Equazioni polinomiali

Unità 43

Prerequisiti:

- Saper risolvere equazioni di 1° e 2° grado
- Conoscere e applicare la regola di Ruffini
- Conoscere e utilizzare le equazioni di parabola e circonferenza

L'unità è indirizzata al 2° biennio dei Licei.
È opzionale per Tecnici e Professionali.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *risolvere semplici equazioni polinomiali utilizzando la legge di annullamento del prodotto*
- *utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni*
- *impostare e risolvere semplici problemi che hanno come equazione risolvente un'equazione polinomiale*
- *risolvere analiticamente problemi riguardanti parabola e circonferenza*
- *esporre con proprietà gli sviluppi storici relativi alla ricerca delle formule risolutive delle equazioni di grado superiore al 2°*
- *esplicitare le aspettative riguardo alle possibili soluzioni di un problema ed individuare elementi di controllo da tenere presenti nel corso del processo risolutivo*

43.1 Equazioni in un'incognita di grado superiore al 2°.
43.2 Equazioni algebriche riconducibili ad equazioni di 1° e di 2° grado.
43.3 Interpretazione geometrica degli zeri reali di un polinomio.
43.4 Risoluzione approssimata di un'equazione.
43.5 Numeri algebrici e numeri trascendenti.
43.6 Nota storica.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

43.1 EQUAZIONI IN UN'INCOGNITA DI GRADO SUPERIORE AL 2°

43.1.1 La rappresentazione grafica di una parabola e una circonferenza nello stesso piano cartesiano implica la determinazione delle loro intersezioni e, di conseguenza, la risoluzione di un sistema di due equazioni di 2° grado in due incognite. Poiché l'equazione risolvente di un tale sistema è, di norma, un'equazione di 4° grado in un'incognita, si capisce come il problema non sia di semplice risoluzione. Anzi, possiamo dire che, almeno sulla base delle loro conoscenze, gli studenti di una scuola pre-universitaria non sono in grado di risolvere questo problema in generale, nel senso che possono rappresentare le due curve sullo stesso piano, ma senza la possibilità di determinare con esattezza le coordinate dei loro punti comuni. In qualche situazione particolare, tuttavia, il problema può essere risolto anche con le sole conoscenze fin qui acquisite. È proprio di questi casi particolari che vogliamo occuparci. Basta qualche esempio.

- PROBLEMA RISOLTO 1. In un piano sono assegnate una circonferenza k, il cui raggio è lungo 1, ed una parabola p che seca k nei punti A e B e passa per il suo centro C. Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta AC e la corda AB è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in k.

Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della circonferenza k;
b) determinare l'equazione della parabola p;
c) dimostrare analiticamente che p e k non hanno altri punti comuni oltre ad A e B e disegnarle sullo stesso piano.

RISOLUZIONE (Per i primi due punti si richiede la tua collaborazione. Noi ti forniamo solo il risultato).
Riferiamo il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che (Fig. 1): 1) l'origine O coincida col punto A; 2) l'asse x coincida con la retta AC, orientato da A verso C; 3) l'asse y coincida con la tangente alla circonferenza k in A (e quindi sia parallelo all'asse di simmetria della parabola p) orientato in maniera che la parabola p rivolga la concavità verso le y positive.

Risulta: $A(0,0);\ C(1,0);\ B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

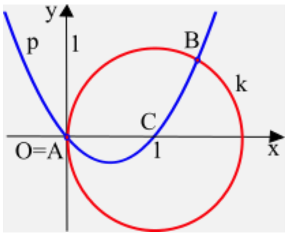

FIG. 1

a) L'equazione della circonferenza k è : $x^2+y^2-2x=0$.

b) L'equazione della parabola p è : $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-1)$.

c) Intersecando p con k si perviene alla seguente equazione risolvente in x:

[1] $$4\,x^4-8\,x^3+7\,x^2-6\,x=0.$$

Ora, tu non possiedi ancora gli elementi necessari per risolvere questa equazione, ma ti assicuriamo che essa può scriversi nella seguente forma equivalente:

$$x\,(2x-3)\,(2x^2-x+2)=0.$$

Cosa che, come vedremo più avanti, si ottiene con assoluta facilità, ma che fin da ora possiamo spiegare, ricorrendo però a qualche artificio. Basta infatti constatare che si ha:

$4x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 6x = x(4x^3 - 8x^2 + 7x - 6) = x(4x^3 - 2x^2 - 6x^2 + 4x + 3x - 6) =$

$= x[(4x^3 - 2x^2 + 4x) - (6x^2 - 3x + 6)] = x[2x(2x^2 - x + 2) - 3(2x^2 - x + 2)] = x(2x - 3)(2x^2 - x + 2).$

Volendo, è possibile controllare in altro modo l'equivalenza suddetta: basta sviluppare il prodotto al 1° membro dell'ultima equazione e constatare che è uguale al polinomio al 1° membro dell'equazione [1].

L'ultima equazione è facilmente risolvibile. In effetti, essa ammette le sole soluzioni reali:

$$x = 0\,,\ \ x = 3/2$$

ottenute utilizzando la legge di annullamento di un prodotto, in base alla quale dall'equazione precedente si ricava:

$$x=0,\ \ 2x-3=0,\ \ 2x^2-x+2=0.$$

Ciò prova che p non interseca k oltre che in A e B (Fig. 1). Cosa che peraltro s'intuisce bene dalla rappresentazione grafica.

- PROBLEMA RISOLTO 2. In un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri la parabola di equazione: $y=x^2+\sqrt{3}\,x+1$. Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si disegnino le due curve sullo stesso piano, dopo aver determinato i loro punti comuni.

RISOLUZIONE. La parabola, che volge la concavità verso le y positive, interseca l'asse y nel punto A(0,1) ed ha il vertice nel punto $V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$. Troviamo le due rette tangenti alla parabola passanti per O. La generica retta per O ha equazione $y=mx$, dove m è un parametro reale. Consideriamo il sistema di questa equazione e di quella della parabola. La sua risolvente in x è:

$$x^2 + \left(\sqrt{3} - m\right)x + 1 = 0.$$

Affinché retta e parabola siano tangenti occorre che il discriminante D di questa equazione sia nullo. Siccome $D=\left(\sqrt{3}-m\right)^2-4$, risulta $D=0$ per $\sqrt{3}-m=\pm 2$, ossia $m=\sqrt{3}\pm 2$. Cosicché le due rette tangenti cercate hanno le seguenti equazioni: $y=\left(\sqrt{3}-2\right)x,\ y=\left(\sqrt{3}+2\right)x$.

La prima tocca la parabola nel punto $A\left(-1,\,2-\sqrt{3}\right)$, la seconda la tocca nel punto $B\left(1,\,2+\sqrt{3}\right)$.

Troviamo la circonferenza passante per i punti O, A, B. La sua equazione è del tipo:

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0.$$

Imponendo l'appartenenza ad essa dei tre punti suddetti, si ottengono le seguenti condizioni per i coefficienti a, b, c:

$$c=0,\quad 1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2-a+\left(2-\sqrt{3}\right)b+c=0,\quad 1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2+a+\left(2+\sqrt{3}\right)b+c=0;$$

dopo aver risolto il sistema di queste tre equazioni nelle incognite a, b, c, si ricava: $a=0,\ b=-4,\ c=0$.

Pertanto la circonferenza ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

La parabola e la circonferenza si secano certamente nei punti A e B. Possono avere al più altri due punti in comune. Per controllarlo dobbiamo risolvere il sistema delle loro equazioni, trovando per prima cosa l'equazione risolvente di questo sistema. Essa è la seguente equazione in x:

$$x^2 + \left(x^2 + \sqrt{3}\,x + 1\right)^2 - 4\left(x^2 + \sqrt{3}\,x + 1\right) = 0$$

ossia, dopo aver semplificato:

[2] $$x^4 + 2\sqrt{3}\,x^3 + 2\,x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 3 = 0\,.$$

Quest'equazione ha sicuramente come radici il numero -1 (ascissa di A) e il numero 1 (ascissa di B). Pertanto, ricorrendo allo schema di Ruffini, si può mettere nella forma equivalente:

$$(x+1)(x-1)\left(x^2+2\sqrt{3}\,x+3\right)=0\,.$$

Cosicché le sue radici, in virtù della legge dell'annullamento di un prodotto, sono quelle delle equazioni:

$$x+1=0,\quad x-1=0,\quad x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0.$$

Le prime due, lo ripetiamo, sono -1 e 1. Le altre si ottengono risolvendo l'ultima equazione. Si trovano due radici coincidenti con il valore $x=-\sqrt{3}$, cui corrisponde $y=1$. Ne deriva che la parabola e la circonferenza risultano tangenti nel punto $C\left(-\sqrt{3},1\right)$. Le due curve sono disegnate in figura 2.

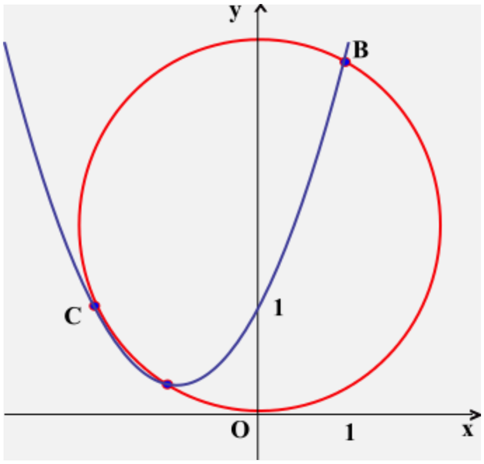

FIG. 2

43.1.2 Le precedenti equazioni in un'incognita, [1] e [2], sono casi particolari della seguente equazione polinomiale in x, con coefficienti reali:

[3] $$\mathbf{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0},$$

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri reali con $a_0\neq0$.

L'equazione è detta anche **equazione algebrica** di ***grado*** n. Più in generale:

Si chiama *equazione algebrica* ogni equazione riconducibile alla forma [3] con un numero finito di addizioni, moltiplicazioni o elevamenti a potenza con esponente naturale.

Evidentemente quando $n=1$ oppure $n=2$ si hanno equazioni algebriche rispettivamente di 1° oppure di 2° grado. Sull'argomento ormai dovresti essere diventato un esperto.

Quando $n>2$ occorre distinguere due casi, secondo che sia $n\leq4$ oppure $n>4$.

