3 Vediamo adesso mediante un esempio come, attraverso arrotondamenti successivi, in cui è utilizzata anche la notazione scientifica dei numeri, si possa pervenire rapidamente alla stima dell'ordine di grandezza di una data espressione numerica, il cui valore esatto richiederebbe calcoli piuttosto laboriosi, se fatti "a mano".
Dalla Fisica si sa che la massa M della Terra è data dalla seguente espressione:

$$M \approx \frac{9{,}805 \cdot 6371^2 \cdot 10^6}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}\ \text{kg},$$

il cui valore arrotondato, con 3 cifre significative, scritto in notazione scientifica è $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg. Per cui, il suo ordine di grandezza è 10^{25} kg.
Noi vogliamo pervenire ad una stima dell'ordine di grandezza di M senza calcolarne il valore "esatto" M, ma con arrotondamenti successivi. Allora, in seguito ad alcuni primi arrotondamenti si ha:

$$M \approx \frac{10 \cdot (6 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{-11}}\ \text{kg} \approx \frac{36 \cdot 10^{13}}{7 \cdot 10^{-11}}\ \text{kg};$$

arrotondando di nuovo:

$$M \approx \frac{(4 \cdot 10) \cdot 10^{13}}{7 \cdot 10^{-11}}\ \text{kg} \approx 1 \cdot 10^{25}\ \text{kg}.$$

Si trova così per M l'ordine di grandezza 10^{25} kg.

ESERCIZIO. Stima nel modo più rapido possibile, ma senza usare strumenti di calcolo automatico, l'ordine di grandezza delle seguenti espressioni numeriche:

$$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}54 \cdot 10^6}{8{,}52 \cdot 10^3}; \qquad \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2}.$$

Confronta i tuoi risultati con quelli ottenuti risolvendo l'esercizio n. 10 della sezione "verifiche".

4.4 MISURA DI UNA GRANDEZZA

4.4.1 Per ragioni che non sto a spiegare, devo conoscere le misure delle dimensioni del mio tavolo da lavoro e dispongo di un'asta, lunga 1 m e graduata in centimetri. Eseguo una misurazione della dimensione più lunga e trovo che misura 180 cm; eseguo quindi una misurazione della dimensione più corta e trovo 105 cm. Concludo che le dimensioni del mio tavolo misurano per l'appunto 180 cm e 105 cm. Ora, se questo può bastare per una valutazione grossolana delle misure in questione, non è certamente corretto sotto il profilo scientifico.

---

[2] Attenzione! In alcuni Paesi (per esempio nei Paesi anglosassoni) 1 trilione equivale a mille miliardi.
[3] Come sopra. In alcuni Paesi 1 triliardesimo equivale ad 1 millesimo di miliardesimo.

In effetti, come abbiamo già precisato all'inizio di questa unità, **non esiste il valore esatto della misura di una grandezza**, nel senso che non è possibile conoscerlo e determinarlo. Quello che si può conoscere e calcolare è una stima di quella misura, affetta però da un inevitabile errore.
Per esempio, quando diciamo che la lunghezza L di un certo percorso, espressa in metri, è:

$$\mathrm{L} = 105{,}7 \pm 0{,}2 \quad \text{ovvero:} \quad 105{,}5 < \mathrm{L} < 105{,}9$$

affermiamo che sì, è vero, non conosciamo la lunghezza esatta del percorso e non possiamo perciò affermare che essa è $105{,}7\,\mathrm{m}$ (anche se questo può bastare per una valutazione grossolana). Quello che possiamo affermare, con un certo grado di fiducia, è che quella lunghezza è compresa fra $105{,}5\,\mathrm{m}$ e $105{,}9\,\mathrm{m}$, con un errore (assoluto) di $0{,}2\,\mathrm{m}$ ossia di $20\,\mathrm{cm}$.
Questo errore si chiama ***incertezza*** della misura. Più esattamente *incertezza assoluta*, per distinguerla dall'*incertezza relativa* che è il rapporto $0{,}2/105{,}7 \approx 0{,}0019 = 0{,}19\%$, vale a dire l'errore relativo.
Sorgono allora alcune domande legittime: a) Come si fa a calcolare una stima della misura di una grandezza? b) Come si determina l'incertezza della misura? c) E cosa significa che l'incertezza è determinata con un "certo grado di fiducia"?
Per rispondere dovremmo aver conoscenza di concetti che saranno sviluppati in unità successive [4] ma fin d'ora possiamo anticipare qualche conclusione, che a suo tempo sarà approfondita e magari si potrà ritornare su queste righe.

