Prerequisiti:

- Rappresentare la retta in un piano cartesiano.
- Saper risolvere sistemi ed equazioni di 2° grado.
- Conoscere le proprietà della circonferenza

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dimostrare la formula dell'equazione generale della circonferenza*
- *risolvere semplici problemi riguardanti retta e circonferenza*
- *esplicitare le aspettative riguardo alle possibili soluzioni di un problema ed individuare elementi di controllo da tenere presenti nel corso del processo risolutivo*

Circonferenza nel piano cartesiano

Unità 42

42.1 EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

42.1.1 Ci proponiamo di determinare l'equazione di una circonferenza c assegnata in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy). A questo riguardo ricordiamo che ***una circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso*** e supponiamo di conoscerne il *raggio* r e le coordinate (x_C,y_C) del *centro* C (Fig. 1). Chiamato P(x,y) un generico punto del piano, la condizione P∈c equivale a $\overline{PC}=r$, da cui segue $\overline{PC}^2=r^2$ ed infine, ricordando la formula della distanza di due punti:

[1] $$\mathbf{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2}.$$

Questa è l'equazione della circonferenza c avente raggio r e centro $C(x_C,y_C)$. Più esattamente:

> Al variare di x_C e y_C in $\mathbb{R}$ e di r in $\mathbb{R}_0$, la [1] descrive tutte le circonferenze del piano cartesiano. E pertanto ogni circonferenza di tale piano è rappresentata da un'equazione del tipo [1].

Nel caso particolare in cui C=O (Fig. 2), l'equazione [1] diventa:

$$\mathbf{x^2+y^2=r^2}.$$

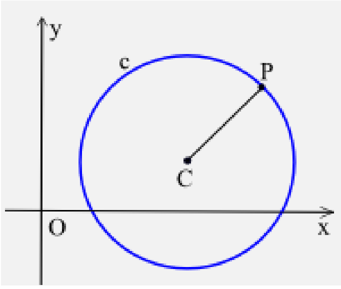

FIG. 1

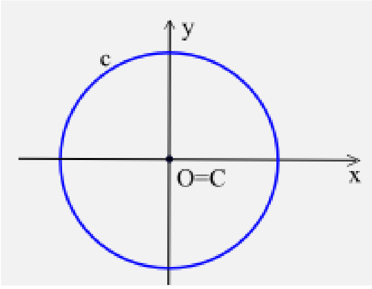

FIG. 2

42.1.2 La [1], dopo alcune semplici elaborazioni, assume la forma seguente:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

avendo posto: $a=-2\,x_C,\ \ b=-2\,y_C,\ \ c=x_C^2+y_C^2-r^2$. Di conseguenza:

> Ogni **circonferenza** ha un'equazione del tipo:
>
> [2] $$\mathbf{x^2+y^2+ax+by+c=0},$$
>
> che è chiamata ***equazione normale di una circonferenza***.

42.1.3 Riassumiamo: ogni circonferenza del piano cartesiano (Oxy) può essere rappresentata da un'equazione del tipo [1] o del tipo [2]. Inoltre, ogni equazione del tipo [1] rappresenta una circonferenza di tale piano. Ci domandiamo:

Ogni equazione del tipo [2] rappresenta una circonferenza?

Ebbene, si tratta di vedere se la [2] si può mettere nella forma [1]. Ora, osservando anzitutto che si ha:

$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad \text{e}\quad y^2+by=\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4},$$

la [2] diventa:

[3] $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4};$$

e si identifica con la [1] solamente se risulta:

$$x_C = -\frac{a}{2}, \ \ y_C = -\frac{b}{2}, \ \ r^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}.$$

Sennonché l'ultima di queste tre relazioni comporta un problema. È chiaro infatti che:

- se fosse $a^2+b^2-4c=0$ sarebbe $r=0$ e perciò la [3] si ridurrebbe a rappresentare il solo punto $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$: si dice, in questo caso, che la [2] rappresenta una *circonferenza degenere* nel suo centro;
- se fosse $a^2+b^2-4c<0$ si avrebbe la relazione impossibile $r^2<0$ e perciò la [3] non sarebbe soddisfatta da nessuna coppia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; si dice che l'equazione rappresenta una *circonferenza immaginaria.*
- soltanto se $a^2+b^2-4c>0$ la [3] e di conseguenza la [2], alla quale essa è equivalente, rappresenta una circonferenza: la circonferenza avente centro C e raggio r tali che:

$$\mathbf{x_C = -\frac{a}{2}, \ \ y_C = -\frac{b}{2}; \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}}.$$

42.1.4 Mostriamo sull'argomento alcuni esercizi: dei primi due è fornita una traccia di risoluzione, del terzo è richiesta la risoluzione completa e ci limitiamo a fornire il risultato.

- ESERCIZIO 1. Riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), scrivere l'equazione della circonferenza avente centro nel punto $C(2,0)$ e raggio $r=2$.

RISOLUZIONE. Tra i vari procedimenti possibili descriviamo quello che secondo noi è il più rapido.

In virtù della [1] l'equazione è:

$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2,$$

ossia, dopo qualche semplificazione elementare:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

La circonferenza è disegnata in figura 3.

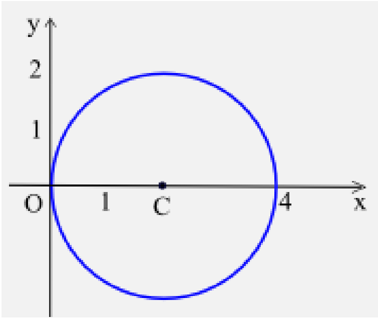

FIG. 3

- ESERCIZIO 2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(0,1), B(-2,0), C(-1,-2)$. Trovare l'equazione della circonferenza passante per questi tre punti.

RISOLUZIONE (Suggerimenti). Si possono seguire due procedimenti e ti suggeriamo di eseguirli entrambi per esercizio.

1) Siccome la circonferenza k da determinare ha equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0,$$

l'appartenenza a k dei tre punti A, B, C si traduce nelle tre seguenti equazioni nelle incognite a, b, c:

$$1+b+c = 0, \quad 4-2a+c = 0, \quad 1+4-a-2b+c = 0.$$

Risolto il loro sistema, si ottengono i valori di a, b, c e quindi l'equazione di k.

2) Si trovano gli assi dei segmenti AB e AC e si determina il loro punto comune D. La circonferenza cercata è quella che ha centro in D e raggio DA.

In ogni caso si trova la seguente equazione: $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$.

- ESERCIZIO 3. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(0,8) e B(6,0).

a) Determinare, sulla retta di equazione x=7, un punto C in modo che le rette AC e BC risultino perpendicolari.

b) Verificato che di punti C ne esistono due, C_1 e C_2, spiegare perché i punti O, A, B, C_1 e C_2 sono situati su una medesima circonferenza e di questa trovare l'equazione.

c) Considerato anche il punto D(3,4), spiegare perché nessuna circonferenza passa contemporaneamente per i punti A, B, D.

[**R.** a) $C_1(7,1)$, $C_2(7,7)$; b) $x^2+y^2-6x-8y=0$; c) ...]

42.2 MUTUE POSIZIONI DI RETTA E CIRCONFERENZA

42.2.1 Dallo studio della geometria elementare hai appreso che una retta ed una circonferenza possono essere, l'una rispetto all'altra: ***secante***, ***tangente*** o ***esterna***, a seconda che abbiano in comune rispettivamente due punti, un solo punto o nessun punto. Queste reciproche posizioni si hanno secondo che la distanza del centro della circonferenza dalla retta sia rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio.

Ci vogliamo soffermare sulla dimostrazione di queste condizioni utilizzando la geometria analitica.