Ora, un'analisi approfondita dell'argomento esula dai limiti del nostro programma. Tuttavia, per una migliore conoscenza della questione ti rimandiamo alla "nota storica" (n. 43.6).

Qui ci limitiamo a trarre le conclusioni, seppure espresse in termini grossolani:

Mentre esistono formule risolutive delle equazioni algebriche dei primi 4 gradi, non ne esistono per quelle di grado superiore al 4º.

Come abbiamo già detto, non tratteremo dei casi generali quando $n>2$, ma solo di alcune equazioni particolari, la cui risoluzione può essere ricondotta a quella di equazioni dei primi due gradi, senza scomodare le formule risolventi delle equazioni di 3° e 4° grado.

43.2 EQUAZIONI ALGEBRICHE RICONDUCIBILI AD EQUAZIONI DI 1° E 2° GRADO

43.2.1 Indichiamo con P(x) il polinomio al 1° membro della [3], vale a dire:

$$P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \dots + a_{n-1}\, x + a_n$$

e ammettiamo che risulti, tanto per fissare le idee: $P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot P_3(x)$, dove $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ sono polinomi in x con coefficienti in ℝ. L'equazione [3] è allora equivalente a quest'altra:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) = 0.$$

Pertanto, in virtù della legge di annullamento del prodotto, le soluzioni della [3] sono date dalle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$P_1(x) = 0,\quad P_2(x) = 0,\quad P_3(x) = 0.$$

Se sappiamo risolvere queste sappiamo risolvere pure la [3].

Il discorso non cambia se P(x) fosse scomposto in un numero diverso di polinomi. A questo punto è chiaro che il problema consiste nel fattorizzare P(x) in polinomi di 1° e 2° grado. In generale non siamo in grado di farlo. La cosa è possibile, tuttavia, in alcuni casi particolari. Precisamente quando il polinomio P(x), di grado n, ha coefficienti interi ed almeno $n-2$ zeri [1] razionali. Ciò perché sappiamo calcolare questi zeri; per tentativi, ma li sappiamo calcolare. Vale infatti la seguente proprietà.

PROPRIETÀ. Gli **zeri razionali** di un polinomio di grado n con coefficienti interi appartengono all'insieme dei numeri razionali rappresentati dalle frazioni, ciascuna presa col doppio segno, aventi al numeratore un divisore del termine noto del polinomio e al denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado n.

DIMOSTRAZIONE [2]. Ci limitiamo al caso di un polinomio di 3° grado. Del resto il ragionamento è lo stesso qualunque sia il grado del polinomio.

Consideriamo allora un generico polinomio di 3° grado in x, con coefficienti interi:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3\,,$$

dove a_0, a_3 sono diversi da 0.

Dimostriamo anzitutto che, se il polinomio ammette lo zero razionale $\mathbf{m/n}$, dove m ed n sono interi non nulli primi fra loro, allora m è un divisore di a_3 ed n lo è di a_0.

Infatti, se m/n è uno zero del polinomio, risulta:

$$a_0\left(\frac{m}{n}\right)^3 + a_1\left(\frac{m}{n}\right)^2 + a_2\left(\frac{m}{n}\right) + a_3 = 0$$

da cui, dopo alcuni calcoli, segue:

$$a_0m^3 = -n(a_1m^2 + a_2mn + a_3n^2) \quad \text{oppure} \quad a_3n^3 = -m(a_0m^2 + a_1mn + a_2n^2).$$

Siccome in ciascuna di queste due uguaglianze le espressioni che figurano in parentesi sono numeri interi, si desume:

- dalla prima uguaglianza che n è un divisore di a_0m^3;
- dalla seconda che m è un divisore di a_3n^3.

Ma m ed n sono numeri primi fra loro; per cui:

- n non può dividere m^3 e perciò deve dividere a_0;
- m non può dividere n^3 e perciò deve dividere a_3.

Pertanto gli eventuali zeri razionali del polinomio sono rappresentati dalle frazioni, ciascuna considerata col doppio segno, aventi al numeratore un divisore di a_3 e al denominatore un divisore di a_0. [c.v.d.]

[1] **Zero** di una funzione f(x) – in particolare di un polinomio – è ogni numero a per cui f(a)=0.

[2] Opzionale.

43.2.2 Ammettiamo allora che gli zeri di un polinomio di grado n siano in numero di n−2 e supponiamo che siano i numeri razionali $q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$ non necessariamente distinti. Osserviamo che risulta:

$$P(x) = (x - q_1) \cdot (x - q_2) \cdot \ldots \cdot (x - q_{n-2}) \cdot (a\,x^2 + b\,x + c),$$

dove i coefficienti a, b, c si possono determinare ricorrendo al noto schema di Ruffini, ripetuto più volte se occorre. È adesso evidente che $q_1, q_2, \dots, q_{n-2}$ e le soluzioni dell'equazione di 2° grado, $ax^2+bx+c=0$, sono proprio le soluzioni dell'equazione $P(x)=0$. Dunque l'equazione [3] ha al più n soluzioni razionali.

Ti proponiamo qualche esercizio in merito a questa proprietà.

1. Considerata l'equazione $x^{33}+x-3=0$, spiega perché non può avere zeri razionali.
2. Considerata l'equazione $x^{44}-x^3+x-1=0$, spiega perché ha uno zero razionale ed uno soltanto.
3. Trova gli zeri razionali dell'equazione $2x^3-x^2-5+3=0$.
4. L'equazione $x^3+ax+a-1=0$, dove a è un numero reale, ammette la radice 1/2. È vero che non ammette altre radici reali?
5. Per quali dei seguenti binomi è divisibile il polinomio x^4-x^3-2x-4 ?
   [A] $x-3$ [B] $x+1$ [C] $x-2$ [D] $x+5$ [E] $2x+1$ [F] $2x-1$.
6. Sono date le due seguenti equazioni:
   $$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0, \quad 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0.$$
   Verificare che hanno in comune due soluzioni reali e due soltanto.
7. É data la seguente equazione: $x^3+3x^2+2x+6=0$.
   a) Verificare che ammette una sola radice reale.
   b) Costruire un'equazione di 3° grado in x, le cui radici si ottengono aumentando di 3 ciascuna delle radici dell'equazione assegnata.

Bisogna aggiungere che la conclusione che l'equazione [3] abbia al più n soluzioni razionali, è un caso particolare del seguente teorema:

Ogni equazione algebrica di grado n con coefficienti reali ha *al più* n soluzioni reali, alcune delle quali eventualmente coincidenti.

Per esempio:

- l'equazione $x^4=0$, di 4° grado, ha la soluzione 0 contata 4 volte;
- l'equazione $(x+1)^3\left(x-\sqrt{2}\right)^2=0$, di 5° grado, ha la soluzione −1 contata 3 volte e la soluzione $\sqrt{2}$ contata 2 volte;
- l'equazione $(x-1)(x^2+1)=0$, di 3° grado, ha in $\mathbb{R}$ la sola soluzione 1.

NOTA BENE. Se per una ragione qualsiasi si sa che uno zero del polinomio P(x) è per esempio $\sqrt{2}$, allora chiaramente $P(x)=(x-\sqrt{2})\cdot Q(x)$, dove Q(x) si può determinare ricorrendo ancora allo schema di Ruffini. E così in casi analoghi.

Su questa base, prova a risolvere le seguenti equazioni, dopo aver verificato che i numeri indicati a fianco di esse ne sono delle soluzioni:

a) $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + x - \sqrt{3} = 0, \quad \sqrt{3}$.

b) $2\,x^3 - \left(4+\sqrt{2}\right)x^2 - 2\left(4-\sqrt{2}\right)x + 4\sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{2}/2$.

c) $x^4 + x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 2 = 0, \quad \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

43.2.3 Risolviamo adesso un esercizio che, mentre riassume quanto detto sopra circa la risoluzione di particolari equazioni polinomiali, nello stesso tempo chiarisce il procedimento che ci ha permesso di risolvere le precedenti equazioni [1] e [2].

- ESERCIZIO. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione: $2\,x^4 + x^3 - 17\,x^2 - 4\,x + 6 = 0$.

RISOLUZIONE. Se il polinomio al primo membro dell'equazione ha zeri razionali, questi sono da ricercare tra le frazioni, ciascuna presa col doppio segno, aventi al numeratore un elemento dell'insieme D(6) dei divisori di 6 e al denominatore un elemento dell'insieme D(2) dei divisori di 2.

Siccome $D(6)=\{1,2,3,6\}$ e $D(2)=\{1,2\}$, i numeri razionali tra cui ricercare sono i seguenti:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ \frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\,.$$

Dopo qualche tentativo, si trova che -3 e $1/2$ sono zeri del polinomio suddetto. Pertanto possiamo ricorrere due volte allo schema di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -17 & -4 & 6 \\ -3 & & -6 & 15 & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 2 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

si ottiene:

$$2\,x^4 + x^3 - 17\,x^2 - 4\,x + 6 = (x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2\,x^2 - 4\,x - 4).$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono dunque -3 e $1/2$ e inoltre le soluzioni reali dell'equazione $2x^2-4x-4=0$, vale a dire: $1\pm\sqrt{3}$.

In definitiva le soluzioni cercate sono le seguenti: $-3,\ \frac{1}{2},\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}$.

43.2.4 Adesso ti mettiamo alla prova. Per questo ti proponiamo, per prima cosa, di ritornare sugli esercizi [1] e [2] e di verificare che, nella risoluzione delle equazioni di 4° grado che vi figurano, abbiamo operato correttamente e, poi, di completare le parti mancanti nella risoluzione del seguente esercizio.

- ESERCIZIO. Tra le parabole di equazione: $y=-x^2+ax+b$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), determinare quella che tocca la circonferenza di equazione: $x^2+y^2=5$ nel punto di ascissa 1, situato nel 1° quadrante. Disegnare le due curve sullo stesso piano, dopo aver trovato gli altri eventuali punti comuni ad esse.

RISOLUZIONE (guidata). Indicato con A il punto della circonferenza c, situato nel 1° quadrante ed avente ascissa 1 e, di conseguenza, ordinata positiva, si trova A(1,2). La parabola p cercata non solo deve passare per A, ma deve anche essere tangente in A alla circonferenza c.