4.4.2 Si voglia allora "stimare" la misura H di una determinata grandezza e calcolarne l'incertezza ε.
Si trovano, con apposito strumento di misura, alcune misure della grandezza in esame (diciamo 30 misure) e queste, che solitamente non sono uguali fra loro per inevitabili errori nella misurazione, siano le seguenti:

$$\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \ldots, \mathrm{H}_{29}, \mathrm{H}_{30}\,.$$

Si calcola la loro somma e la si divide per 30. Si trova così quella che si denomina *media aritmetica* delle 30 misure: la indichiamo con la lettera greca μ. Pertanto:

$$\mu = \frac{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3 + \cdots + \mathrm{H}_{29} + \mathrm{H}_{30}}{30}\,.$$

Questo valore trovato μ è il valore *più attendibile* della misura di H e, per questo, si assume come "stima" di H, ma non è la misura "vera" di H, che rimane sempre sconosciuta.
Si calcolano quindi le seguenti 30 quantità non negative:

$$(\mathrm{H}_1 - \mu)^2, (\mathrm{H}_2 - \mu)^2, (\mathrm{H}_3 - \mu)^2, \ldots, (\mathrm{H}_{29} - \mu)^2, (\mathrm{H}_{30} - \mu)^2.$$

Essi sono i quadrati degli scarti delle misure trovate dalla loro media aritmetica. A seguire, si divide la loro somma per 30 e si estrae la radice quadrata della somma ottenuta: indichiamo questa radice con la lettera greca σ: si denomina *deviazione standard*.
La teoria mostra che la precisione ε della misura è uguale a kσ, dove k è un parametro che può assumere valori diversi, dipendenti dalla probabilità (il grado di fiducia) di ottenere quella precisione.
In particolare, la teoria mostra che per k=3 (e quindi $\varepsilon = 3\sigma$), la probabilità di ottenere una misura che non sia compresa fra $\mathrm{H}-3\sigma$ e $\mathrm{H}+3\sigma$ è praticamente nulla. Essa è infatti dello $0{,}27\%$, vale a dire che in meno di 3 misurazioni su 1.000 si commette un errore più grande di 3σ.
Ritornando all'uguaglianza $\varepsilon = \mathrm{k}\sigma$, si desume agevolmente che, per un determinato valore di k, più pic-

[4] Cfr.: Unità 12: Statistica descrittiva, per le prime nozioni.

colo è σ più piccolo è il valore di ε. Ora, siccome σ descrive il modo con cui le varie misure ottenute si disperdono intorno alla media μ, possiamo concludere che più piccolo è σ più precisa è la misura in esame. Al riguardo, può essere utile dare un'idea di diversi livelli di precisioni mediante idonei grafici, in cui sono schematizzati i valori di μ e quelli delle varie misure ottenute (Fig. 1).

FIG. 1

Ti proponiamo, per esercizio, di applicare il procedimento appena descritto al calcolo della stima della lunghezza di un'asta e della sua incertezza, quando k=3, supponendo che della lunghezza dell'asta siano stati ottenuti i valori elencati nella tabella sottostante (Tab. 2). Ti suggeriamo il ricorso ad un foglio elettronico.

Tab. 2 – valori della lunghezza dell'asta espressi in centimetri

115,7	115,9	115,5	116,1	116,0	116,2	115,6	115,8	116,3	115,5
116,1	116,2	115,9	116,2	116,3	115,8	115,7	116,0	115,9	115,6
116,3	115,2	115,6	115,3	115,9	116,0	116,3	116,2	116,5	115,7

Segnaliamo che le misure elencate nella tabella sono state ottenute con uno strumento di misura (per esempio, un metro) che ha a sua volta un grado di precisione. Questo, nel caso specifico, è il millimetro.