Considerata una generica circonferenza k di raggio r e una qualunque retta t, per comodità assumiamo nel piano delle due curve un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) in modo che k abbia centro in O e l'asse y sia parallelo alla retta t e inoltre che questa retta sia situata nel semipiano $x \geq 0$. Con questa scelta le equazioni di k e di t sono nell'ordine:

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad x = d \text{ (con } d \geq 0).$$

Gli eventuali punti comuni a k ed a t hanno ascissa x ed ordinata y tali che:

$$x = d, \quad y^2 = r^2 - d^2.$$

Pertanto, dopo aver osservato che d è la distanza del punto O dalla retta t, si ha che:

- t interseca k se e solo se $r^2 - d^2 > 0$, ossia se $d < r$ (Fig. 4). In altri termini:

  Una retta e una circonferenza sono **secanti** se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è minore del raggio.

- t è esterna a k se e solo se $r^2 - d^2 < 0$, ossia se $d > r$ (Fig. 5). In altri termini:

  Una retta e una circonferenza sono **esterne** l'una all'altra se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è maggiore del raggio.

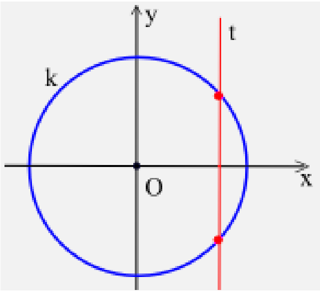

FIG. 4

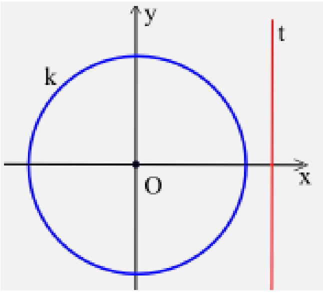

FIG. 5

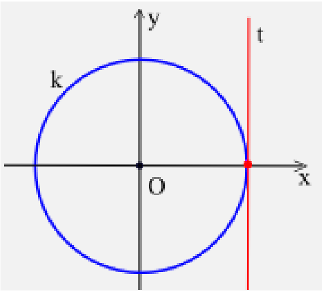

FIG. 6

- t è tangente a k se e solo se $r^2 - d^2 = 0$, ossia se $d = r$ (Fig. 6). In altri termini:
  Una retta e una circonferenza sono **tangenti** se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio.
  In questo caso, chiamato T il punto in cui t e k si toccano, si ha evidentemente T(r,0) e perciò la retta OT, che coincide con l'asse x, è perpendicolare alla retta t. In sostanza:
  La retta tangente ad una circonferenza in un suo punto coincide con la perpendicolare al raggio passante per quel punto.
  In realtà, il sistema delle equazioni di una circonferenza e di una retta ad essa tangente ha due soluzioni coincidenti e non una sola. Questo implica un cambiamento della definizione di tangente ad una circonferenza:
  Una retta ed una circonferenza si dicono *tangenti* se hanno in comune due punti coincidenti.

42.2.2 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), siano assegnate una circonferenza k ed una retta r di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0, \quad y = m\,x + n.$$

Gli eventuali punti comuni a k ed r – ossia le coppie ordinate di numeri reali (x,y) che verificano contemporaneamente le equazioni delle due "curve" – si trovano risolvendo il sistema delle due equazioni medesime.
Si tratta di cose che dovresti conoscere bene, dal momento che il procedimento non è diverso da quello seguito riguardo a parabola e retta, per cui evitiamo di dilungarci sull'argomento.
Ripetiamo soltanto che se il sistema ha due soluzioni coincidenti allora la retta e la circonferenza sono tangenti e viceversa.

Ti proponiamo qualche esercizio.

1. Stabilire nel modo che ritieni più conveniente come sono disposte la retta r e la circonferenza k tali che:
   a) $r \equiv x = 0,\ k \equiv x^2 + y^2 = 1$; b) $r \equiv y = x,\ k \equiv 2x^2 + 2y^2 - y = 0$;
   c) $r \equiv y = 2x + 3,\ k \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0$; d) $r \equiv 2x - 3y = 0,\ k \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$.
2. (IMPORTANTE, DA MEMORIZZARE) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la circonferenza, passante per il punto O, di equazione:
   $$x^2 + y^2 + ax + by = 0\,.$$
   Dimostrare che l'equazione della retta tangente ad essa in O ha equazione:
   $$ax + by = 0\,.$$
3. È assegnata la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-3=0$. Dopo aver verificato che il punto A(1,2) le appartiene, trovare l'equazione della retta tangente in A alla circonferenza.
   [NOTA BENE. Sono possibili due procedimenti, uno dei quali è analogo a quello già descritto per la parabola. In questo caso, però, in cui il punto, per il quale si vuole condurre la tangente, è situato sulla circonferenza, è preferibile un PROCEDIMENTO ALTERNATIVO: si tratta di constatare che la tangente cercata altro non è che la retta condotta per A perpendicolarmente alla retta AC, essendo C il centro della circonferenza.]
4. Sono assegnate le rette $a \equiv y = x + 1$ e $b \equiv y = 2x - 5$. Trovare l'equazione della circonferenza tangente alla retta a nel suo punto A di ascissa 1 e avente il centro sulla retta b.
   [NOTA BENE. Sono possibili due procedimenti, uno dei quali è analogo a quello già descritto per la parabola. In questo caso, però, in cui il punto, per il quale passa la circonferenza, è situato sulla tangente ad essa, è preferibile un PROCEDIMENTO ALTERNATIVO: si tratta di constatare che il centro C della circonferenza è il punto

in cui la retta b è intersecata dalla retta p condotta per A perpendicolarmente alla retta a. A questo punto sono noti il centro e il raggio, uguale ad AC, della circonferenza. Il resto è banale.]

42.3 MUTUE POSIZIONI DI DUE CIRCONFERENZE

42.3.1 Anche per quanto concerne le reciproche posizioni di due circonferenze, ti è noto che queste posizioni possono essere diverse. Le ricordiamo qui appresso.

Considerate due circonferenze k e k', di centri C e C' e di raggi r ed r' rispettivamente (supponiamo $r \geq r'$), avviene che:

- k e k' sono **secanti** se e solo se $r-r'<\overline{CC'}<r+r'$ (Fig. 7);
- k e k' sono **tangenti** se e solo se risulta $\overline{CC'}=r-r'$ oppure $\overline{CC'}=r+r'$.
  - Nel primo caso (Fig. 8), i punti di k', fatta eccezione per il punto di contatto, sono tutti interni a k e le due circonferenze si dicono più precisamente ***tangenti internamente***.
  - Nel secondo caso (Fig. 9), i punti di ognuna delle due circonferenze, fatta sempre eccezione per il punto di contatto, sono tutti esterni all'altra e le due circonferenze si dicono più propriamente ***tangenti esternamente***;

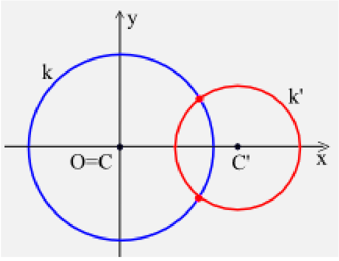

FIG. 7

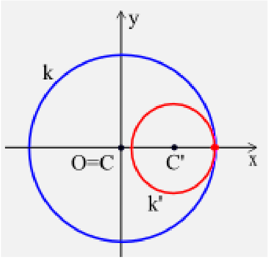

FIG. 8

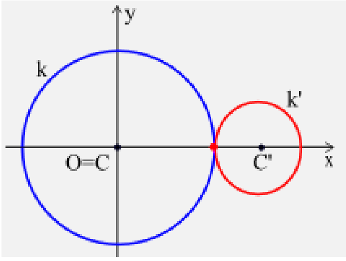

FIG. 9

- k e k' sono **non secanti** se e solo se risulta $\overline{CC'}<r-r'$ oppure $\overline{CC'}>r+r'$.
  - Nel primo caso (Fig. 10), i punti di k' sono tutti interni a k e per questo le due circonferenze si dicono ***l'una interna all'altra*** e per la precisione, in tal caso, k' è interna a k.
    Un caso particolare di circonferenze l'una interna all'altra si ha quando i centri delle due circonferenze coincidono, essendo però i raggi disuguali (Fig. 11). In questo caso esse si dicono ***concentriche***. La parte di piano compresa fra due circonferenze concentriche è, come si sa, la *corona circolare*.
  - Nel secondo caso (Fig. 12), i punti di ognuna delle due circonferenze sono tutti esterni all'altra ed esse si dicono per l'appunto ***esterne***.