Ora, il fatto che A appartenga a p implica: $b=3-a$. Quindi la parabola p è del tipo:

(a) $$y = -x^2 + a\,x + 3 - a\,.$$

Da qui in poi si può procedere in due modi:

1) Le due curve, essendo tangenti in A, hanno in A la stessa retta tangente t. Sicché, dapprima si trova t come retta tangente alla circonferenza c in A. Poi, tra le parabole di equazione (a) si determina quella che ha come tangente t.
2) Tra i punti comuni alla parabola p ed alla circonferenza c, il punto A è contato almeno due volte. Sicché, una volta trovata la risolvente in x del sistema delle equazioni delle due curve, questa deve ammettere la soluzione x=1 almeno due volte.

Lasciamo a te il compito di sviluppare completamente il 1° procedimento e andiamo ad occuparci del 2°.

Troviamo, allora, la risolvente di questo sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=-x^2+a\,x+3-a \end{cases}$$

Dopo alcune elaborazioni si ottiene la seguente equazione:

$$x^4-2\,a\,x^3+(a^2+2\,a-5)\,x^2+(-2\,a^2+6\,a)\,x+(a^2-6\,a+4)=0.$$

Avendo già imposto che alla parabola p appartenga lo stesso punto A che già appartiene alla circonferenza c, quest'equazione certamente ammette la soluzione $x=1$. E, difatti, ricorrendo allo schema di Ruffini, si trovano, oltre alla soluzione $x=1$, altre soluzioni provenienti dall'equazione seguente:

$$x^3+(-2\,a+1)\,x^2+(a^2-4)\,x+(-a^2+6\,a-4)=0.$$

Ma, per le ragioni prima addotte, quest'equazione deve ammettere ancora la soluzione $x=1$. Sostituendo allora 1 al posto di x in essa, tale equazione deve essere soddisfatta. Vale a dire che deve risultare:

$$1+(-2\,a+1)+(a^2-4)+(-a^2+6\,a-4)=0;$$

da qui segue: $a=3/2$. La parabola p ha pertanto la seguente equazione:

$$y=-x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Per determinare le altre eventuali intersezioni fra p e c, basta riprendere l'equazione di 3° grado in x che avevamo lasciato e sostituire in essa il valore 3/2 al posto di a. Si ottiene:

$$4\,x^3-8\,x^2-7\,x+11=0.$$

Essa ammette, come sappiamo, la soluzione 1. Per cui si può ricorrere ancora allo schema di Ruffini. Si trovano, oltre alla soluzione $x=1$, le soluzioni dell'equazione: $4x^2-4x-11=0$.

Per queste ultime si trova: $x=\dfrac{1\pm 2\sqrt{3}}{2}$.

Quindi la parabola p tocca la circonferenza c in A e la interseca ulteriormente in altri due punti B e C (Fig. 3) tali che:

$$x_B=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\ (\approx 2{,}23),\quad y_B=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\ (\approx -0{,}13);$$
$$x_C=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\ (\approx -1{,}23),\quad y_C=\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\ (\approx -1{,}87).$$

Osserviamo infine che la circonferenza ha centro in O e raggio $\sqrt{5}$ e che la parabola ha vertice nel punto $V\left(\frac{3}{4},\frac{33}{16}\right)$.

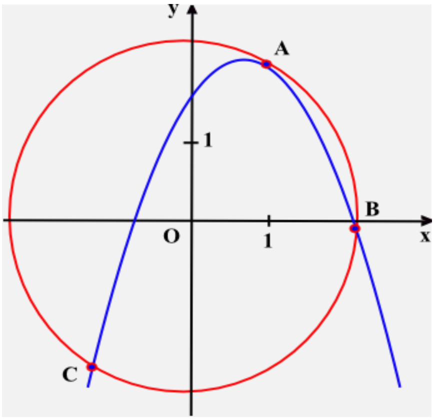

FIG. 3

43.3 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEGLI ZERI REALI DI UN POLINOMIO

43.3.1 Consideriamo la seguente equazione in x: f(x)=0. Le sue soluzioni in ℝ, interpretate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), possono essere pensate come le ascisse dei punti in cui la curva di equazione y=f(x) interseca l'asse x, di equazione y=0 (Fig. 4).
Tali soluzioni si dicono, come detto altre volte, ***zeri reali*** della funzione f(x).
Questo significa, ovviamente, che se f(x) è un polinomio in x di grado n, il suo grafico ha al più n punti in comune con l'asse x. Come abbiamo già spiegato, noi non siamo in grado di trovare le ascisse esatte di questi punti se non in casi particolari.

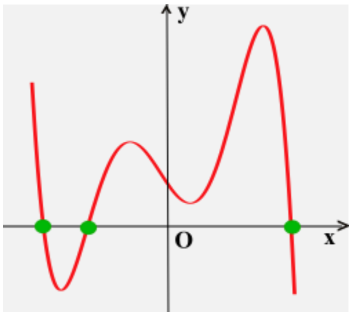

FIG. 4

43.3.2 Il discorso sulle intersezioni del grafico del polinomio f(x) di grado n con l'asse x, al quale sopra abbiamo accennato, si generalizza alle intersezioni con una retta qualunque di equazione y=px+q. Queste intersezioni sono ovviamente i punti, le cui coordinate sono le soluzioni (x,y) del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = p\,x + q \end{cases}$$

La risoluzione del quale è ricondotta chiaramente a quella della sua risolvente in x:

$$f(x) = p\,x + q.$$

Questa equazione è evidentemente di grado n e perciò ha al più n soluzioni in ℝ. Come dire:

Il grafico di un polinomio di grado n è intersecato da una retta <u>al più</u> in n punti.

Avremo occasione di ritornare su questa faccenda nel prosieguo degli studi, quando ci occuperemo in maniera più approfondita dello studio di una funzione f(x).
Ma fin d'ora riteniamo utile qualche considerazione supplementare.

- Un generico polinomio di 1° grado assume la forma seguente:
$$P_1(x) = a_0x + a_1$$
e si constata che presenta due parametri: $a_0,\ a_1$. Sono necessarie pertanto due condizioni indipendenti per determinare il polinomio. Il che, sul piano geometrico, significa, per esempio, che sono necessari due punti distinti per determinare una retta non parallela all'asse delle ordinate.
- Un generico polinomio di 2° grado assume la forma seguente:
$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
e si constata che presenta tre parametri: $a_0,\ a_1,\ a_2$. Sono necessarie pertanto tre condizioni indipendenti per determinare il polinomio. Il che, sul piano geometrico, significa, per esempio, che sono necessari tre punti distinti (ma in posizioni non particolari) per determinare una parabola avente

l'asse parallelo all'asse delle ordinate.

- Un generico polinomio di grado n assume la forma seguente:
$$P_2(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
e si constata che presenta $n+1$ parametri: $a_0,\ a_{1,}\ \dots, a_{n-1},\ a_n$. Sono necessarie pertanto $n+1$ condizioni indipendenti per determinare il polinomio. Ed anche questo ha un significato geometrico. Per esempio, volendo determinare un polinomio di 4° grado, sono necessarie 5 condizioni e queste potrebbero essere le ascisse dei 4 punti in cui il grafico del polinomio interseca l'asse delle ascisse e l'ordinata del punto in cui tale grafico interseca l'asse delle ordinate. In particolare, se questi punti sono $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(3,0)$, $D(4,0)$, $E(0,1)$, in virtù delle prime 4 condizioni il polinomio assume la seguente forma:
$$y=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$
In virtù dell'ultima condizione deve risultare poi:
$$1=a(-1)(-2)(-3)(-4),\ \text{ da cui segue: } a=\frac{1}{24}\ .$$
Il polinomio cercato è pertanto il seguente:
$$y = \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ .$$
- Un caso complicato ma meno di quanto si possa credere.
Si vuole determinare il polinomio di 4° grado $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ sapendo che si ha:
$$P(1)=1,\ \ P\left(\sqrt{2}\right)=2,\ \ P(3)=9,\ \ P\left(2\sqrt{2}\right)=8\,.$$
Imponendo le condizioni poste, si ottengono 4 equazioni nelle incognite a, b, c, d. Risolvendo il loro sistema si trovano i loro valori e di conseguenza l'espressione del polinomio. Generalmente bisogna procedere in questo modo, con le complicazioni che ciò comporta. Lasciamo a te il compito di seguire questo procedimento, magari servendoti dell'ausilio di un idoneo software matematico.
A noi preme però sottolineare un procedimento più semplice che si può applicare però solamente in questa situazione particolare. Bisogna constatare che i valori assunti dal polinomio: 1, 2, 9, 8 sono esattamente i quadrati dei valori attribuiti all'indeterminata: $1, \sqrt{2}, 3, 2\sqrt{2}$. Il che è come dire che in tali x il polinomio P(x) assume i valori x^2 e, di conseguenza, tali x sono zeri del polinomio $Q(x)=P(x)-x^2$. Si ha pertanto:
$$Q(x) = (x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-3)\left(x-2\sqrt{2}\right)$$
ossia:
$$P(x) - x^2 = (x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-3)\left(x-2\sqrt{2}\right)$$
da cui, dopo alcuni calcoli, segue:
$$P(x) = x^4 - \left(4+3\sqrt{2}\right)x^3 + 4\left(2+3\sqrt{2}\right)x^2 - \left(16+9\sqrt{2}\right)x + 12\,.$$

43.4 RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN'EQUAZIONE

43.4.1 Di un'equazione polinomiale, ma più in generale di un'equazione qualsiasi, di norma non siamo in grado di determinare le soluzioni reali esatte: questo lo sappiamo fare in molti casi, è vero, ma essi costituiscono una piccolissima parte, di fatto trascurabile, nell'insieme delle equazioni. Siamo però sempre in grado di determinare, di un'equazione, le sue soluzioni approssimate. Ce ne vogliamo occupare qui.

Per la verità, esiste più di un metodo di risoluzione approssimata di un'equazione ed oggi questo ha particolare interesse per chi deve programmare software matematici. Per chi, tuttavia, utilizza tali software, un metodo vale l'altro: basta comprendere come funzionino le cose, anche se a grandi linee. Per questo noi descriveremo un solo metodo, quello che a nostro avviso è il più semplice da capire. Si tratta del cosiddetto **metodo di dimezzamento** (o **di bisezione**).

Ad ogni buon conto, in seguito [3], quando avrai acquisito gli strumenti matematici necessari forniremo un altro metodo di approssimazione.

