Prerequisiti:
- Rappresentare retta, parabola e circonferenza in un piano cartesiano.
- Saper risolvere sistemi ed equazioni di 2° grado.

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori, eccezion fatta per l'Istituto Tecnico, Settore Economico.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *trovare le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole come luoghi geometrici in particolari sistemi di riferimento*
- *riconoscere l'equazione di un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi di riferimento*
- *risolvere semplici problemi riguardanti l'ellisse e l'iperbole*

Ellisse e Iperbole

Unità 44

44.1 ELLISSE

44.1.1 Incominciamo con la definizione dell'ellisse:

ELLISSE è il luogo geometrico dei punti di un piano le cui distanze da due punti fissi hanno somma costante.

I due punti fissi si chiamano ***fuochi***.

Ci proponiamo di rappresentarla graficamente e di studiarne le proprietà attraverso la sua equazione cartesiana. Per questo è però necessario riferire il piano dell'ellisse ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Non sceglieremo un sistema di riferimento qualsiasi, poiché altrimenti giungeremmo ad una equazione che non sapresti interpretare in base alle sole conoscenze matematiche fin qui acquisite. Il nostro sistema di riferimento ha l'origine O nel punto medio del segmento avente per estremi i due fuochi F_1 ed F_2 dell'ellisse, ed uno dei due assi cartesiani coincide con la retta F_1F_2. Anzi, supponiamo in un primo momento che quest'asse sia l'asse x (Fig. 1).

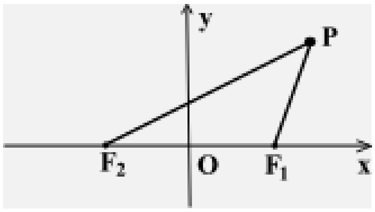

FIG. 1

Siccome i due punti F_1 ed F_2 sono fissi la loro distanza, detta ***distanza focale*** [1], è prefissata. Sia: $\overline{F_1F_2}=2c$, con $c>0$. Sia poi 2a, con $a>0$, la somma costante delle distanze di un generico punto P dell'ellisse dai suoi fuochi; vale a dire:

[1] $$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a.$$

Se (x,y) sono le coordinate di questo punto P, si tratta di stabilire da quale relazione matematica esse sono legate: questa relazione è l'equazione che cerchiamo. Osservato allora che $F_1(c,0)$ ed $F_2(-c,0)$, ricordando la formula della distanza di due punti, dalla [1] segue:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\,.$$

Elaboriamo questa equazione in modo da ricondurla ad una forma più "leggibile". Per prima cosa, dopo aver isolato il secondo dei due radicali che figurano al primo membro, eleviamo entrambi i membri al quadrato e semplifichiamo, isolando l'unico radicale rimasto. Dopo qualche semplice elaborazione otteniamo:

$$a^2-c\,x=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Elevando di nuovo al quadrato entrambi i membri di questa equazione ed elaborando in modo conveniente, troviamo:

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Ora, nel triangolo PF_1F_2 (Fig. 1) è certamente $F_1F_2<PF_1+PF_2$; per cui $2c<2a$, ossia $a>c$. Questo significa che $a^2-c^2>0$. Per comodità poniamo $a^2-c^2=b^2$, e supponiamo $b>0$.

La precedente equazione diventa allora:

---

[1] Alcuni autori chiamano distanza focale la distanza di uno dei fuochi dal loro punto medio. Ovviamente per noi questa è la *semidistanza* focale.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

da essa, dividendo tutto per a^2b^2, si ottiene:

[2] $$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

dove i parametri a, b sono legati alla semidistanza focale c dalla relazione:

$$\mathbf{c^2 = a^2 - b^2}.$$

L'equazione [2], che poi è la forma analitica della relazione [1], è l'equazione cercata: si chiama **equazione normale** (o **canonica** o **standard**) **dell'ellisse**. Di essa ci serviremo per rappresentarla graficamente.

44.1.2 Rileviamo anzitutto che la curva di equazione [2] presenta importanti simmetrie. Essa è precisamente simmetrica rispetto:

- all'asse x: infatti risulta trasformata in se stessa dalla simmetria assiale di equazioni $x'=x,\ y'=-y$ (che è per l'appunto la simmetria rispetto all'asse x);
- all'asse y: infatti risulta trasformata in se stessa dalla simmetria assiale di equazioni $x'=-x,\ y'=y$ (che è per l'appunto la simmetria rispetto all'asse y);
- all'origine O: infatti è trasformata in se stessa dalla simmetria centrale di equazioni $x'=-x,\ y'=-y$ (che è per l'appunto la simmetria rispetto ad O).

Per questo si dice pure che la [2] è **l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi di simmetria** ed il punto O è chiamato ***centro*** dell'ellisse.