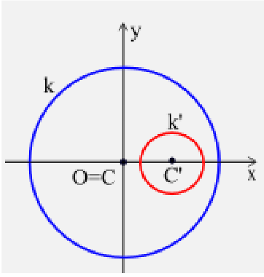

FIG. 10

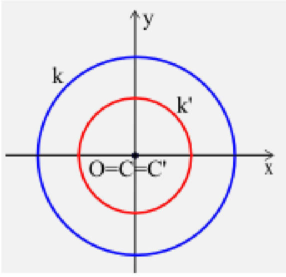

FIG. 11

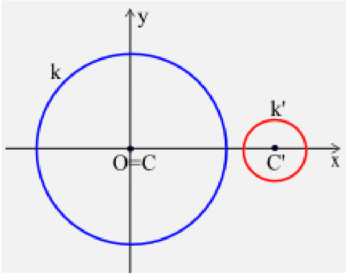

FIG. 12

Ai fini della dimostrazione di quanto esposto sopra (dimostrazione che questa volta ci limitiamo ad accennare, lasciando a te il compito di completarla, se lo vuoi) è consigliabile assumere il riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) in modo che O coincida con C e che la semiretta positiva Ox passi per C'.
Di modo che, posto $\overline{CC'} = d$ (d>0), k e k' hanno equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - d)^2 + y^2 = r'^2.$$

Gli eventuali punti comuni a k e k' hanno ascissa x e ordinata y tali che:

$$x = \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d}, \quad y^2 = h[d - (r - r')][d - (r + r')] .$$

dove $h = \frac{(d + r)^2 - r'^2}{4\,d^2}$.
Da qui in poi il ragionamento è abbastanza semplice: basta vedere come varia il segno dell'espressione $[d - (r - r')][d - (r + r')]$ al variare di d nell'insieme dei numeri reali positivi.

42.3.2 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate due circonferenze k e k' di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0, \quad x^2 + y^2 + a'\,x + b'\,y + c' = 0.$$

Gli eventuali punti comuni ad esse – ossia le coppie ordinate di numeri reali (x,y) che verificano contemporaneamente le loro equazioni – si trovano risolvendo il sistema delle due equazioni medesime.
Per questo bisogna preliminarmente sostituire ad un'equazione quella che si ottiene sottraendo membro a membro le due equazioni date, ossia, nel caso specifico, l'equazione:

$$(a - a')\,x + (b - b')\,y + (c - c') = 0,$$

che è esattamente quella di una retta. In questo modo, si ritorna al caso in cui si devono trovare le intersezioni di una circonferenza con una retta.
Nel caso in cui questa retta è tangente ad una delle circonferenze, lo è anche all'altra e le due circonferenza hanno in comune due punti coincidenti e non uno solo. Anche adesso bisogna modificare la definizione di circonferenze tangenti:

Due circonferenze si dicono *tangenti* se hanno in comune due punti coincidenti.

Al fine di approfondire questa questione delle posizioni reciproche di due circonferenze, ti proponiamo di risolvere l'esercizio n. 4 della sezione "verifiche".

42.3.3 Ancora un paio di esercizi sulla medesima questione, per la risoluzione dei quali è richiesta la tua collaborazione, parziale o completa.

- ESERCIZIO 1. Tra le circonferenze di equazione:

(1) $$x^2 + y^2 - a\,x + y = 0,$$

dove $a \in \mathbb{R}$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), determinare quelle che risultano tangenti, secanti o non secanti la circonferenza di equazione:

(2) $$x^2 + y^2 - 6\,x + 5 = 0.$$

Stabilire pure se qualcuna delle circonferenze (1) è concentrica alla (2).
RISOLUZIONE (Traccia). Si trova anzitutto la risolvente, per esempio in x, del sistema delle equazioni (1) e (2); essa è:

$$(a^2-12a+37)\,x^2 + 2\,(5a-33)\,x + 30 = 0.$$

Di questa equazione si calcola il discriminante D:

$$D = 4\,(-5a^2+30a-21).$$

Si tratta quindi di studiare il segno di D:
- per i valori di a che rendono D nullo si hanno circonferenze tangenti,
- per quelli che rendono D positivo si hanno circonferenze secanti,
- per quelli che rendono D negativo si hanno circonferenze non secanti (che possono essere interne l'una all'altra o esterne).

Riguardo all'ultimo quesito, osserva che il centro della generica circonferenza (1) ha ordinata … , mentre quello della circonferenza (2) ha ordinata … ; cosicché … .

- ESERCIZIO 2. Sono assegnati i punti C(2,0) e T(3,1).

a) Trovare l'equazione della circonferenza γ' avente il centro in C e passante per T.
b) Trovare l'equazione della retta t tangente in T a γ'.
c) Trovare l'equazione della circonferenza γ'' tangente in T alla circonferenza γ' e avente il centro sulla retta di equazione x=4.
d) Verificare che le due circonferenze γ' e γ'' sono uguali.

42.4 FASCI DI CIRCONFERENZE

42.4.1 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), siano assegnate le circonferenze, γ_1 e γ_2, di equazioni rispettivamente:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0\,.$$

Indicato con k un parametro reale, anche l'equazione:

[4] $$\left(x^2+y^2+ax+by+c\right)+k\left(x^2+y^2+a'x+b'y+c'\right)=0$$

rappresenta una circonferenza. Le infinite circonferenze che si ottengono facendo variare k in $\mathbb{R}$ costituiscono quello che si chiama **fascio di circonferenze** generato da γ_1 e γ_2. La [4] si chiama *equazione del fascio di circonferenze*, mentre k è detto *parametro del fascio*.

Osserviamo che per k=0 si ottiene la circonferenza γ_1 mentre per nessun valore di k si ottiene la circonferenza γ_2, Si può notare tuttavia che, dividendo entrambi i membri della [4] per k e facendo assumere a k un valore "infinitamente grande", il fattore 1/k tende a diventare uguale a zero e perciò la [4] tende a coincidere con l'equazione di γ_2. Per questa ragione, pur con abuso di linguaggio, si dice che questa seconda equazione si ottiene dalla [4] per k uguale ad infinito.

Osserviamo inoltre che ponendo $k=-1$ nell'equazione [4] si ottiene una retta, che pertanto può essere legittimamente considerata un elemento del fascio: si chiama ***asse radicale*** del fascio. La sua equazione è evidentemente:

$$(a-a')\,x+(b-b')\,y+(c-c')=0.$$

L'equazione [4], se $k\neq-1$, si può mettere nella seguente forma:

$$x^2+y^2+\frac{a+ka'}{1+k}x+\frac{b+kb'}{1+k}y+\frac{c+kc'}{1+k}=0\,.$$

Se indichiamo con (x,y) le coordinate del centro della circonferenza che essa rappresenta, si ha:

$$x=-\frac{a+ka'}{2(1+k)}\,,\quad y=-\frac{b+kb'}{2(1+k)}\,.$$

Esprimendo k in funzione di x, nella prima delle due precedenti relazioni, e sostituendo il valore così trovato nella seconda (o, come anche si dice, eliminando il parametro k tra le due relazioni), dopo alcune elaborazioni algebriche si ottiene la seguente equazione:

$$(b-b')\,x-(a-a')\,y-\frac{ab'-a'b}{2}=0\,.$$

Se non è contemporaneamente a=a’ e b=b’, cioè se le due circonferenze generatrici del fascio non sono concentriche, questa equazione rappresenta una retta, che è esattamente il *luogo dei centri* delle circonferenze del fascio ed è denominata per questo ***retta dei centri***.

Si può verificare facilmente che **l’asse radicale e la retta dei centri di un fascio di circonferenze (ovviamente non concentriche) sono perpendicolari.**

42.4.2 Le due circonferenze che generano il fascio di circonferenze possono essere secanti, tangenti o non avere addirittura punti comuni ed in particolare, in quest’ultimo caso, possono essere concentriche. Ebbene, a seconda dei casi, si hanno quattro tipi di fasci di circonferenze.