All'atto pratico, servendosi di uno strumento di calcolo automatico che utilizzi un apposito software matematico, è sufficiente immettere l'equazione e lo strumento fornisce le soluzioni approssimate (a volte anche quelle esatte, quando ci sono).

43.4.2 Sia allora l'equazione: $f(x)=0$. Se ne ricerca una radice x_0 con un'approssimazione prefissata.

Supponiamo disegnato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) il grafico della funzione $y=f(x)$ (Fig. 5). La radice x_0 è chiaramente l'ascissa di uno dei punti in cui questo grafico interseca l'asse x.

Scegliamo un conveniente intervallo in cui sia contenuta x_0 (ed essa soltanto, nell'eventualità di altre radici di $f(x)=0$): lo chiamiamo [a,b] e deve essere tale che $f(a)\cdot f(b)<0$. Per fissare le idee supponiamo che sia $f(a)>0$ ed $f(b)<0$ (Fig. 5).

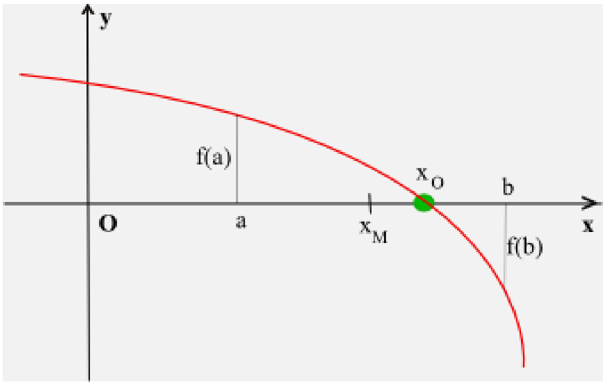

FIG. 5

Calcoliamo l'ascissa x_M del punto medio di [a,b]: $x_M = \frac{a+b}{2}$.

Se $f(x_M)=0$ è chiaro che $x_0=x_M$; altrimenti:

- se $f(a)\cdot f(x_M)>0$ (come in fig. 5), poniamo x_M al posto di a;
- se $f(a)\cdot f(x_M)<0$, poniamo x_M al posto di b;
- ripetiamo la procedura eseguita su [a,b] col calcolo del punto medio del nuovo intervallo e continuiamo così fintantoché l'intervallo, che passo dopo passo si restringe, rimane di ampiezza superiore alla precisione prestabilita, ad esempio 10^{-3}.

Si può affermare che il valore approssimato di x_0 è l'ultimo x_M trovato. Infatti – indicato per comodità ancora con [a,b] l'ultimo intervallo – risulta chiaramente: $|x_0-x_M| < |b-a| < 10^{-3}$.

Detto per inciso, hai tutti gli elementi per scrivere in Notazione Lineare Strutturata l'algoritmo che risolve il problema di determinare una soluzione approssimata di un'equazione, con un'approssimazione prestabilita. Ti invitiamo a farlo.

[3] Cfr.: Unità 69: Estremi assoluti di una funzione, n. 69.3

Ti proponiamo inoltre per esercizio di trovare le radici reali approssimate delle seguenti equazioni, con una precisione di 10^{-2}, servendoti però di uno strumento di calcolo automatico che utilizzi un idoneo software matematico:

1. $x^3+3x^2+1=0$, con $x\in\mathbb{R}$. [**R.** 1 sol.: $-3,10$]
2. $x^3-7x^2+5x+5=0$, con $-1<x<2$. [**R.** 2 sol.: $-0,55$; $1,51$]
3. $x^4+3x^3-5=0$, con $-1<x<1$. [**R.** 0 sol.]
4. $2x^4+5x^3-5x-1=0$, con $-2<x<2$. [**R.** 4 sol.: $-1,85$; $-1,39$; $-0,21$; $0,94$]
5. $x^5-5x^2+1=0$, con $-2<x<2$. [**R.** 3 sol.: $-0,44$; $0,45$; $1,67$]
6. $5x^5-15x^3+10x+1=0$, con $0<x<2$. [**R.** 2 sol.: $1,11$; $1,35$]

43.4.3 Il metodo di bisezione, pur con i suoi limiti, va bene se la funzione $f(x)$ è assegnata in forma analitica. Non va più bene se essa è invece una funzione empirica, della quale si conoscono soltanto le determinazioni $f(x_i)$ in un certo numero di punti x_i. In tal caso bisogna ricorrere ad altri metodi di approssimazione. Uno di essi, il più semplice, è il **metodo di approssimazione lineare**.

In base a questo metodo, si prendono due punti successivi nella sequenza di punti $\big(x_i, f(x_i)\big)$ che definiscono la funzione empirica $y=f(x)$, ad esempio i punti $\big(x_k, f(x_k)\big)$ e $\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$ e si scrive l'equazione della retta passante per essi:

$$\frac{y-f(x_k)}{f(x_{k+1})-f(x_k)}=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}.$$

Il valore $f(x_0)$ che la funzione assume in un punto x_0 compreso fra x_k e x_{k+1} non è conosciuto, ma se se ne vuole una stima, essa può essere ottenuta sostituendo x_0 al posto di x nella precedente equazione e calcolando il corrispondente valore di y.

Se poi si vuole trovare una stima di uno zero della funzione, bisogna individuare due valori, x_k e x_{k+1}, tali che $f(x_k)\cdot f(x_{k+1})<0$ e, dopo aver posto $y=0$ nella precedente equazione, risolvere l'equazione in x che così si ottiene.

- ESERCIZIO. La funzione empirica $y=f(x)$ sia definita dalla seguente tabella (Tab. 1). Stimare: a) quale valore assume nel punto $x_0=2,4$; b) qual è il suo zero compreso fra 1,3 e 1,9.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,0	0,5	1,3	1,9	2,3	2,8	3,2	3,8	4,1
$f(x_i)$	$-0,4$	$-1,25$	$-1,06$	1,83	1,83	0,74	$-0,71$	$-0,49$	0,88

TAB. 1

RISOLUZIONE.

a) Considerato che il punto 2,4 è compreso fra i valori 2,3 e 2,8 cui corrispondono in valori 1,83 e 0,74 della funzione, si tratta preliminarmente di trovare l'equazione della retta passante per i punti $(2,3;\ 1,83)$ e $(2,8;0,74)$. Essa è la seguente:

$$\frac{y-0,74}{1,83-0,74}=\frac{x-2,8}{2,3-2,8}.$$

Sostituendo 2,4 al posto di x e risolvendo rispetto ad y, si trova: $y(2,4)\approx1,61$.

b) Bisogna trovare l'equazione della retta passante per i punti $(1,3;-1,06)$ e $(1,9;1,83)$. È la seguente:

$$\frac{y-1,83}{-1,06-1,83}=\frac{x-1,9}{1,3-1,9}.$$

Ponendo $y=0$ e risolvendo rispetto ad x, si trova una stima dello zero cercato: $x\approx1,5$.

Può essere interessante rappresentare in un piano cartesiano i punti assegnati della funzione e quelli che si stima possano essere i punti approssimati mediante un'interpolazione lineare. Per questo è sufficiente rappresentare i punti assegnati e congiungerli con dei segmenti di retta, ottenendo chiaramente una spezzata (Fig. 6).

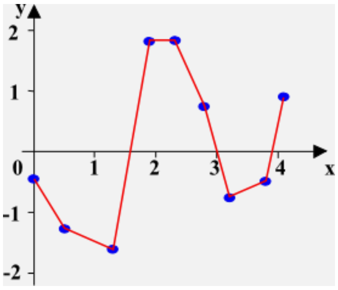

FIG. 6

Per concludere, sempre con riferimento alla stessa funzione, ti proponiamo per esercizio di stimare:

a) quale valore assume la funzione nei punti 0,7 e 3,1;
b) qual è il suo zero compreso fra i valori 2,8 e 3,2.

43.5 NUMERI ALGEBRICI E NUMERI TRASCENDENTI

Riprendiamo in considerazione la più generale equazione algebrica di grado n, che per comodità riscriviamo qui appresso:

$$\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0}$$

dove i coefficienti a_i (con $a_0 \neq 0$) sono numeri reali qualsiasi. Se tali coefficienti sono in particolare numeri razionali, è possibile moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per il massimo comune divisore dei coefficienti. In questo modo l'equazione diventa a coefficienti interi. Ebbene tali equazioni svolgono un ruolo importante in matematica. Si hanno precisamente le seguenti definizioni:

- Un numero reale (o complesso) si dice **algebrico** se esiste qualche equazione algebrica a coefficienti interi di cui esso sia soluzione.
- Un numero reale (o complesso) si dice **trascendente** se non esiste alcuna equazione algebrica a coefficienti interi di cui esso sia soluzione.

Per esempio, i numeri 0, 1, l'unità immaginaria i sono numeri algebrici. Basta constatare che sono soluzioni rispettivamente delle seguenti equazioni algebriche a coefficienti interi:

$$x = 0; \quad x - 1 = 0, \quad x^2 + 1 = 0.$$

ESERCIZIO. Spiegare perché ogni numero razionale è un numero algebrico.

Sulla dimostrazione dell'esistenza di numeri trascendenti non possiamo soffermarci a questo livello di studi [4]. Ci limitiamo a dire che essi, contrariamente a quanto si possa pensare, sono in quantità enorme, addirittura maggiore dei numeri algebrici. Anzi questi sono in quantità trascurabile rispetto ai numeri trascendenti. Al momento noi abbiamo avuto occasione di incontrare un solo numero trascendente: il numero $\boldsymbol{\pi}$. Ne incontreremo altri strada facendo.

Ti proponiamo adesso un indovinello. L'autore David Blatner, nel suo libriccino *Le gioie del* π, Milano,

[4] Il contributo decisivo alla soluzione del problema dell'esistenza di numeri trascendenti si ebbe nel 1882 ad opera del matematico tedesco **Louis Carl Ferdinand von Lindemann** (1852-1939).

Garzanti libri, cita a pag. 19 il seguente passo del libro *Mathematics and the Imagination* di Edward Kasner e James Newman: «*Quando i filosofi greci trovarono che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, celebrarono questa scoperta con un'ecatombe (il sacrifico di 100 buoi). La scoperta molto più profonda che è un numero trascendente merita un sacrificio maggiore*». Non trovi che ci sia un errore? Sapresti individuarlo?