In generale, la ***precisione di uno strumento*** è quel valore al di sotto del quale lo strumento non è in grado di apprezzare variazioni.

Per questa ragione, ritornando sull'esercizio proposto, **non ha alcun senso** dire che, della lunghezza, si è trovato, per esempio, un valore di 115,78 cm. E questo, tanto che si tratti di una singola misura quanto che si tratti della media aritmetica delle misure. Proprio perché lo strumento non consente di apprezzare variazioni al di sotto del millimetro. Quello che si può dire, al più, è che si è ottenuta una misura compresa fra 115,7 cm e 115,8 cm.

VERIFICHE

1. L'ordine di grandezza del numero 0,00782 è 10^{-2}. È vero o è falso?
2. L'errore relativo che si commette quando del numero 89.784.539 si prende come valore approssimato il suo valore arrotondato con una cifra significativa è 2,4% . È vero o è falso?
3. Dire quante sono le cifre significative di ciascuno dei seguenti numeri:

   100,0; 0,01; 10 000; 10 001.
4. Del numero a si prende un valore approssimato affetto da un errore relativo del 2%. Da quale errore relativo è affetto il valore di a^2?
5. Due lati del tuo tavolo da lavoro hanno le seguenti misure: (1,50±0,03) m e (0,90±0,02) m. Calcola l'errore assoluto e quello relativo dai quali sono affetti il perimetro e l'area del tavolo.
6. Assumendo per la lunghezza L la stima di 27,43 cm, di quali cifre siamo certi? Quale errore relativo si commette? E se la misura fosse 5 cm oppure 5,0 cm o ancora 0,5 cm?

7. Scrivi i valori approssimati dei seguenti numeri, con il numero di cifre significative indicato a fianco di ciascuno di essi:

a) 0,1001 (3 cifre significative); b) 10,0203 (4 cifre significative);
c) 0,0012 (2 cifre significative); d) 234,432 (3 cifre significative).

8. Durante una gara di "100 metri piani", quattro cronometristi, i quali disponevano di cronometri in grado di segnare i tempi fino ai centesimi di secondo, hanno scritto i seguenti risultati, riferiti a quattro diversi atleti:

10,25 s; 12,98 s; 9,980 s; 15,795 s.

In realtà, due di queste misure sono certamente inattendibili. Quali sono? Perché sono inattendibili?

9. Scrivi in notazione scientifica, con il numero di cifre significative indicate a fianco, le seguenti grandezze:

- Numero di Avogadro [(5)]: 602.200.000.000.000.000.000.000 (3 cifre significative).
- Semiasse maggiore dell'orbita terrestre: 149.597.887,5 km (4 cifre significative).
- Velocità media di rotazione della Terra intorno al Sole: 29.783 m/s (2 cifre significative).
- Tempo di rotazione della Terra intorno al proprio asse: 86.162,4 s (2 cifre significative).
- Massa dell'elettrone: $9,109\,382\,616 \cdot 10^{-31}$ kg (3 cifre significative).

10. Trova, usando un idoneo strumento di calcolo automatico, l'ordine di grandezza di ciascuna delle seguenti espressioni:

$$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}54 \cdot 10^6}{8{,}52 \cdot 10^3}\ ; \qquad \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2}\ .$$

11. La massa del Sole supera di circa $1{,}9 \cdot 10^{30}$ kg quella della Terra, mentre la massa della Terra supera di circa $5{,}9 \cdot 10^{24}$ kg quella della Luna. Di quanto, all'incirca, la massa del Sole supera quella della Luna?

[A] $1{,}9 \cdot 10^{30}$kg [B] $7{,}8 \cdot 10^{30}$kg [C] $7{,}8 \cdot 10^{54}$kg [D] $4{,}0 \cdot 10^{54}$kg.

12. La Terra dista mediamente circa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m dal Sole, mentre dista mediamente circa $3{,}8 \cdot 10^{8}$ m dalla Luna. Quanto dista, all'incirca, la Luna dal Sole quando Sole-Terra-Luna sono allineati in quest'ordine?

[A] $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m [B] $5{,}3 \cdot 10^{11}$m [C] $2{,}3 \cdot 10^{11}$m [D] $2{,}3 \cdot 10^{19}$m.