1) Se le due circonferenze sono secanti ed hanno perciò due punti in comune, tutte le circonferenze del fascio passano per quei due punti (Fig. 13): si ha pertanto un ***fascio di circonferenze secanti***. L’asse radicale è la retta passante per quei due punti.
2) Se le due circonferenze sono tangenti (internamente o esternamente), tutte le circonferenze sono tangenti e la retta tangente comune ad esse nel punto di contatto è l’asse radicale (Fig. 14): si ha un ***fascio di circonferenze tangenti***.
3) Se le due circonferenze non hanno punti comuni e sono perciò esterne o l’una interna all’altra (ma senza essere concentriche), due qualsiasi circonferenze del fascio non hanno punti comuni ed in tal caso l’asse radicale è una ben determinata retta esterna a ciascuna circonferenza del fascio (Fig. 15): si ha un ***fascio di circonferenze senza punti comuni (ma non concentriche)***.

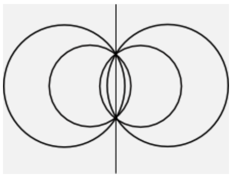
FIG. 13

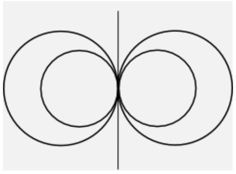
FIG. 14

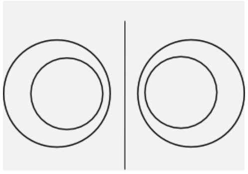
FIG. 15

4) Nel caso particolare in cui le due circonferenze sono concentriche, tutte le circonferenze del fascio hanno lo stesso centro ed il fascio stesso si dice ***fascio di circonferenze concentriche*** o ***fascio improprio***. L’asse radicale non esiste.

Considerato che l’asse radicale si può concepire come un particolare elemento del fascio di circonferenze, il fascio medesimo (che non sia però un fascio improprio) può essere determinato proprio da una retta (l’asse radicale per l’appunto) e da una circonferenza.

A verifica di quanto detto, ti proponiamo di studiare i fasci di circonferenze generati dalle seguenti circonferenze (o da circonferenza e retta), determinando in particolare di ogni fascio l’asse radicale e la retta dei centri (quando esistono) e di verificare che queste due rette sono perpendicolari:

a) $x^2+y^2+2x=0\,,\ \ x^2+y^2+y=0.$
b) $x^2+y^2+4x+3y=0\,,\ \ x^2+y^2+8x+6y=0.$
c) $x^2+y^2+2x-1=0\,,\ \ x^2+y^2-6x-2y+9=0.$
d) $x^2+y^2-4x-2y+4=0\,,\ \ x^2+y^2-4x-2y+1=0.$
e) $x^2+y^2+2x-2=0\,,\ \ 2x-5=0.$
f) $x^2+y^2+x-2y=0\,,\ \ 2x-y=0.$

g) $x^2+y^2+2x-2=0\,,\ \ x-2=0.$

VERIFICHE

Avvertenza. Negli esercizi in cui non è detto esplicitamente, ma è sottinteso che ci sia, il piano della figura s'intende riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. Determinare l'equazione della circonferenza avente centro C e raggio r, sapendo che:

a) $C(0,0),\ \ r=\frac{1}{2};$ b) $C(0,0),\ \ r=1;$ c) $C\left(\frac{3}{2},0\right),\ \ r=\frac{3}{2};$

d) $C\left(-\frac{1}{2},0\right),\ \ r=1,$ e) $C\left(0,-\frac{3}{2}\right),\ \ r=2;$ f) $C(0,1),\ \ r=1;$

g) $C(-1,2),\ \ r=\sqrt{5};$ h) $C(2,1),\ \ r=2.$

[**R.** a) $4x^2+4y^2-1=0$; … ; c) $x^2+y^2-3x=0$; … ; e) $4x^2+4y^2+12y-7=0$; … ; g) $x^2+y^2+2x-4y=0$; …]

2. Sia la circonferenza k di centro O e raggio 10.

a) Calcolare il numero N dei punti interni ad essa o situati su di essa, le cui coordinate sono entrambe espresse da numeri interi.

b) Se si assume questo numero N uguale alla parte intera dell'area del cerchio delimitato da k, quale errore assoluto si commette? Quale errore relativo?

[**R.** a) … ; b) … , 0,94%]

3. Per ciascuna delle seguenti equazioni stabilire se rappresenta una circonferenza e, in caso affermativo, disegnarla dopo averne determinato il centro e il raggio:

1. $x^2+y^2-2x-2=0.$
2. $x^2+y^2+2y-1=0.$
3. $2x^2+2y^2+x=0.$
4. $x^2+y^2-2x-2y+2=0.$
5. $x^2+y^2+2x+3=0.$
6. $3x^2+3y^2-2x+2y=0.$

[**R.** 1) $C(1,0), r=\sqrt{3}$; 2) $C(0,-1), r=\sqrt{2}$. 3) …. 4) NO; 5) …; 6) $C\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), r=\dots$]

4. Considerate la circonferenza C e la retta t, stabilire con il procedimento preferito se sono secanti, tangenti o esterne:

1. $C\equiv x^2+y^2=4,\ \ t\equiv x+y=2.$
2. $C\equiv x^2+y^2-2x=0,\ \ t\equiv y=2x+1.$
3. $C\equiv x^2+y^2-4x=0,\ \ t\equiv 3x+4y=0.$
4. $C\equiv 4x^2+4y^2+16y-29=0,\ \ t\equiv 2x+4y-7=0.$

Se C e t sono tangenti trovare le coordinate del punto di contatto; se sono secanti quelle dei punti intersezione.

[**R.** 1) Secanti; (2,0), (0,2). 2) Esterne. 3) … . 4) Tangenti; (3/2,1)]

5. È assegnata la circonferenza di equazione:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Verificare che la tangente ad essa nel suo punto generico di coordinate (a,b), ha la seguente equazione:

$$ax+by=r^2.$$

Verificare questo fatto nei seguenti casi particolari:

- circonferenza di equazione: $x^2+y^2=4$ e suoi punti di ascissa 1;
- circonferenza di equazione: $x^2+y^2=25$ e suoi punti di ordinata 3.

6. Considerate le circonferenze C' e C", stabilire se sono secanti, tangenti o non secanti. In ciascuno degli ultimi due casi precisare se le circonferenze sono tangenti internamente o esternamente (trovare anche la retta tangente nel loro punto di contatto) oppure se sono esterne o l'una interna all'altra:

1. $C' \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0.$
2. $C' \equiv x^2 + y^2 + 2x = 0,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 + 2y = 0.$
3. $C' \equiv x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$
4. $C' \equiv x^2 + y^2 - 5x + 3y = 0,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0.$
5. $C' \equiv x^2 + y^2 = 4,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 - x = 0.$
6. $C' \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y - 2 = 0,\quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0.$

[**R.** 1) Esterne. 2) Secanti. 3) Tangenti esternamente: y = x. 4) ... . 5) ... . 6) ...]

7. Stabilire, con il procedimento preferito, com'è situato il punto P rispetto alla circonferenza C di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, sapendo che:

1. $P(1,1)$; 2. $P(2,0)$; 3. $P(2,1)$; 4. $P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$; 5. $P(1,2)$; 6. $P\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

[**R.** 1) $P \in C$; 2) ... ; 3) esterno; 4) interno; 5) ... ; 6) $P \in C$]

8. Stabilire com'è situato il punto $A\left(\frac{1}{2},-1\right)$ rispetto alla circonferenza K di equazione:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 + 2y = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$.

[**R.** 1) esterno; 2) interno; 3) ...]

9. Trovare l'equazione della circonferenza:

1. passante per i punti (0,0), (1,–2), (3,0);
2. passante per i punti $\left(0,-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \left(2,\frac{3}{2}\right)$;
3. passante per i punti (0,1), (1,3), (–2, –3).
4. avente il centro nel punto (2,0) e passante per il punto (0,0);
5. avente il centro nel punto (1,–1) e tangente alla retta di equazione $x+y = 0$;
6. avente il centro nel punto $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ e tangente alla retta di equazione $x-2y-3 = 0$.