43.6 NOTA STORICA

43.6.1 La risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado avvenne per merito di un gruppo di matematici italiani, noti come gli **algebristi italiani del Cinquecento**. Qui offriamo una rapida sintesi degli sviluppi storici che hanno portato a quella scoperta.

Fu il bolognese **Scipione Dal Ferro** (1465-1526) che, per primo, risolse le equazioni dei tre tipi:

$$x^3 + p\,x = q\,, \qquad x^3 = p\,x + q\,, \qquad x^3 + q = p\,x\,,$$

dove p, q sono numeri reali positivi.

Egli, però, non pubblicò la sua scoperta, pur avendone parlato con amici, come risulta da documenti inconfutabili.

Il risultato fu riscoperto nel 1535 dal bresciano **Tartaglia** (1505 ca. – 1557), soprannome di Niccolò Fontana [(5)], il quale comunicò successivamente la formula trovata al matematico milanese **Gerolamo Cardano** (1501 ca. – 1576) con l'impegno, da parte di quest'ultimo, che non l'avrebbe divulgata. Ma Cardano, nel 1545, pubblicò la formula risolutiva dell'equazione di 3° grado nel suo celebre trattato ***Ars Magna***, (*La Grande Arte*) pur attribuendo a Tartaglia il merito della scoperta.

L'*Ars Magna* contiene anche il metodo di **Ludovico Ferrari** (1522-1565), discepolo di Cardano, circa la risoluzione di un'equazione generale di 4° grado, basata su una riduzione di questa ad un'equazione di 3° grado, denominata ***risolvente cubica di Ferrari***.

La regola scoperta da Dal Ferro, riscoperta poi da Tartaglia, ma pubblicata per la prima volta da Cardano, riferita all'equazione:

$$x^3 + p\,x = q\,,$$

è sintetizzabile nella formula seguente, detta ***formula di Cardano***:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}\,.$$

Vogliamo illustrarne un'applicazione ai seguenti tre casi particolari:

$$x^3 + 6\,x = 20, \qquad x^3 + 9\,x = 26, \qquad x^3 + 12\,x = 8,$$

studiati dall'ultimo degli algebristi italiani del Cinquecento, **Rafael Bombelli** (1526 ca.-1573), nella sua ***Algebra*** (1572).

- Nel primo caso egli trova: $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \left(\sqrt{3} + 1\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right) = 2$;
- nel secondo: $x = \sqrt[3]{\sqrt{196} + 13} - \sqrt[3]{\sqrt{196} - 13} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1} = 2$;
- nel terzo, infine: $x = \sqrt[3]{\sqrt{80} + 4} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$, senza possibilità di ulteriore semplificazione.

Per le equazioni del tipo suddetto, $x^3+px = q$, non si possono presentare situazioni differenti dalle tre descritte, come lo stesso Bombelli precisa.

Formule simili alla precedente si hanno, poi, per le altre due tipologie di equazioni per le quali valgono considerazioni analoghe a quelle esposte sopra. In particolare, nel caso dell'equazione:

---

[5] A Tartaglia si deve la pubblicazione (1543) della prima edizione italiana degli *Elementi* di Euclide.

$$x^3 = px+q,$$

la formula (basta sostituire p con –p in quell'altra) è la seguente:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

la quale, in relazione al caso specifico $x^3 = 15x+4$, dà:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,.$$

Sembrerebbe, perciò, di dover concludere, come per le equazioni di 2° grado con discriminante negativo, che l'equazione non abbia soluzioni reali. Si può constatare, invece, per sostituzione diretta, che essa ha la soluzione 4. Né Cardano né il suo discepolo Ferrari riuscirono a superare l'ostacolo, presentato dal fatto che l'equazione aveva una soluzione reale ma il procedimento per determinarla li portava a operare con radici quadrate di numeri negativi, che per i due matematici erano intrattabili.
Questo caso, detto ***caso irriducibile***, fu risolto da Bombelli. Egli, riguardo all'equazione $x^3=15x+4$, dopo aver fatto vedere che:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)$$

trova la soluzione x=4 operando con le radici quadrate dei numeri negativi con le stesse regole valide per i numeri reali, pur senza alcun fondamento logico. Abbiamo accennato a questa questione nell'unità sui "numeri complessi" (cfr.: Unità 40).

43.6.2 Riteniamo interessante segnalare che fino a questo momento i matematici non disponevano di un adeguato sistema di simboli, per cui la loro algebra era un'*algebra retorica*, nella quale tutto era espresso a parole, o al più un'*algebra sincopata*, vale a dire un'algebra in cui figuravano alcune forme abbreviate. Modalità, questa, utilizzata per la prima volta dal matematico alessandrino **Diofanto** (II-III sec. d.C.) nella sua opera dal titolo *Aritmetica*. Questo fa capire a quali difficoltà andavano incontro i matemtici. Le cose migliorarono con la nascita dell'*algebra simbolica*, dapprima in seguito alla pubblicazione dell'opera *In artem analyticem isagoge* (1591) del francese **François Viète** (1540-1603), avvocato di professione e matematico per diletto, e poi, in maniera decisiva, con la pubblicazione della *Géométrie* (1637), come appendice al trattato filosofico *Discours de la méthode* (6) di **René Descartes** (**Cartesio**, 1596-1650).

43.6.3 Il successo riportato con la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado entusiasmò i matematici, i quali per la prima volta vedevano superati i confini della matematica antica, e fece sorgere in loro la speranza di ottenere un analogo esito trionfale con le equazioni di grado superiore. Solo questione di tempo, pensavano speranzosi con ottimismo.
Al conseguimento di quest'obiettivo dedicarono gran parte dei loro sforzi i matematici, anche i più celebri, per circa 250 anni. E, in questo tentativo, ottennero risultati di un certo rilievo. Vogliamo ri-

[6] Il trattato (***Discorso sul metodo***) comprende altre due appendici a carattere scientifico: ***La Dioptrique*** e ***Les Météores***. In realtà il titolo completo dell'opera, perlomeno della prima edizione, è: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie, qui sont des essais de cete Methode*" (*Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze, più la Diottrica, le Meteore e la Geometria, che sono saggi di questo Metodo*).

cordare, in particolare, il contributo del matematico inglese **Edward Waring** (1734-1793), il quale elaborò una serie di formule per la risoluzione delle cosiddette equazioni reciproche (cfr.: esercizi 59, 60 sezione "verifiche"), che oggigiorno però hanno perso ogni interesse, a parte quello storico. Ma tutti i tentativi fallirono sistematicamente la risoluzione del problema più importante: quello di risolvere per radicali un'equazione di grado almeno quinto. Vale a dire, di trovare delle formule, contenenti le quattro operazioni elementari e l'estrazione di radice di un indice qualsiasi, le quali esprimessero le soluzioni dell'equazione in funzione dei suoi coefficienti. Nessuno, però, aveva dubbi sull'esistenza di queste formule e il fatto che non si riuscisse a trovarle era imputato all'incapacità dei matematici di scoprire la strada giusta.
Ma dopo alcuni contributi importanti dell'italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813) alla risoluzione, con metodo originale, delle equazioni dei primi quattro gradi, questo matematico, in una memoria del 1770 *sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, concludeva che il successo dei metodi usati per risolvere le equazioni di 2°, 3° e 4° grado era basato su proprietà che "forse" non valevano più per quelle di 5° grado.
Nel 1799, l'italiano **Paolo Ruffini** (1765-1822) pubblicava a Bologna un'opera dal lungo titolo: *Teoria generale delle equazioni*, *in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. In essa l'autore dimostrava, per l'appunto, che, a differenza delle equazioni dei primi quattro gradi, un'equazione generale di grado superiore non è risolubile per radicali. Con ciò il discorso doveva essere chiuso poiché si stabiliva, in sostanza, l'inutilità di ogni ulteriore ricerca sull'argomento. Sennonché la dimostrazione di Ruffini conteneva dei punti oscuri, che all'epoca gli procurarono molte critiche. Egli stesso però si preoccupò di correggerli in una serie di 5 lavori pubblicati fra il 1801 e il 1813 e finalmente, nel 1821, a meno di un anno dalla sua morte, la sua fatica fu premiata: ottenne infatti il riconoscimento ufficiale da parte del celebre matematico francese A. L. Cauchy (1789-1857).
Una dimostrazione indipendente da quella di Ruffini sarebbe stata pubblicata nel 1824 dal giovane matematico norvegese **Niels Henrik Abel** (1802-1829), tanto grande matematico quanto giovane sfortunato, morto a poco più di 26 anni a causa di una tubercolosi, sopravvenuta in seguito all'indebolimento del suo organismo, dopo anni vissuti in povertà.
La sua storia è, per molti versi, simile a quella del suo contemporaneo francese **Evariste Galois** (1811-1832). Questi, in una serie di annotazioni – scritte all'età di poco più di vent'anni, per lo più durante la notte fra il 29 e il 30 maggio 1832, alla vigilia di un assurdo duello che l'avrebbe lasciato ferito a morte – chiudeva definitivamente la questione delle equazioni algebriche.
Questa questione, dopo la scoperta di Ruffini-Abel, si poneva in questi termini: è vero che un'equazione generale di grado superiore al quarto non è risolubile per radicali, ma è altrettanto vero che vi sono "molte" equazioni siffatte che si risolvono per radicali.
Quali sono, allora, le condizioni affinché un'equazione algebrica di grado qualunque sia risolubile per radicali?
La risposta fu fornita appunto da Galois. Il suo modo originale di affrontare il problema s'incominciò a conoscere a partire dal 1846 in seguito alla pubblicazione di una parte del lavoro di Galois per opera del matematico Joseph Liouville (1809-1882), e diede un notevole impulso alle ricerche algebriche, indirizzandole verso lo studio di quella che oggi si chiama "algebra moderna".
Chi proseguirà gli studi nei corsi di laurea in Matematica, avrà modo di occuparsene a fondo e di apprezzarne le potenzialità.

VERIFICHE [7]

Le seguenti equazioni di 4° grado in x, conosciute come equazioni biquadratiche, sono facilmente riconducibili ad equazioni di 2° grado in un'opportuna variabile ausiliaria t: basta porre $x^2=t$. Risolverle in $\mathbb{R}$ (nn. 1-6).