Osserviamo, poi, che dalla [2] si desume che deve essere:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \ \text{ e } \ \frac{y^2}{b^2} \leq 1 .$$

Ossia, risolvendo le due disequazioni, la prima rispetto ad x e la seconda rispetto ad y:

$$-a \leq x \leq a \ \text{ e } \ -b \leq x \leq b .$$

Questo significa che l'ellisse è tutta contenuta dentro il rettangolo di lati:

$$x=-a,\ x=a,\ y=-b,\ y=b.$$

Anzi, siccome per $x=\pm a$ si ottiene $y=0$ (2 volte) e per $y=\pm b$ si ottiene $x=0$ (2 volte), possiamo concludere che l'ellisse tocca i lati di questo rettangolo nei punti:

$$A_1(a,0),\ A_2(-a,0),\ B_1(0,b),\ B_2(0,-b).$$

Questi punti si chiamano ***vertici*** dell'ellisse.

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2, di lunghezze 2a e 2b rispettivamente, si chiamano ***assi*** dell'ellisse.(2) Col termine *semiassi* s'intendono invece di solito i numeri a, b.

Facciamo notare che i fuochi dell'ellisse sono situati sull'asse maggiore (ricordiamo che $a>b$).

♦ PROPRIETÀ. **Una generica retta interseca un'ellisse in due punti (eventualmente coincidenti) o in nessun punto**.

DIMOSTRAZIONE. Anche se richiede un po' di tempo vediamo la dimostrazione di questa proprietà. Notiamo subito che, se la retta è del tipo $x=h$, la spiegazione è immediata. La lasciamo a te. Sia allora una generica retta di equazione $y=mx+n$.

Per trovare le sue intersezioni con l'ellisse [2] occorre risolvere il sistema delle equazioni delle due

---

[2] A volte si chiamano assi dell'ellisse le rette A_1A_2 e B_1B_2. Dal contesto si capisce a cosa ci si riferisce.

curve. Troviamo facilmente la sua risolvente in x:

$$(m^2 a^2 + b^2)\, x^2 + 2\, m\, n\, a^2 x + a^2 (m^2 - b^2) = 0.$$

Essendo $m^2a^2+b^2 \neq 0$ per qualunque $m \in \mathbb{R}$, concludiamo intanto che questa risolvente è sempre di 2° grado. Calcoliamo ora il suo discriminante D. Si ha:

$$D = 4\,[(m\, n\, a^2)^2 - (m^2 a^2 + b^2) \cdot a^2 (n^2 - b^2)] = 4\,[a^2 b^2 (a^2 m^2 - n^2 + b^2)].$$

A seconda dei valori di a, b, m, n esso può essere:

- positivo: in questo caso l'equazione (e quindi il sistema) ha due soluzioni reali e distinte: la retta interseca l'ellisse;
- nullo: in questo caso l'equazione (e quindi il sistema) ha due soluzioni reali e coincidenti: la retta è tangente all'ellisse;
- negativo: in questo caso l'equazione (e quindi il sistema) non ha soluzioni reali: la retta è esterna all'ellisse.

Tutte le precedenti informazioni – che, nei casi particolari in cui i parametri a, b sono effettivamente conosciuti, possono essere integrati dalla ricerca di qualche particolare punto dell'ellisse – conducono alla rappresentazione grafica della curva (Fig. 2).

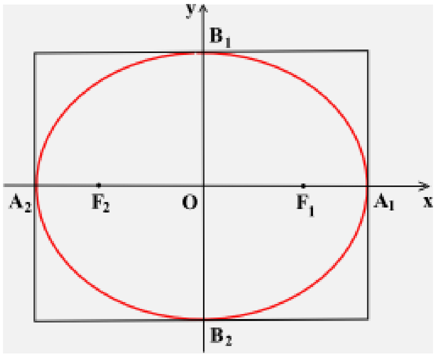

FIG. 2

44.1.3 Qualche altra considerazione.

- Il numero:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

si chiama ***eccentricità*** dell'ellisse. Si tratta evidentemente di un numero positivo minore di 1. Ma è tanto più prossimo ad 1 quanto più b è piccolo rispetto ad a, cioè quanto più l'ellisse è "schiacciata". Ed è tanto più prossimo a 0 quanto più b è prossimo ad a, cioè quanto meno l'ellisse è "schiacciata". Addirittura se si assume b=a (perciò e=0) l'equazione [2] diventa evidentemente:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

che, come si sa, è quella di una circonferenza di centro O. Sicché, possiamo affermare legittimamente che:

Una CIRCONFERENZA si può considerare come una particolare ellisse; precisamente un'ellisse di eccentricità nulla.