[**R.** 1. $x^2+y^2-3x+y = 0$; 2. ... ; 3. !? ; 4. ... ; 5. $x^2+y^2-2x+2y+2 = 0$; 6. !?]

10. Trovare l'equazione della circonferenza:

1. avente per diametro il segmento AB, dove $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ e $B\left(-1,\frac{1}{3}\right)$;
2. circoscritta al triangolo di vertici $(1,0), (0,-2), (-1,-2)$;
3. passante per il punto (0,0) e tangente alla retta $y = 2x+1$ nel punto di ascissa -1.

[**R.** 1) $6x^2+6y^2+3x+10y-7 = 0$; 2) $x^2+y^2+x+y-2 = 0$; 3) $x^2+y^2-2x+4y = 0$]

11. Trovare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

condotte per il punto A tale che:

1. $A(4,2)$, 2. $A(0,3)$, 3. $A\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, 4. $A(3,\sqrt{3})$,

e determinare il punto di contatto di ciascuna tangente con la circonferenza.

$\Big[$**R.** 1) $x = 4, (4,0)$; $y = 2, (2,2)$. 2) $y = -\frac{5}{12}x + 3, \left(\frac{36}{13},\frac{24}{13}\right)$; $x = 0, (0,0)$.

3) Nessuna tangente. 4) Una tangente: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$. ... $\Big]$

12. Dopo aver verificato che il punto $P(-4/3, 2)$ è esterno alla circonferenza C di equazione $x^2+y^2=4$, si conducano per P le due rette tangenti a C e si chiamino A, B i loro punti di contatto con C. Verificare che i segmenti PA e PB sono congruenti e le rette PH ed AB sono perpendicolari, essendo H il centro di C. $\left[\mathbf{R.}\ t' \equiv y = 2,\ A(0,2);\ t'' \equiv y = \frac{12}{5}x + \frac{26}{5},\ B\left(-\frac{24}{13}, \frac{10}{13}\right); \dots\right]$

13. Dopo aver verificato che le due circonferenze:

$$C' \equiv x^2 + y^2 = 4 \quad \text{e} \quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 2x = 0$$

sono tangenti, verificare ancora che la retta tangente ad esse nel loro punto di contatto è perpendicolare alla retta dei loro centri.

14. Dopo aver verificato che le due circonferenze:

$$C' \equiv x^2 + y^2 - 3x = 0 \quad \text{e} \quad C'' \equiv x^2 + y^2 - 2y = 0$$

sono secanti, verificare ancora che la retta dei loro punti comuni è perpendicolare alla retta dei loro centri.

15. Tra le circonferenze passanti per i punti $(2, 0)$ e $(0, -1)$ determinare quella che:

1. passa per il punto $(0,0)$;
2. passa per il punto $(4,1)$;
3. è tangente all'asse x;
4. è tangente all'asse y;
5. ha il centro sull'asse x;
6. ha il centro sull'asse y;
7. ha il centro sulla retta $x+y+1=0$;
8. ha il centro sulla retta $4x+2y-3=0$.

[**R.** Una generica circonferenza passante per i punti $(2,0)$, $(0,-1)$ ha equazione $x^2+y^2+ax-(2a+3)y-2(a+2)=0$: 1) $a=-2$; 2) !? ; 3) $a=-4$; 4) $a=-5/2$; 5)…; 6)…; 7) $a=-5$; 8) !?]

16. Trovare l'equazione della circonferenza:

1. passante per i punti $(1,0)$ e $(-1,2)$ e tangente alla retta $11x+7y-11=0$;
2. tangente agli assi coordinati e passante per il punto $(2,1)$;
3. passante per il punto $(0,0)$, avente il centro sulla retta $x+y+1=0$ e tangente alla retta $2x+y=0$.

[**R.** 1) $x^2+y^2+9x+7y-10=0$; 2) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$; 3) $3x^2+3y^2+4x+2y=0$]

17. Dopo aver verificato che la circonferenza C di equazione $x^2+y^2-4x=0$ passa per il punto $(0,0)$, calcolare il perimetro e l'area del triangolo equilatero avente un vertice in O e gli altri due ancora su C. $\left[\mathbf{R.}\ 6\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right]$

18. È assegnata la circonferenza C di equazione $x^2+y^2=45$. Determinare quanti, tra i punti appartenenti a C o interni ad essa, hanno coordinate entrambe intere. Calcolare, quindi, la probabilità che, scegliendo a caso uno di tali punti, esso appartenga al cerchio di diametro AB, dove $A(1,0)$ e $B(6,0)$. [**R.** 145; ≈15,17%]

19. È assegnato il punto $A(0,4)$. Determinare due punti B e C dell'asse x in modo che il triangolo ABC sia equilatero. Trovare quindi l'equazione della circonferenza K circoscritta al triangolo ABC. Stabilire poi quanti, tra i punti di K o interni ad essa, hanno coordinate entrambe intere.
Calcolare, infine, la probabilità che, scegliendo a caso uno di tali punti, esso sia interno al triangolo ABC o sia situato sul suo contorno. [**R.** $B\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}, 0\right)$, …; $K \equiv 3x^2+3y^2-8y-16=0$; 24; ≈54,17 %]

20. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $\overline{AB}=12b$, $\overline{AC}=16b$, dove b è una lunghezza assegnata. Detto P il punto del cateto AC tale che $\overline{AP}=5b$ e indicato con M il punto medio dell'ipotenusa, sia Q l'intersezione del cateto AB con la perpendicolare a PM condotta per M.

1) Provare che il quadrilatero APMQ è inscrivibile in una circonferenza c e di questa trovare l'equazione in un conveniente sistema di riferimento cartesiano.
2) Detto N l'ulteriore punto in cui c interseca BC, calcolare l'area del pentagono APMNQ.

21. Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, indicare con D il piede della sua altezza condotta per C e costruire il triangolo ECD, isoscele sulla base CD e simile a quello dato, in modo che il punto

E cada dalla stessa parte di A rispetto a BC. Sia, rispetto alla stessa unità di misura: $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2\sqrt{3}$.

a) Dimostrare che l'angolo $E\hat{C}B$ è retto.

b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza k passante per i punti A, C, D.

c) Spiegare perché k passa pure per E.

d) Detto F il punto in cui k seca ulteriormente CB, calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi DF di k divide il quadrilatero ABCE.

[Tratto dalla maturità scientifica, 1994, sessione ordinaria]

22. Sono assegnati i punti A(6,0) e B(2,4).

a) Trovare l'equazione della circonferenza passante per l'origine O del sistema di riferimento e per i punti A e B.

b) Chiamato C il centro di tale circonferenza, si consideri l'angolo convesso $A\hat{C}B$: è vero che misura quanto la somma degli angoli interni del quadrilatero concavo OACB, aventi i vertici nei punti O, A, B?

c) Calcolare l'area di questo quadrilatero.

23. Sono assegnate le circonferenze di equazioni: $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-2y=0$.
Tra le circonferenze passanti per i loro punti comuni determinare quella che:

1. passa per il punto $(2,1)$;
2. passa per l'origine O;
3. è tangente all'asse x;
4. è tangente all'asse y;
5. è tangente alla retta $y=2x+1$;
6. ha il centro sull'asse x;
7. ha il centro sull'asse y;
8. ha il centro sulla retta $2x+y=0$.

OSSERVAZIONE. Naturalmente questo esercizio si può risolvere trovando per prima cosa le coordinate dei punti in cui le due circonferenze si secano, per proseguire poi in base ai dati dei vari quesiti.
Ma la cosa interessante è che i vari quesiti possono essere risolti senza determinare preventivamente i due punti suddetti. Basta ricorrere alla teoria dei fasci. Per esempio, detto k un parametro reale, **l'equazione del fascio di circonferenze** è la seguente:

$$(x^2+y^2-2x)+k\,(x^2+y^2-2y)=0.$$

Da qui in poi si procede in base alle condizioni poste dai vari quesiti. Così, per il quesito 1), basta imporre che l'equazione precedente sia soddisfatta dalle coordinate $(2,1)$. Si ottiene la seguente equazione: $3k+1=0$, risolta la quale si trova $k=-1/3$. Dopo aver sostituito questo valore di k nella equazione del fascio ed aver semplificato, si ottiene l'equazione cercata: $x^2+y^2-3x+y=0$. Analogamente negli altri casi.