1. $3x^4-2x^2-1=0.$ $\quad$ [R. ± 1]
2. $2x^4-x^2-1=0.$
3. $x^4+3x^2+2=0.$ $\quad$ [R. impossibile]
4. $2x^4-3x^2-2=0.$
5. $x^4-(\sqrt{3}-1)x^2-\sqrt{3}=0.$ $\quad$ [R. $\pm\sqrt[4]{3}$]
6. $x^4+\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{3}=0.$

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni in x (nn.7-29):

7. $(2x+1)(x^2-4x+1)=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } -\frac{1}{2},\ 2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\right]$
8. $(x-2)(3x+2)(2x-3)=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } 2, -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right]$
9. $(x^2-x+2)(3x^2+2x)=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } 0, -\frac{2}{3}\right]$
10. $(3x^2-1)(x^2-4x+4)=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } 2 \text{ (contata 2 volte)}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
11. $(4x^2-1)(2x^2+5x)=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]$
12. $(2x-5)(x-1)(x^2-x-1)=0.$
13. $(x^2-2x+2)(3x^2-1)=0.$
14. $(5x^2-2x)(x^2-2x+1)=0.$
15. $(2x-1)(3x^2+4x)(x^2-3x+4)=0.$
16. $(x^2-2x+1)(x^2-3x+2)(x^2+2)=0.$
17. $2x^3-3x^2-3x+2=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } -1, \frac{1}{2}, 2\right]$
18. $2x^3-5x^2+1=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } \frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$
19. $2x^4-9x^3+7x^2+6x=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } -\frac{1}{2}, 0, 2, 3\right]$
20. $3x^4-7x^3+8x^2-5x+1=0.$ $\quad$ $\left[\text{R. } 1, \frac{1}{3}\right]$

---

[7] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

21. $x^5-2x^4-5x^3+10x^2+6x-12=0.$ $\left[\mathbf{R.}\ 2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$

22. $2x^5-3x^4-3x^3+3x^2-5x+6=0.$ $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{3}{2}, 1, 2\right]$

23. $3x^3+2x^2+6x+4=0.$

24. $2x^3+3x^2-6x-9=0.$

25. $2x^3-10x^2+7x+4=0.$

26. $x^4+3x^3-2x-16=0.$

27. $3x^4-7x^3-3x^2+8x+4=0.$

28. $(x-1)^4+(x-2)^4=17.$

29. $2x^5+x^4-15x^3+5x^2+13x-6=0.$

Stabilire per quale valore del parametro reale m ciascuna delle seguenti equazioni in x ha una radice uguale al numero indicato a fianco di essa e successivamente calcolare, per il valore di m così trovato, le altre soluzioni in ℝ dell'equazione considerata (nn. 30-37):

30. $x^3-(2m-1)x^2+m-2=0;\quad -1.$ $\left[\mathbf{R.}\ m=-2;\ -2\pm2\sqrt{2}\right]$

31. $(m+1)x^3+2mx-m+1=0;\ \frac{1}{2}.$ [**R.** $m=-9$; nessun'altra]

32. $mx^4-(5m+1)x^3+(7m+5)x^2-(2m+7)x+2=0;\ -\frac{1}{2}.$ $\left[\mathbf{R.}\ m=-2;\ 2,\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

33. $x^5+2(m-1)x^4-4mx^3+x^2+2(m-1)x-4m=0;\ -\frac{3}{2}.$ $\left[\mathbf{R.}\ m=\frac{3}{4};\ 2, -1\right]$

34. $3x^3-mx^2+(2m+1)x-1=0;\ \ 1.$

35. $(m-2)x^3-x^2+2x-m+1=0,\ \ -1.$

36. $2x^4-(m+2)x^3+(m-2)x^2+(m+2)x-m=0;\ \frac{3}{2}.$

37. $2x^4-(3m-2)(x^3+x^2+x)-3m=0;\ \ -3.$

Risolvere in ℝ le seguenti equazioni in x (nn. 38-50):

38. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0\,.$ [**R.** -1]

39. $\dfrac{1}{2x^3+7x^2}+\dfrac{1}{7x+2}=0\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ -1, -2, -\frac{1}{2}\right]$

40. $\dfrac{x^2+3}{x^2}=\dfrac{16}{x^2+3}\,.$ [**R.** $\pm1, \pm3$]

41. $(x^3-9)^2-3(x^3-9)-4=0\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ 2, \sqrt[3]{13}\right]$

42. $(x^2+2x-2)^2-5(x^2+2x-2)+4=0\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ -3, 1, -1\pm\sqrt{7}\right]$

43. $\frac{1}{4\,x^2-1}-\frac{1}{4}=\frac{4\,x^2-3}{12\,x^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \pm1, \pm\frac{\sqrt{21}}{14}\right]$

44. $x^2\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{4\,x+12}{x+2}$. $[\mathbf{R.}\ -3, 2]$

45. $\frac{6\,(x^2-1)^2}{x^2}-35\,x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+74=0$. $\left[\mathbf{R.}\ 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$

46. $\frac{12}{x^2-3}+x^2=\frac{4\,x^2}{x^2-3}-3$. $[\mathbf{R.}\ \pm 1]$

47. $\frac{1}{2\,x^4-5\,x}=\frac{1}{2-5\,x^3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \pm1, -2, -\frac{1}{2}\right]$

48. $\frac{2\,x}{x-1}+\frac{3}{x^2+1}=\frac{2}{x-1}$. [**R.** impossibile]

49. $\frac{2\,x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{3}{2}$. $[\mathbf{R.}\ -1]$

50. $2\left(\frac{x^2+1}{2\,x}\right)^2+\frac{x^2+1}{2\,x}-1=0$. [**R.** -1 (2 volte)]

Questioni varie.

51. Il seguente problema risale al matematico indiano **Bhaskara** (circa 1114-1185): «Qual è il numero, o uomo sapiente, che, moltiplicato per 12 e aggiunto al suo cubo, è uguale a 6 volte il quadrato aggiunto a 35?». Bhaskara lo risolse in una maniera ingegnosa pur senza disporre del nostro agile simbolismo. Tu prova a risolverlo con gli strumenti algebrici di cui disponi, determinandone le soluzioni reali.

52. È facile verificare che si ha: $(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$. Dimostrare che esistono altre due terne di numeri interi consecutivi tali che il quadrato della loro somma sia uguale alla somma dei loro cubi.

53. Si consideri la seguente equazione in x:

$$4\,x^4+4\,(a-1)\,x^3-(4\,a-4\,b-1)\,x^2+(a-4\,b)\,x+b=0.$$

Determinare i parametri a, b in modo che essa abbia le soluzioni -1 e 2. Quindi trovare le altre eventuali soluzioni in $\mathbb{R}$. $\left[\mathbf{R.}\ a=-1,\ b=-2;\ \frac{1}{2}\text{ contata due volte}\right]$

54. Determinare i coefficienti del seguente polinomio in x:

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d,$$

in modo che esso abbia come zeri i numeri $-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ a=b=-\frac{5}{6}, c=\frac{5}{6}, d=-\frac{1}{6}\right]$

55. Considerato il seguente polinomio in x:

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d,$$

determinare i suoi coefficienti sapendo che esso ha come zeri i numeri 1 (contato due volte), -1, 2. $[\mathbf{R.}\ a=-3, b=1, c=3, d=-2]$

56. Determinare i coefficienti del seguente polinomio in x:

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d,$$

sapendo che l'equazione che si ottiene uguagliandolo a 0, ammette come soluzioni, entrambe contate due volte, i numeri -1 e $\frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ a=1, b=-\frac{3}{4}, c=-\frac{1}{2}, d=\frac{1}{4}\right]$

57. Considerata l'equazione: $x^{59}-2x^3+1=0$, spiegare perché di *soluzioni razionali* ne ammette una ed una soltanto.

58. Si considerino le seguenti equazioni:

$$[A]\ x^2+2=0. \quad [B]\ \frac{1}{x^2-1}=0. \quad [C]\ \frac{x^2-1}{x-1}=x+1. \quad [D]\ x^3-1=0.$$

Solamente una di esse ammette più di una soluzione nel campo reale. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

59. Si consideri la seguente equazione in x: $ax^3+bx^2+bx+a=0$, dove $a\in\mathbb{R}_0$ e $b\in\mathbb{R}$. È conosciuta come "equazione reciproca di 3° grado". Dimostrare che:
- non ammette la soluzione 0;
- ammette la soluzione −1;
- se ammette la soluzione α ammette pure la soluzione 1/α.

Risolvere quindi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni in x del tipo suddetto:

a) $x^3+3x^2+3x+1=0$; b) $x^3-3x^2-3x+1=0$;
c) $2x^3+7x^2+7x+2=0$; d) $x^3+x^2+x+1=0$.

60. Si consideri la seguente equazione in x: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, dove $a\in\mathbb{R}_0$ e $b, c\in\mathbb{R}$. È conosciuta come "equazione reciproca di 4° grado". Dimostrare che:
- non ammette la soluzione 0;
- se ammette la soluzione α ammette pure la soluzione 1/α.

Far vedere poi come, utilizzando la sostituzione di variabile definita dalla seguente formula:

$$x+\frac{1}{x}=y,$$

si possa trovare un criterio generale per risolvere un'equazione del tipo suddetto.
Infine risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni in x di tale tipo:

a) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$; b) $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$.
c) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$. d) $6x^4+13x^3+13x+6=0$.

61. Tenendo presente quanto esposto nel precedente esercizio, risolvere nell'insieme dei numeri complessi la seguente equazione in x:

$$x^5-1=0.$$

Com'è noto, le sue soluzioni non sono altro che le radici quinte dell'unità. Verificare l'esattezza del risultato mediante un idoneo software matematico.

62. Si consideri la seguente equazione: $x^3-2x^2+3(2-\sqrt{3})=0$. Dopo aver verificato che è soddisfatta per $x=\sqrt{3}$, dimostrare che ammette altre due radici reali e discordi e calcolarne la somma ed il prodotto.

63. Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni, senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico né alla regola di Ruffini:

a) $(x^3-2)^2-2(x^3-2)-3=0$. b) $(x^2-2x)^3-(x^2-2x)^2=0$.
c) $x^3-x^2-x+1=0$. d) $2x^4+x^3-4x^2-2x=0$.

64. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, lungo 2r, e di centro O, si dica P un suo punto e sia M la proiezione ortogonale di O su AP. Posto $\overline{AP}=x$, si esprima in funzione di x l'area del triangolo AOM. Quindi si determini x in modo che essa valga $\frac{3\sqrt{7}}{32}r^2$.

$$\left[\textbf{R.}\ A(AOM)=\frac{1}{8}x\sqrt{4r^2-x^2};\ 2\text{ sol.: } x'=\frac{3}{2}r,\ \ x''=\frac{\sqrt{7}}{2}r\right]$$

65. Detto P un punto di una semicirconferenza di raggio 1 m, si chiami Q la proiezione di P sul diametro

AB della semicirconferenza ed R la proiezione di P sulla tangente in A alla semicirconferenza. Posto $\overline{AQ}=x$ (espresso in metri), calcolare x in modo che il quadrilatero AQPR sia equivalente ad un rettangolo avente una dimensione uguale al raggio della semicirconferenza e l'altra uguale alla lunghezza del segmento medio proporzionale tra questo raggio e $\overline{AQ}$.

$\left[\textbf{R.}\ \text{2 sol.: } x'=1\ \text{m},\ \ x''=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{m}\right]$

66. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = x^2 + \sqrt{3}\,x + 1.$$

1. A) Condotte per l'origine O le rette tangenti ad essa, trovarne le equazioni.
   B) Trovare le coordinate dei punti di contatto, A e B, di tali tangenti con la parabola.
2. A) Trovare l'equazione della circonferenza c passante per i punti O, A, B.
   B) Dire in quante parti la parabola p divide il cerchio delimitato dalla circonferenza c.

67. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le circonferenze e le parabole di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 - (a-1)\,x + b = 0, \quad y = 2\,x^2 - a\,x + b.$$

Determinare i coefficienti a, b in modo che le due curve si sechino nei due punti di ascisse 1 e 2. Disegnarle dopo aver stabilito se hanno altri punti comuni.

68. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate la parabola e la circonferenza di equazioni ordinatamente:

$$y = x^2 + a\,x + b, \quad x^2 + y^2 - b\,y = 0.$$

1. A) Determinare i coefficienti a, b sapendo che le due coniche s'intersecano nel punto A(2,2).
   B) Stabilire che esse hanno in comune solo un altro punto B e trovare le coordinate di tale punto.
2. A) Verificare che la retta tangente alla parabola in B seca ulteriormente la circonferenza in un punto C: trovarne le coordinate.
   B) Calcolare l'area del triangolo ABC.

69. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si trovino i coefficienti dell'equazione: $y=ax^2+bx+c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa abbia il vertice nel punto (3,0) e passi per il punto (0,4).
Si scriva quindi l'equazione della parabola p' simmetrica di p rispetto all'asse y.
Considerato infine il rettangolo di area 16/9, inscritto nella parte di piano delimitata dalle due parabole, si trovino di esso le coordinate dei vertici. $\left[\textbf{R.}\ p \equiv y=\frac{4}{9}(x-3)^2, \dots\right]$

70. Due semirette, Or ed Os, formano un angolo di 45°. Sulla semiretta Os si fissino due punti A e B tali che $\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$. Scelto un conveniente sistema di riferimento cartesiano, si scriva l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria perpendicolare ad r, passante per i punti A e B e tangente alla semiretta Or. Detto C il punto in cui la parabola trovata tocca la semiretta Or, si calcoli l'area del triangolo ABC. Infine si stabilisca se la circonferenza circoscritta al triangolo ABC interseca la parabola in altri punti, oltre che nei vertici di questo triangolo. [**R.** … ; A(ABC)=3; …]

71. In un'urna vi sono palline bianche e palline nere e queste ultime sono 2 in più delle prime. Si estraggono a caso 3 palline, una di seguito all'altra, rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta. Quante palline bianche e quante nere devono essere contenute nell'urna affinché sia uguale a 2/9 la probabilità che due e due soltanto delle palline estratte siano bianche?

[**R.** Indicato con n il numero delle palline bianche, l'equazione risolvente è la seguente: $11n^3+6n^2-48n-16=0$, con $n \in N$]

72. ® Internamente ai lati AB e BC del quadrato ABCD si prendano rispettivamente i punti E ed F in modo che i triangoli AED, BFE e CDF abbiano aree nell'ordine: $48\ m^2$, $4\ m^2$ e $60\ m^2$. Si sa inoltre che i punti E ed F dividono i lati AB e BC in parti le cui misure, espresse in m, sono numeri interi. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo DEF.

73. Un cubo di legno, il cui spigolo è lungo n centimetri, dove n è un numero naturale, è verniciato di giallo su tutta la superficie esterna, quindi è suddiviso in cubetti, aventi ciascuno lo spigolo di 1 cm ed i cubetti ottenuti sono poi sparpagliati. Quanti cubetti hanno almeno una faccia verniciata? In quanti cubetti è stato suddiviso il cubo dato se quelli che non hanno alcuna faccia verniciata sono 343? [**R.** $2(3n^2-6n+4)$; 729]

74. ® Si consideri la seguente equazione nell'incognita x: $x^3+ax+b=0$. Si sa che una sua radice è -2.
   1) È possibile calcolare la somma delle altre due radici (nel campo complesso) o i dati sono insufficienti per questo calcolo?
   2) Per quali valori di b le tre radici dell'equazione assegnata sono reali?

[**R.** 1) … ; 2) $b \leq -14$]

75. Si consideri la seguente equazione nell'incognita x: $x^3+ax^2+b=0$. Si sa che una sua radice è -1.
   1) Calcolare per quali valori di a le altre due radici sono reali.
   2) Dimostrare che la somma delle altre due radici (nel campo complesso) è uguale al loro prodotto.

[**R.** 1) $a \leq -3$ o $a \geq 1$; 2) …]

76. ® Il polinomio $x^3-6x^2+11x-6$ si fattorizza nel modo seguente:

[A] $(x+1)(x+2)(x+3)$. [B] $(x+1)(x-2)(x-3)$.
[C] $(x-1)(x-2)(x+3)$. [D] $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla in non più di 15 secondi e fornire poi una spiegazione esauriente della scelta operata (non sono ammessi strumenti di calcolo automatico).

77. Il polinomio $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ si fattorizza nel modo seguente:

[A] $(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$. [B] $(x-1)(x-2)^2(x-3)$.
[C] $(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$. [D] $(x-1)^2(x+2)(x+3)$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla in non più di 15 secondi e fornire poi una spiegazione esauriente della scelta operata (non sono ammessi strumenti di calcolo automatico).

78. Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $4x - x^3 \leq 0$. b) $x^2(x+1) > -4$. c) $x^2(x-3) < 4(1-x)$.
d) $x^2(x^2-2x-3) \geq 0$. e) $x^3 - x^2 + 2x - 2 \geq 0$. f) $(x^2-2)^2 < x^3 - 2x$.

79. Si consideri la seguente equazione in x:

$$kx^3 - (2k^2+k-2)x^2 + 2(k^2-2k-1)x + 4k = 0\,,$$

essendo k un parametro reale non nullo. Dopo aver controllato che una sua radice è 1:
   a) verificare che anche le altre due radici sono numeri reali;
   b) verificare che il prodotto delle tre radici dell'equazione non dipende da k;
   c) trovare se esistono valori di k per i quali tutte e tre le radici dell'equazione sono numeri interi.

80. Sono assegnati i due seguenti polinomi in x:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6, \quad x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 6\,.$$

Stabilire se hanno zeri comuni e, in caso affermativo, determinarli.

81. Rappresentare graficamente il seguente insieme J.

a) $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2+y^2 \leq 1,\ x^2-y \leq 0\}$
b) $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > 2,\ x < \sqrt{2},\ y < x^2+\sqrt{2}\}$
c) $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \geq 2,\ y \leq x^2-1\}$

82. Un numero naturale n sia del tipo p^α, essendo p un numero primo ed α un numero naturale. Gli algebristi insegnano che il numero dei numeri naturali minori di n è primi con esso, chiamato ***indicatore di Gauss*** (o anche ***funzione di Eulero***) e indicato con il simbolo $\Phi(n)$, è tale che:

$$\Phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

a) Calcolare quanti sono i numeri naturali minori di 27 e primi con esso ed elencarli tutti.
b) Ammesso che sia $n=p^4$ e che sia 8 il numero dei numeri naturali minori di n e primi con esso, quanto vale n? Elencare tutti questi 8 numeri.

83. ® È assegnata la seguente equazione di 3° grado in x:

$$x^3 - (k+1)x^2 + (1-k)x + 2k - 1 = 0.$$

Dopo aver verificato che una sua soluzione è il numero intero 1 per ogni valore di k, determinare per quali valori di k essa ammette altre due soluzioni intere. [**R.** $k'=2,\ k''=-10$]

[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

84. ESERCIZIO RISOLTO. È assegnata la seguente equazione di 3° grado in x:

$$x^3 - 3x + k = 0.$$

Trovare per quali valori del parametro reale k essa ammette tre radici reali, di cui due e due soltanto coincidenti, e trovare tali radici.

RISOLUZIONE. Ipotizzando che sia α la radice doppia e β l'altra radice, l'equazione deve potersi mettere nella forma seguente:

$$(x-\alpha)^2(x-\beta) = 0.$$

Sviluppandolo e confrontandolo il trinomio al primo membro di questa equazione con quello dell'equazione assegnata e imponendo che essi siano identicamente uguali, si ottengono le seguenti condizioni:

$$2\alpha + \beta = 0,\ \ \alpha^2 + 2\alpha\beta = -2,\ \ -\alpha^2\beta = k.$$

Risolvendo il sistema di queste equazioni, si ottengono due soluzioni:

$$(\alpha = 1,\ \beta = -2,\ k = 2),\ \ (\alpha = -1,\ \beta = 2,\ k = -2).$$

La conclusione è ovvia.

85. ® La differenza tra la radice quadrata di un numero naturale e la sua radice cubica è 4. Determinare il numero. [**R.** 64]

86. La differenza tra la radice quadrata di un numero naturale e la sua radice quarta è 72. Determinare il numero. [**R.** 6561]

87. Trovare tutti i numeri razionali positivi x, y, z, tali che la somma dei quadrati dei primi due è uguale al cubo del terzo. [**R.** $x = p(p+q),\ y = q(p+q),\ z = p+q,\ \text{con } p, q \in \mathbb{Q}_0^+$]

88. Determinare un polinomio di 4° grado nell'indeterminata x, sapendo che i suoi zeri reali sono i numeri 1 e 2, entrambi contati due volte e sapendo inoltre che esso assume il valore 2 per x=0.