- Se nel riferimento cartesiano prefissato fosse stato scelto l'asse y come retta dei fuochi, l'equazione [2] avrebbe assunto la seguente forma:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

con l'asse maggiore situato ovviamente sull'asse y (Fig. 3). I vertici dell'ellisse sarebbero naturalmente i punti: $A_1(0,a)$, $A_2(0,-a)$, $B_1(b,0)$, $B_2(-b,0)$.

- Mentre ogni equazione [2], con $a\neq b$, rappresenta un'ellisse, non è vero che ogni ellisse è rappresentata, nel piano cartesiano (Oxy), da un'equazione del tipo [2]: basti pensare all'ellisse di figura 3 o anche a quelle che si ottengono dalle ellissi di figura 2 o di figura 3 con una traslazione.
  Noi, comunque, ci occupiamo soltanto delle ellissi che sono rappresentate graficamente come in figura 2 o come in figura 3. Salvo un cenno ad una particolare configurazione di cui tratteremo più avanti.

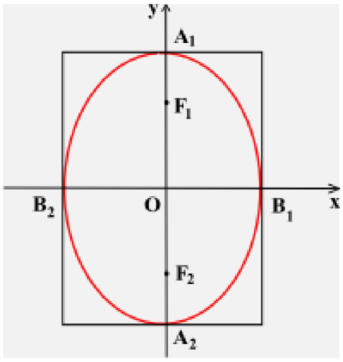

FIG. 3

- La regione piana delimitata da un'ellisse ha una misura che si chiama, anche se impropriamente, **area dell'ellisse**. Se a, b sono i suoi semiassi l'area A dell'ellisse è espressa dalla formula seguente:
  $$\mathbf{A = \pi\, a\, b}.$$
  Al momento non possiamo dimostrare questa formula. Lo faremo nel seguito degli studi.

  Ti proponiamo tuttavia di risolvere qualche esercizio:
  a) Calcolare il rapporto fra l'area del quadrilatero avente per vertici i vertici di un'ellisse e l'area della stessa ellisse.
  b) Il quadrilatero avente per vertici i fuochi di un'ellisse e gli estremi dell'asse minore è un quadrato di area 4 m^2. L'area del quadrato è maggiore, minore o uguale a quella dell'ellisse non occupata dal quadrato medesimo?
  c) Sopra un'ellisse di distanza focale 2 m, è collocato un quadrilatero in modo che i suoi vertici coincidano con i fuochi dell'ellisse e gli estremi dell'asse minore. Sapendo che questo quadrilatero è equivalente alla parte dell'ellisse rimasta scoperta, calcolare le misure degli assi dell'ellisse.

44.1.4 Sottoponiamo adesso alla tua attenzione un esercizio che riassume alcune delle considerazioni che abbiamo svolto sopra.

- ESERCIZIO. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le curve di equazione:

(a) $$(m-1)\,x^2+y^2=4,$$

dove m è un parametro reale.

1) Stabilire per quali valori di m la (a) rappresenta un'ellisse, distinguendo tra le ellissi che hanno i fuochi sull'asse x e quelle che li hanno sull'asse y.

2) Dopo aver controllato che quella, tra le curve (a), che passa per il punto $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$ è un'ellisse (E), disegnarla e calcolarne l'area.
3) Tra le rette passanti per il punto $(1,1)$ determinare le tangenti all'ellisse (E).

RISOLUZIONE.

1) Affinché la (a) rappresenti un'ellisse deve risultare $m-1>0$, ossia $m>1$. Sotto questa condizione la (a) può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{x^2}{\frac{4}{m-1}}+\frac{y^2}{4}=1\,.$$

Perciò:
- se $\frac{4}{m-1}>4$, ossia $m<2$ (ma sempre $m>1$), i fuochi dell'ellisse sono situati sull'asse x;
- se $\frac{4}{m-1}<4$, ossia $m>2$, quei fuochi sono sull'asse y;
- se $\frac{4}{m-1}=4$, cioè $m=2$, si ottiene la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$.

2) Affinché il punto $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$ appartenga alla curva (a) deve essere soddisfatta la seguente equazione in m:

$$(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=4\,.$$

Da qui, risolvendo rispetto ad m, si ottiene: $m=5$. Per questo valore ($m>2$) la (a) rappresenta un'ellisse avente i fuochi sull'asse y. Precisamente l'ellisse di equazione:

(E) $$x^2+\frac{y^2}{4}=1\,.$$

I suoi vertici sono i punti di coordinate: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$. Essa è disegnata in figura 4. La sua area è $A=2\pi$.