24. Sono assegnate la circonferenza e la retta di equazioni rispettivamente: $x^2+y^2-2x=0$, $2x-y-1=0$.
Tra le circonferenze passanti per i loro punti comuni determinare quella che:

1. passa per il punto $(2,1)$;
2. passa per l'origine O;
3. è tangente all'asse x;
4. è tangente all'asse y;
5. è tangente alla retta $y=2x+1$;
6. ha il centro sull'asse x;
7. ha il centro sull'asse y;
8. ha il centro sulla retta $2x+y=0$.

[Come sopra]

25. Trovare l'equazione del fascio di circonferenze:

1. aventi il centro nell'origine del sistema di riferimento;
2. passanti per i punti A(1,0) e B(0,–2);
3. tangenti alla retta di equazione $y-2=0$ nel punto di ascissa 1.

26. È dato il fascio di circonferenze di equazione:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 3my - m = 0$$

dove m è un parametro reale. Dopo aver controllato che nel fascio non figurano circonferenze immaginarie o degeneri, determinare:

a) la circonferenza del fascio passante per il punto $(1,0)$;

b) la circonferenza del fascio avente il centro sulla retta di equazione $y=x$;

c) l'asse radicale del fascio.

27. È dato il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y + 1 = 0$$

dove m è un parametro reale.

a) Stabilire la natura del fascio.

b) Trovare per quali valori di m si hanno circonferenze non immaginarie e non degeneri.

c) Tra le circonferenze assegnate trovare quella che ha il centro sull'asse radicale del fascio.

[**R.** a) … b) $m<-4/5$ oppure $m>0$; c) …]

28. Sono assegnati i punti $A(3,0)$ e $B(0,4)$.

1. A) Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti O, A, B.
   B) Determinare sull'asse x i punti R ed S (R segue S nell'ordine fissato su tale asse) simmetrici l'uno dell'altro rispetto al punto A e tali che sia retto l'angolo $R\widehat{B}S$.
2. A) Indicati con P e Q rispettivamente i punti in cui i segmenti BR e BS intersecano la circonferenza, oltre che in B, dimostrare con considerazioni di geometria sintetica e verificare mediante la geometria analitica che P e Q sono i punti medi dei segmenti BR e BS rispettivamente.
   B) Calcolare l'area e il perimetro del quadrilatero OAPQ.

[**R.** …, 1B) R(8,0), S(–2,0); …]

29. È assegnata la circonferenza k di centro O e raggio 3. La circonferenza k' ha invece raggio 2 e centro in un punto O' del semiasse positivo delle ascisse. Indicata con x l'ascissa di O', le due circonferenze sono secanti se e solo se:

[A] $0<x\leq 1$; [B] $1<x<5$; [C] $x\geq 5$; [D] x soddisfa a condizioni diverse dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

30. È assegnato il triangolo rettangolo ABC, i cui cateti AB e AC sono lunghi rispettivamente 2 ed 1. Internamente ai lati BC, CA, AB si prendano nell'ordine i punti P, Q, R tali che:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{5}}{2},\quad \overline{CQ} = \frac{1}{3},\quad \overline{AR} = \frac{3}{2}.$$

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovino le equazioni delle tre circonferenze passanti rispettivamente per i punti (A,R,Q), (B,P,R), (C,Q,P). Si verifichi, quindi, che tali circonferenze passano per uno stesso punto.

31. Sono assegnati i punti $A(a,0)$ e $B(-a,0)$, dove a è un numero reale positivo. Si chiami C il punto, situato nel semipiano $y>0$, in cui si secano la circonferenza di centro A e raggio AB e la circonferenza di centro B e raggio BA. Trovare le coordinate di C. Trovare inoltre l'equazione della circonferenza tangente all'asse x ed agli archi AC e BC delle circonferenze tracciate.

[**R.** $C\left(0, a\sqrt{3}\right)$. Indicati con H il centro della circonferenza e con D il punto in cui AH interseca l'arco BC, risulta: AH+HD=AB. Da qui, tenendo anche presente che per ragioni di simmetria H è situato sull'asse y, dopo alcune considerazioni, si trova $H(0, 3a/4)$ e perciò …]

32. È assegnata l'equazione: $x^2+y^2+k^2x+ky=0$, dove k è un parametro reale.

1. A) Per quali valori di k l'equazione rappresenta una circonferenza?

B) Provare che fra le circonferenza aventi l'equazione assegnata ce ne sono due passanti per il punto $A(1,1)$.
C) Dopo aver scritto le equazioni di queste due circonferenze ed averle disegnate, calcolare la distanza dei loro centri e verificare che è compresa fra la differenza e la somma dei loro raggi.

2. A) Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti comuni alle due circonferenze disegnate e tangente alla retta $y=-2x$.
B) Verificare che i centri di questa circonferenza e delle due precedenti sono allineati: si chiami r la loro retta.
C) Esiste qualche relazione fra la retta r ed il segmento OA?

33. È assegnata la circonferenza di equazione: $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

1. a) Verificare che risulta tangente agli assi di riferimento.
b) Condurre per il punto A(6,0) l'ulteriore tangente alla circonferenza e chiamare B il punto in cui essa interseca l'asse y.
c) Indicato con C il punto in cui la circonferenza assegnata tocca l'asse x, trovare l'equazione della retta BC.
2. a) Trovare l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo BOC.
b) Calcolare la lunghezza del raggio di questa circonferenza.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots,\ 1b)\ B(0,8),\ \ldots;2b)\ 5-\sqrt{17}\right]$

34. Sono assegnate la circonferenza k di equazione: $(x-1)^2+y^2=4$ e la retta r di equazione $y=x+1$.

1. A) Rappresentarle su uno stesso piano.
B) Trovare le coordinate dei loro punti comuni A e B.
C) Descrivere la regione D individuata dal sistema delle due seguenti disequazioni:
$$(x-1)^2+y^2\le 4 \ \text{ e } \ y\le x+1.$$
2. A) Determinare l'ampiezza in radianti dell'angolo convesso $A\hat{C}B$, essendo C il centro della circonferenza k.
B) Calcolare l'area della regione D.

35. Sono assegnati i punti $A(2,0)$ e $B(2,2)$.

1. A) Trovare le coordinate del circocentro del triangolo OAB.
B) Trovare l'equazione della circonferenza k circoscritta al triangolo.
2. Determinare le relazioni algebriche cui deve soddisfare un punto (x,y) affinché risulti:
A) interno al triangolo OAB o sulla sua frontiera;
B) interno alla circonferenza k o su di essa.
3. Determinare le relazioni algebriche cui deve soddisfare un punto (x,y) affinché risulti esterno al triangolo OAB ed interno alla circonferenza k sapendo che:
A) la sua ascissa è $3/2$.
B) la sua ordinata è $1/2$.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots;\ 2A)\ y\ge 0, x\le 2, y\le x;\ 2B)\ x^2+y^2-2x-2y\le 0;\ 3A)\ \frac{2-\sqrt{7}}{2}<y<0 \text{ oppure } \frac{3}{2}<y<\frac{2+\sqrt{7}}{2};\ 3B)\ \ldots\right]$

36. Rappresentare graficamente il seguente insieme J.

a) $J=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\le 1,\ x-y\le 0\right\}$
b) $J=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>2,\ x<\sqrt{2},\ y<\sqrt{2}\right\}$
c) $J=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\ge 2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

37. Sono dati un triangolo equilatero ed una circonferenza: il triangolo ha il centro nell'origine degli assi cartesiani, un vertice sul semiasse positivo delle ascisse ed altezza uguale a 3; la circonferenza ha il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio 1/2. Scrivere l'espressione algebrica dell'insieme dei punti del piano interni al triangolo ed esterni alla circonferenza.