13. L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

[A] $4{,}5 \cdot 10^9$ anni [B] $3{,}5 \cdot 10^9$anni [C] $4{,}5 \cdot 10^6$anni [D] $4{,}5 \cdot 10^3$anni

[Tratto da INVALSI – Servizio nazionale di valutazione 2010-11]

14. Il volume della Terra è circa $1{,}08 \times 10^{21}$m^3. Tenendo presente che $2^{10}=1024$, quale delle seguenti misure, espresse in metri cubi, è quella che differisce meno dal volume di un emisfero terrestre?

[A] 2^{35} [B] 2^{48} [C] 2^{69} [D] 2^{87}.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Come si definisce l'errore relativo di un numero?

[5] **Avogadro**, Amedeo, chimico e fisico torinese, 1776-1856.

2. Di una lunghezza L è stata trovata la seguente misura: L=(58,2±0,8) cm. È vero che l'errore relativo di cui è affetta questa misura è all'incirca 1,4% cm?
3. Siano x' ed x" i valori approssimati di due misure, affetti dagli errori assoluti ε' ed ε". È vero che gli errori assoluti delle misure approssimate x'+x" ed x'·x" sono uguali ad ε'+ε"?
4. Hai misurato la lunghezza e la larghezza della tua scrivania e, dopo aver trovato le misure 110 cm e 75 cm, hai concluso che l'area del ripiano della tua scrivania, di forma rettangolare, è 8250 cm^2. Si tratta della misura esatta?
5. Sussiste una qualche relazione fra le cifre significative di una misura e la sensibilità dello strumento di misura?
6. È vero che le misure $9{,}8\ m/s^2$ e $9{,}80\ m/s^2$ dell'accelerazione di gravità sulla Terra hanno le stesse cifre significative? Nel primo caso di quali cifre si è sicuri? E nel secondo? Quali errori relativi si commettono assumendo l'una o l'altra delle due misure?
7. È corretto affermare che non c'è differenza fra le due formule L=25,7 m e L=25,70 m, usate per indicare la lunghezza di un regolo?
8. In afelio (punto più lontano dal Sole) la distanza Terra-Sole è di circa 152.097.701 km. È corretto affermare che un valore arrotondato e l'ordine di grandezza di tale distanza sono rispettivamente $1{,}5 \cdot 10^8$ km e 10^8 km?
9. Come si definisce l'ordine di grandezza di un numero?

RISPOSTE.

1. L'errore relativo di un numero è il rapporto fra l'errore assoluto e il suo valore esatto.
2. No, è falso. L'errore relativo, che è un numero puro, senza etichette, è semplicemente 1,4%.
3. No. O meglio l'affermazione è vera solo per la misura "somma".
4. No. Le misure delle dimensioni trovate sono inevitabilmente approssimate, per cui anche l'area lo è. L'errore di approssimazione dell'area si può però determinare solo se si conoscono gli errori di approssimazione delle dimensioni.
5. Sì. Per la precisione, le cifre significative di una misura sono tante quante quelle che lo strumento effettivamente registra.
6. No. La prima misura ha 2 cifre significative, la seconda ne ha 3. Nel primo caso, solo della prima cifra si è sicuri, mentre la seconda può essere 8 ma anche 7 o 9: la misura è compresa fra $9{,}7\ m/s^2$ e $9{,}9\ m/s^2$; nel secondo caso si è sicuri invece delle prime due cifre. Assumendo la prima misura si commette un errore relativo uguale a $\frac{0{,}1}{9{,}8} \approx 1{,}0\%$; assumendo la seconda un errore relativo uguale a $\frac{0{,}01}{9{,}80} \approx 0{,}1\%$.
7. Non è corretto per niente. C'è infatti una notevole differenza fra le due formule. La prima indica che la lunghezza è stata calcolata con una precisione a meno di 0,1 m, mentre la seconda indica che la precisione del calcolo è a meno di 0,01 m.
8. Sì.
9. L'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 più prossima al numero.

LETTURA

Un procedimento indiano per approssimare $\sqrt{2}$.