[**R.** $\frac{1}{2}(x-1)^2(x-2)^2$]

89. Determinare tutti i polinomi di 3° grado nell'indeterminata x, sapendo che i loro zeri reali sono i numeri 1 contato due volte e 2. [**R.** $a(x-1)^2(x-2),\ \text{con } a \in \mathbb{R}_0$]

90. Determinare il polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ sapendo che si ha: $P(1)=1$, $P(2)=4$, $P(3)=9$.

91. ® $P(x)$ è un polinomio di 3° grado tale che $P(x)=1/x$ quando ad x si assegnano i valori 1, 2, 3, 4.

Calcolare P(5). [**R**. P(5)=0]

92. Siano x_1, x_2, x_3 le radici complesse di un'equazione di 3° grado in x. Posto:
$$x_1 + x_2 + x_3 = -s\,,\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = r\,,\quad x_1\, x_2\, x_3 = -p\,,$$
dimostrare che l'equazione assume la forma seguente:
$$x^3 + sx^2 + rx + p = 0\,.$$

93. Dimostrare che, a meno di simmetrie, esiste uno ed un solo triangolo rettangolo di ipotenusa 10, il cui perimetro e la cui area hanno valori espressi dallo stesso numero. Qual è questo numero?

94. Dopo aver spiegato perché il numero $N=n^4+6n^3+11n^2+6n$ è un numero naturale per ogni naturale n, dimostrare che è divisibile per 24 qualunque sia il naturale n e che non esiste alcun numero naturale minore di 24 per il quale N sia divisibile.

[**R**. Una volta stabilito che N è il prodotto di 4 numeri …]

95. PROBLEMA RISOLTO. Il trapezio rettangolo in figura (Fig. 7) è diviso, da una retta parallela alle sue basi, in due trapezi circoscritti a due circonferenze di raggi 3 e 4. Calcolare l'area del trapezio.
[N.B.: Questo problema è stato proposto da Paolo Gronchi nella rivista Archimede, fasc. N° 4/2017, pag. 250]

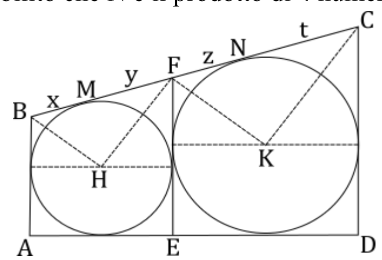

FIG. 7

RISOLUZIONE (parziale).
Proponiamo una risoluzione algebrica, che richiede però la collaborazione di chi legge.
Indichiamo con ABCD il trapezio dato, rettangolo in A e D, formato dai due trapezi ABFE e EFCD, il primo dei quali circoscritto alla circonferenza di raggio 3 e centro H ed il secondo circoscritto alla circonferenza di raggio 4 e centro K. Indichiamo inoltre con M e N i punti in cui il lato obliquo BC tocca nell'ordine la circonferenza di raggio 3 e quella di raggio 4. Poniamo per comodità:
$$\overline{BM} = x,\ \ \overline{MF} = y,\ \ \overline{FN} = z,\ \ \overline{NC} = t,\qquad (0<x<y,\ 0<z<t).$$
Si spiega facilmente che si hanno le seguenti tre equazioni nelle incognite x, y, z, t:
$$xy = 9,\ \ zt = 16,\ \ y = z + 1.$$
Osserviamo poi che l'area S del trapezio ABCD può essere calcolata sia direttamente sia come somma delle aree dei due trapezi ABFE e EFCD. Si trova rispettivamente:
$$S = 7x + 7t + 49\,,\quad S = 3x + 3y + 4z + 4t + 50\,.$$
Si ottiene così, dal confronto fra le due espressioni di S, una quarta equazione nelle medesime incognite x, y, z, t, vale a dire:
$$4x - 3y + 3t - 4z = 1\,.$$
Si tratta allora di risolvere il sistema delle quattro equazioni ottenute. Per questo, dalle prime tre equazioni si esprimono y, z, t in funzione di x e si sostituiscono nella quarta equazione i valori trovati. Si ottiene la seguente equazione risolvente in x:
$$4x^3 - 81x^2 - 90x + 567 = 0.$$
Risolta la quale, si trova l'unica soluzione accettabile, che è x=9/4. La prosecuzione è elementare.

96. È assegnata la parabola p di equazione $y^2=2x$.

a) Trovare l'equazione della retta t tangente ad essa nel punto A di ordinata 1.

b) Trovare l'equazione della circonferenza k avente con la parabola p tre punti comuni tutti riuniti nel punto A (è chiamata *circonferenza osculatrice* o *cerchio osculatore* in A alla parabola p).

c) Verificare che la circonferenza k e la parabola p s'intersecano ulteriormente in un punto B e verificare inoltre che questo punto appartiene alla normale n alla parabola in A.

d) La parabola p divide il cerchio delimitato da k in due parti: calcolare le loro aree.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } y = x + \frac{1}{2}\ ;\ \ \text{b) } x^2 + y^2 - 5x + 2y - \frac{3}{4} = 0;\ \ \text{c) } B\left(\frac{9}{2}, -3\right); \text{d) } \dots\right]$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Che grado ha il sistema delle equazioni di una circonferenza qualsiasi e di una parabola con asse parallelo all'asse y, assegnate in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy)? E qual è il grado della sua risolvente?
2. Come si costruisce l'equazione in x avente come soluzioni i numeri 1 (contato due volte), -2 e $1/2$?
3. Cosa s'intende per "zero" di una funzione polinomiale?
4. Il grafico di un polinomio di grado n ha al più n punti in comune con l'asse delle ascisse. Perché?
5. Si consideri la seguente equazione polinomiale: $x^{15}-100\,x^2+25=0$. Si può concludere con una modalità diversa da una verifica diretta che essa non ammette la soluzione 15. È vero?
6. È lecito affermare con certezza che l'equazione in x, $x^{116}+15\,x+1=0$, non ha soluzioni razionali?
7. Sei in grado di costruire un'equazione di 5° grado avente al più tre soluzioni reali?
8. Risolvi in $\mathbb{R}$ l'equazione $\left|x^3+8\right|+\left|x^3\right|=8$.
9. Risolvi nell'insieme dei numeri complessi la seguente equazione: $(2x-1)^4=1$.
10. Risolvi nell'insieme dei numeri complessi la seguente equazione: $x^4-4x^3+4x^2-4x+4=0$.
11. Quale merito va attribuito ai cosiddetti "algebristi italiani del Cinquecento" nel campo della risoluzione delle equazioni polinomiali?
12. Qual è la differenza sostanziale, ai fini della loro risoluzione, fra un'equazione polinomiale dei primi 4 gradi e un'equazione di grado superiore al 4°?
13. Senza entrare nello specifico, qual è stato il contributo di Galois alla risoluzione delle equazioni polinomiali?

RISPOSTE.

1. Il sistema è di 4° grado ed anche la sua risolvente è un'equazione di 4° grado.
2. L'equazione è la seguente: $(x-1)^2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$.
3. Si dice "zero" di una funzione (anche polinomiale ma non solo) ogni valore che rende nulla la funzione. Naturalmente se questo valore è reale lo zero si dice reale.
4. Perché tali punti si trovano risolvendo l'equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio. In questo modo si ottiene un'equazione algebrica di grado n, che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ammette al più n valori reali; valori che sono proprio le ascisse dei punti in cui il grafico del polinomio interseca l'asse delle ascisse.
5. Sì. Infatti, se l'equazione ammette soluzioni razionali, queste sono da ricercarsi fra i numeri ±1, ±5 e ±25. E 15, evidentemente, non è fra questi numeri.
6. È assolutamente lecito. L'equazione, infatti, non è soddisfatta né per −1 né per 1, che sono le uniche radici razionali che essa potrebbe ammettere.
7. Non ci vuol molto: è tale, ad esempio, l'equazione $x^2(x-1)(x^2+1)=0$. Ma si possono portare innumerevoli esempi.

8. Per $x\geq 0$ l'equazione diventa: $x^3+8+x^3=8$ e dà come unica soluzione $x=0$, contata 3 volte. Per $x<0$ e $x^3+8\leq 0$, cioè per $x\leq -2$, l'equazione diventa: $-x^3-8-x^3=8$ e dà come unica soluzione reale $x=-2$. Per $-2<x<0$ l'equazione diventa: $x^3+8-x^3=8$ ed è evidentemente indeterminata, per cui tutti i numeri reali compresi fra -2 e 0, estremi esclusi (ma questi due valori sono già stati presi in esame), sono sue soluzioni.

9. Constatato che le radici quarte dell'unità sono $1, -1, i, -i$, dall'equazione data si ottengono le seguenti equazioni: $2x-1=1$, $2x-1=-1$, $2x-1=i$, $2x-1=-i$. Seguono le soluzioni dell'equazione assegnata:

$$x=1,\ x=0,\ x=\frac{1+i}{2},\ x=\frac{1-i}{2}.$$

10. È uno di quei casi particolari in cui una semplice fattorizzazione basta a risolvere l'equazione. Infatti:

$$x^4-4x^3+4x^2-4x+4=(x^2+2)^2-4x(x^2+2)=(x^2+2)(x^2-4x+2).$$

La prosecuzione è semplice e si trovano le seguenti radici: $\pm i\sqrt{2}$, $2\pm\sqrt{2}$.

11. Tali algebristi ebbero il merito di aver trovato delle formule risolventi per le equazioni di 3° e 4° grado. Tali formule esprimevano per radicali le radici delle equazioni.

12. Un'equazione al più di 4° grado si può risolvere per radicali; in altri termini vi sono delle formule, utilizzando le quali si possono trovare le radici di queste equazioni. Ciò non accade se l'equazione è di grado superiore al 4°. Questo fatto è stato dimostrato, indipendentemente l'uno dall'altro, dall'italiano Paolo Ruffini (1765-1822) e dal norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829).

13. Il francese Évariste Galois (1811-1832) trovò un criterio originale per stabilire quando un'equazione, di qualunque grado, è risolubile per radicali.