38. Nelle figure sottostanti sono rappresentate una circonferenza c (Fig. 16A) oppure una circonferenza c ed una retta r (Fig. 16B). In ciascun caso scrivere il sistema di disequazioni che determina la regione ombreggiata.

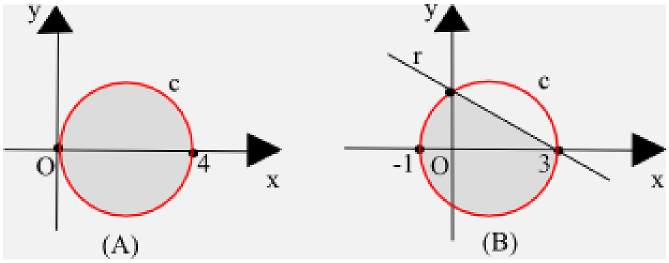

FIG. 16

39. Sono assegnati i seguenti punti: $A(0,2),\ B\left(1,\,1+\sqrt{2}\right),\ C(2,2),\ D\left(1+\sqrt{2},\,1\right)$.

a) Verificare che tali punti sono situati su una circonferenza passante per O.

b) Trovare le coordinate del punto E, in cui si intersecano le rette OB e AD, e del punto F in cui si intersecano le rette OC e AD.

c) Verificare che i punti E, F, D sono situati su una circonferenza passante per O.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } x^2+y^2-2x-2y=0;\ \text{b) } E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1\right), F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1\right);\ \text{c)}\ldots\right]$

40. È assegnato il punto $A(8,-6)$. Sulla parallela alla retta OA, condotta per il punto B(5,0), determinare un punto P in modo che il triangolo OAP sia rettangolo in P.

$\left[\mathbf{R.}\ 2\ \text{sol.: } P'(9,-3), P''\left(\frac{13}{5},\frac{9}{5}\right)\right]$

41. Sono assegnati i punti A(6,0) e B(4,0). Si traccino, nel semipiano $y\geq 0$, le semicirconferenze di diametri OA, OB, BA. Trovare le coordinate dei centri dei due *cerchi gemelli di Archimede* [1].

$\left[\mathbf{R.}\ \left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\sqrt{3}\right),\ \left(\frac{14}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\right]$

42. Tre semicirconferenze sono disposte nel semipiano $y\geq 0$ in modo da delimitare un *arbelo di Archimede*. Si conoscono le coordinate dei centri dei due *cerchi gemelli di Archimede*, che sono esattamente:

$$\left(\frac{5}{2},2\sqrt{3}\right)\quad \text{e}\quad \left(\frac{11}{2},6\right).$$

Si sa inoltre che è 3/2 il raggio di ciascuno di questi cerchi. Trovare le equazioni delle tre semicirconferenze suddette [2]. $\left[\mathbf{R.}\ y=\sqrt{4x-x^2},\ \ y=\sqrt{-x^2+20x-64},\ \ y=\sqrt{16-x^2}\ \right]$

43. Sono assegnate le seguenti circonferenze:

$$C_1 \equiv x^2+y^2-5y=0,\ \ C_2 \equiv x^2+y^2-3x-4y=0,\ \ C_3 \equiv x^2+y^2+4x-3y=0..$$

Come si può facilmente controllare, passano tutte per l'origine O del sistema di riferimento e sono uguali. Una volta trovate le coordinate dei punti in cui le tre circonferenze, prese due a due, si intersecano, oltre che nel punto O, trovare l'equazione della circonferenza passante per tali punti e verificare che è uguale alle circonferenze assegnate.

---

[1] Cfr.: Unità 38 – Misure di circonferenza e cerchio. Il numero π, N° 59 in sezione "verifiche".

[2] Vedi nota precedente.

[NOTA BENE. L'esercizio esprime un caso particolare di un teorema generale la cui paternità è attribuita al matematico rumeno Gheorghe Ţiţeica (1873-1939) ed il cui enunciato è il seguente: *Se tre circonferenze uguali passano per un medesimo punto e, prese a due a due, s'intersecano ulteriormente nei punti* A, B, C, *per questi punti passa una circonferenza uguale a quelle date*.]

44. Sono assegnate le circonferenze γ, di centro K, e δ di equazioni rispettivamente:

$$x^2+y^2+2x-y-2=0\,,\quad x^2+y^2-4x-y-2=0\,.$$

a) Verificare che le due circonferenze sono secanti e trovare le coordinate dei loro punti comuni A e B.

b) Chiamato P il punto di ordinata positiva in cui la retta di equazione x=4 interseca δ, determinare le equazioni delle rette PA e PB.

c) Indicati con C il punto in cui la retta PA interseca ulteriormente γ e con D il punto in cui la interseca ulteriormente la retta PB, verificare che la retta CD è perpendicolare alla retta PK.

45. Sono assegnati i punti A(4,0) e B(0,2).

a) Trovare le coordinate dei punti C, D, E tali che i triangoli ABC, BOD, OAE, costruiti esternamente al triangolo ABO, siano equilateri.

b) Trovare le coordinate dei baricentri H, K, L rispettivamente dei triangoli ABC, BOD, OAE.

c) Verificare che il triangolo HKL è equilatero ed ha lo stesso baricentro del triangolo ABO.

(N.B.: Si tratta di un caso particolare di una proprietà dei triangoli nota come *teorema di Napoleone*)

[**R.** a) $C\left(2+\sqrt{3},\,1+2\sqrt{3}\right),\ D\left(-\sqrt{3},\,1\right),\ E\left(2,\,-2\sqrt{3}\right)$;...]

46. È assegnato il triangolo ABC, le lunghezze dei cui lati AB, AC, BC, espresse rispetto ad una medesima unità di misura, sono nell'ordine: $3, 4, 5$.

a) Dopo aver riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le coordinate dei vertici del triangolo.

b) Trovare l'equazione della circonferenza γ circoscritta al triangolo.

c) Scelto uno dei punti in cui γ è intersecata dall'asse del segmento AB, trovare le coordinate dei punti L, H, K, proiezioni ortogonali del punto scelto sulle rette BC, CA, AB nell'ordine.

d) Verificare che i punti L, H, K sono situati sulla medesima retta (che, com'è noto [3], è chiamata *retta di Simson*).

47. È assegnato il triangolo ABC, le lunghezze dei cui lati AB, AC, BC, espresse rispetto ad una medesima unità di misura, sono nell'ordine: $6, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{5}$.

a) Dopo aver riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le coordinate dei vertici del triangolo.

b) Trovare quindi le coordinate dei seguenti nove punti:
- punti medi dei lati del triangolo;
- piedi delle altezze del triangolo;
- punti medi dei segmenti aventi ciascuno un estremo nell'ortocentro del triangolo e l'altro estremo in un vertice del triangolo.

c) Verificare che i nove punti suddetti sono situati su una medesima circonferenza (che, com'è noto, è chiamata [4] *circonferenza dei nove punti* o *di Feuerbach*)

[**R.** procedimento lungo e dispendioso, ma non concettualmente complicato]

48. Sono assegnate le circonferenze di equazioni:

$$x^2+y^2=1\,,\quad x^2+y^2-10x+21=0\,.$$

---

[3] Cfr.: Unità 29: Poligoni inscrivibili e circoscrivibili, N° 26 in sezione "verifiche".
[4] Cfr.: Unità 29: Poligoni inscrivibili e circoscrivibili, N° 27 in sezione "verifiche".

Trovare le equazioni delle rette che risultano tangenti ad entrambe.

$$\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\,,\ \ y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\,,\ \ y=\frac{\sqrt{6}}{12}(x+5)\,,\ \ y=-\frac{\sqrt{6}}{12}(x+5)\right]$$

49. Sono assegnati i punti $A_1(0,5), A_2(0,-5), A_3(6,1), A_4(-4,1), A_5(2,5), A_6(6,-1)$.

a) Verificare che sono situati su una medesima circonferenza.

b) Trovare le coordinate dei punti P, Q, R in cui s'intersecano rispettivamente le rette A_1A_2 e A_4A_5, le rette A_2A_3 e A_5A_6 e le rette A_3A_4 e A_6A_1.

c) Verificare che i punti P, Q, R sono situati sulla stessa retta.