In questa breve lettura parleremo di “antica civiltà indiana” intendendo con questa locuzione la civiltà che gravitava in una zona dell’Asia meridionale che attualmente comprende all’incirca Pakistan, Nepal, India, Bangladesh e Sri Lanka. In questa civiltà, in un periodo collocabile tra gli anni 1000 e 500 a.C., i testi sacri (cosiddetti *Veda*) prescrivevano, fra le molte altre cose, la costruzione di un altare quadrato di area doppia di quella di un altro quadrato. Così, per esempio, se il quadrato dato aveva area 1 e quindi lato 1, il quadrato da costruire, dovendo avere area 2, doveva avere lato $\sqrt{2}$. Orbene, un’appendice dei *Veda*, denominata *sulbasutra*, scritta da un autore di nome *Apostamba* (circa 600 a.C.), fornisce dettagliatamente le istruzioni per calcolare il valore (approssimato) di $\sqrt{2}$. Istruzioni espresse in forma retorica, ma che nel nostro linguaggio simbolico si riassumono nella seguente formula:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{34}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\approx 1{,}414215\,.$$

Oggi sappiamo che $\sqrt{2}=1{,}414213\ldots$. Per cui l’approssimazione di Apostamba è buona fino al 5° decimale.
Non è dato sapere come egli sia pervenuto a quelle istruzioni. Un’ipotesi al riguardo è stata avanzata dal matematico e storico della matematica indiana, Bibhutibhushan Datta (1888-1958), in un suo libro pubblicato nel 1932 col titolo *The Science of Sulba*, e che presenta uno studio della prima geometria Hindu.
Datta considera due quadrati uguali, ABCD e PQRS (Fig. 2). Suddivide dapprima il quadrato PQRS in tre parti uguali (tre rettangoli il cui lato maggiore è uguale al lato del quadrato, mentre il minore è lungo $\frac{1}{3}$). Lascia da parte i rettangoli contrassegnati in figura con i numeri 1 e 2 e suddivide il terzo rettangolo in tre quadrati uguali (ciascuno di lato $\frac{1}{3}$). Lascia da parte il quadrato contrassegnato col numero 3 e suddivide ciascuno degli altri due quadrati in quattro parti uguali (ognuna delle otto parti ottenute è un rettangolo avente un lato lungo $\frac{1}{3}$ e l’altro lato lungo $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ cioè $\frac{1}{12}$): in figura queste parti sono contrassegnate con i numeri da 4 a 11. A questo punto Datta dispone le 11 parti ottenute esternamente al quadrato ABCD come indicato in figura, ottenendo il quadrato AEFG, il cui lato è lungo $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\approx 1{,}416$, cioè un valore leggermente più grande di $\sqrt{2}$ e la cui approssimazione è buona solo fino al 2° decimale.

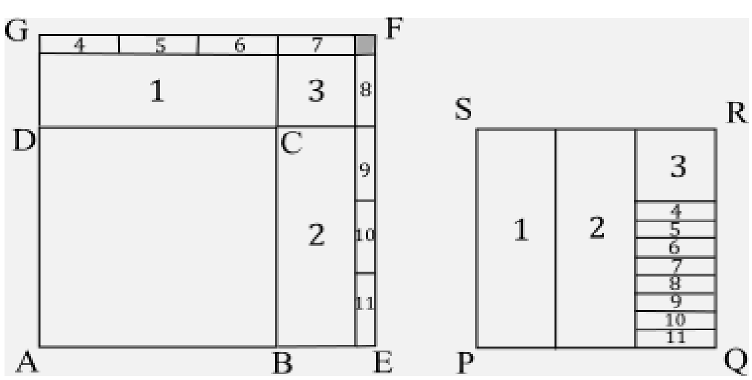

FIG. 2

In realtà, con questa costruzione, il quadrato non è completo, mancando di un quadratino di lato 1/12 (ha un vertice in F ed è ombreggiato in figura). E comunque sia, per ritrovare la formula proposta da Apostamba, al quadrato ottenuto seguendo le istruzioni di Datta bisogna ancora sottrarre $\frac{1}{34}\left(\frac{1}{12}\right)$ e Datta non fornisce alcuna spiegazione al riguardo.