[**R.** procedimento lungo e dispendioso, ma non concettualmente complicato]

[NOTA BENE. Questo esercizio esprime un caso particolare di un teorema generale scoperto da Pascal [5] e da lui denominato *teorema dell'esagramma mistico*, ma oggigiorno noto come *teorema di Pascal*. L'enunciato del teorema è il seguente: *Se un esagono* ABCDEF *è inscritto in una circonferenza e se le coppie di lati opposti* AB-DE, BC-EF, CD-FA *s'incontrano, allora i punti* P=AB∩DE, Q=BC∩EF, R=CD∩FA *sono allineati. La retta di questi punti* P, Q, R *è denominata* retta di Pascal.
Vedere anche i prossimi esercizi N° 50 e N° 51]

50. È assegnato l'esagono (concavo) ABCDEF i cui vertici hanno le seguenti coordinate:

$$A(0,0),\ \ B(3,-4),\ \ C(3,0),\ \ D(-1,-2),\ \ E(4,-2),\ \ F(0,-4).$$

a) Verificare che si trovano su una medesima circonferenza.

b) Trovare le equazioni delle rette dei lati AB, BC, CD, DE, EF, FA.

c) Verificare che sono allineati i tre punti in cui s'intersecano le tre coppie di lati opposti AB-DE, BC-EF, CD-FA.

51. È assegnato l'esagono (convesso) ABCDEF i cui vertici hanno le seguenti coordinate:

$$A(0,0),\ \ B(-1,-2),\ \ C(0,-4),\ \ D(4,-2),\ \ E(3,0),\ \ F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

a) Verificare che si trovano su una medesima circonferenza.

b) Trovare le equazioni delle rette dei lati AB, BC, CD, DE, EF, FA.

c) Verificare che sono allineati i tre punti in cui s'intersecano le tre coppie di lati opposti AB-DE, BC-EF, CD-FA.

52. Sono assegnati i punti aventi le seguenti coordinate:

$$A(5,0),\ \ B(3,4),\ \ C(0,5),\ \ D(-4,3),\ \ E(-4,-3),\ \ F(4,-3).$$

a) Verificare che si trovano su una medesima circonferenza.

b) Trovare le equazioni delle rette a, b, c, d, e, f, tangenti alla circonferenza rispettivamente nei punti A, B, C, D, E, F [vedere esercizio N° 5].

c) Determinare poi le coordinate dei punti P, Q, R, S, T, U tali che:

$$P=a\cap b,\ \ Q=b\cap c,\ \ R=c\cap d,\ \ S=d\cap e,\ \ T=e\cap f,\ \ U=f\cap a.$$

d) Verificare infine che le rette PS, QT, RU, congiungenti i vertici opposti dell'esagono PQRSTU, hanno un punto in comune.

[NOTA BENE. Questo esercizio esprime un caso particolare di un teorema, cosiddetto *duale del teorema di Pascal* (cfr.: precedenti esercizi 49-50-51). L'enunciato di questo teorema generale è il seguente: *Se un esagono* PQRSTU *è circoscritto ad una circonferenza, allora le rette* PS, QT, RU, *che congiungono i vertici opposti dell'esagono, passano per un medesimo punto*]

[5] **Pascal**, Blaise, pensatore francese, 1623-1665.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Di una circonferenza si chiede l'equazione in un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy). È vero che la conoscenza delle coordinate del suo centro fornisce una condizione sui coefficienti dell'equazione?
2. È vero che ogni equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$, dove a, b, c sono numeri reali, rappresenta una circonferenza in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy)?
3. Per tre punti distinti, comunque scelti, passa una circonferenza?
4. È vero che ogni circonferenza, considerata in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), ha equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$, dove a, b, c sono numeri reali?
5. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati una circonferenza mediante la sua equazione ed un punto mediante le sue coordinate. Ti viene richiesto di determinare le tangenti alla circonferenza condotte per il punto. Come pensi di procedere?
6. Per determinare le equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza condotte per un dato punto hai proceduto come descritto nella risposta al precedente interrogativo. Però, una volta ottenuta la risolvente del sistema delle equazioni della circonferenza e della retta, l'annullarsi del suo discriminante non dà luogo ad un'equazione di 2° grado bensì ad una di 1° grado. Concludi forse che per il punto si può condurre una sola tangente?
7. È vero che ogni circonferenza, considerata in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e avente equazione del tipo $x^2+y^2+ax+b=0$, dove a, b sono numeri reali, ha il centro sull'asse x?
8. È vero che ogni equazione del tipo $x^2+y^2+a=0$, dove a è un numero reale, rappresenta una circonferenza con centro nell'origine del sistema di riferimento cartesiano?
9. Sono assegnati il punto P(2,1) e la circonferenza k di equazione $x^2+y^2=9$. Trovare le coordinate del punto Q comune alla circonferenza k ed alla semiretta di origine O passante per P.

RISPOSTE.

1. No, le condizioni sono due. Se, infatti, si considera l'equazione della generica circonferenza, $x^2+y^2+ax+by+c=0$, e si indicano con x_C e y_C le coordinate del suo centro, risulta:
$$a=-2x_C,\ b=-2y_C.$$
2. Non sempre, ma solo se risulta $a^2+b^2-4c>0$.
3. No, se i tre punti sono allineati. Ma se non lo sono, per essi passa una ed una sola circonferenza.
4. Sì, è vero. Non è vero invece che ogni equazione del tipo considerato rappresenta una circonferenza, come spiegato nel punto precedente.
5. Si considera la generica retta passante per il punto, di equazione $y-q= m(x-p)$, dove (p,q) sono le coordinate del punto. Quindi si trova l'equazione risolvente (per esempio nella variabile x) del sistema delle equazioni di questa retta e della circonferenza. Si ottiene un'equazione di 2° grado in x. Si annulla il discriminante di questa equazione e, di norma, si ottiene un'equazione di 2° grado nell'incognita m. Se questa equazione in m ammette soluzioni (due reali e distinte o due reali e coincidenti), si trovano tali soluzioni e si sostituiscono nell'equazione della retta di cui sopra. Si ottengono così le equazioni delle due tangenti (distinte se il punto è esterno alla circonferenza o coincidenti se appartiene alla circonferenza). Qualora l'equazione di 2° grado in m non ammettesse soluzioni reali allora il punto sa-

rebbe interno alla circonferenza dal momento che per esso non si possono condurre tangenti alla circonferenza.

Nel caso in cui il punto P, per il quale si vuole condurre la tangente t alla circonferenza, appartiene alla circonferenza medesima, è preferibile un PROCEDIMENTO ALTERNATIVO. Precisamente, la retta t è la perpendicolare alla retta CP condotta per P, essendo C il centro della circonferenza.

6. Niente affatto. Si conclude invece che vi sono due tangenti: una corrispondente al valore di m che risolve l'equazione di 1° grado ottenuta; l'altra è la perpendicolare all'asse x condotta per il punto, la cui equazione, x=p, non rientra nella tipologia delle equazioni delle rette considerate.

7. È vero. Il centro di una tale circonferenza è infatti il punto di coordinate $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, che è precisamente un punto dell'asse x. Se, al contrario, nell'equazione mancasse il termine in x, il centro sarebbe sull'asse y.

8. È falso. Solo se a è un numero reale negativo l'equazione rappresenta una circonferenza, che in tal caso ha centro proprio nell'origine del sistema di riferimento.

9. Si può trovare l'equazione della retta OP, intersecarla con la circonferenza e, delle due soluzioni trovate, accettare quella adatta alla situazione. Procedimento lungo e noioso.

Oppure, molto più rapidamente, si può ricorrere al calcolo vettoriale, tenendo presente che risulta:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\, \overrightarrow{OP}\,.$$

In ogni caso si trova:

$$Q\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$