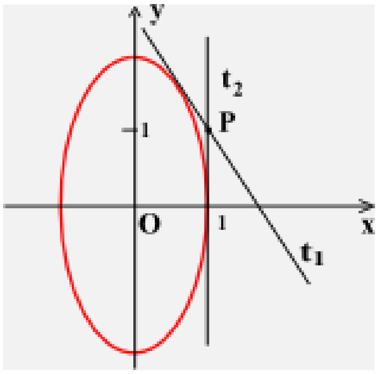

FIG. 4

3) La generica retta passante per il punto $P(1,1)$ – ma non parallela all'asse y – ha equazione:

(R) $$y-1=t\,(x-1).$$

Intersechiamola con l'ellisse (E). A questo proposito troviamo la risolvente in x del sistema delle equazioni (E) e (R), che è la seguente: $4\,x^2+(t\,x-t+1)^2=4$; vale a dire, dopo qualche semplice elaborazione:

$$(t^2+4)\,x^2-2\,t\,(t-1)\,x+(t^2-2\,t-3)=0.$$

Le rette (R) sono tangenti all'ellisse (E) solo se questa equazione ha due soluzioni coincidenti. Il che accade per i valori di t che rendono nullo il suo discriminante D. Siccome:

$$D=4\{[t\,(t-1)]^2-(t^2+4)(t^2-2\,t-3)\}=16\,(2\,t+3),$$

l'unico valore di t, che soddisfa a quella condizione, è $-3/2$.

Quindi la retta di equazione $y-1=-\frac{3}{2}\,(x-1)$, cioè $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$, è tangente all'ellisse (E).

Ma per il punto P si può condurre all'ellisse (E) un'altra retta tangente, che non si è trovata col procedimento precedente poiché non ha equazione del tipo (R). Questa retta è la parallela all'asse y condotta per il punto P(1,1); cioè la retta di equazione x=1.

44.1.5 Alcuni esercizi per te.

1. Disegna i grafici dell'ellisse di equazione:
$$\text{(a)}\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1\,; \qquad \text{(b)}\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\,.$$
Quanto vale l'area dell'ellisse?
2. Considerata l'equazione:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
determina i parametri a^2, b^2 in modo che l'ellisse che la rappresenta:
   a) abbia due vertici nei punti (2,0) e (0,3);
   b) abbia un fuoco nel punto (2,0) e un vertice nel punto (0,2);
   c) abbia un fuoco nel punto (0,3) e passi per il punto (0,5);
   d) abbia un vertice nel punto (4,0) e passi per il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-2\right)$;
   e) abbia un fuoco nel punto (0,1) ed eccentricità uguale a 1/4.

[**R.** … ; b) $a^2=8$, $b^2=4$; c) $a^2=16$, $b^2=25$; … ; e) $a^2=15$, $b^2=16$]
3. L'orbita descritta dalla Terra intorno al Sole è un'ellisse di eccentricità 0,0167. Il Sole occupa uno dei fuochi (Fig. 5). La Terra si trova nel punto più vicino al Sole (detto *perielio*) il giorno 3 gennaio ed in tale punto dista dal Sole circa 146.400.000 km. Si trova invece nel punto più lontano dal Sole (detto *afelio*) il giorno 4 luglio ed in tale posizione dista dal Sole circa 151.200.000 km. Calcolare le misure degli assi dell'orbita terrestre e la distanza focale. La congiungente Sole-Terra spazza una regione piana mentre la Terra compie una rivoluzione completa: qual è l'area di tale regione?

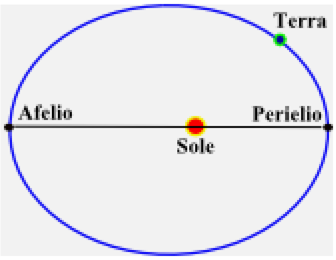

FIG. 5

44.2 IPERBOLE.

44.2.1 La curva si definisce nel modo seguente:

IPERBOLE è il luogo geometrico dei punti di un piano le cui distanze da due punti fissi hanno differenza costante.

I due punti fissi sono detti ***fuochi***.

Vogliamo trovare l'equazione dell'iperbole rispetto ad un particolare sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale (Oxy). Come nel caso dell'ellisse e per le medesime ragioni allora esposte, scegliamo quello che ha l'origine O nel punto medio del segmento avente per estremi i due fuochi F_1 ed F_2 ed ha uno dei due assi cartesiani coincidente con la retta F_1F_2. Anzi supponiamo in un primo momento che quest'asse sia l'asse x (Fig. 6).

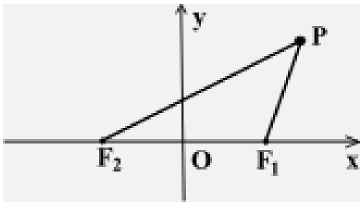

FIG. 6

La distanza F_1F_2 si chiama ***distanza focale*** (3).

Poniamo: $\overline{F_1F_2}$=2c, con c>0. Sia poi 2a, con a>0, il valore assoluto della differenza costante delle distanze di un generico punto P dell'iperbole dai due fuochi: $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$, ovvero:

[3] $$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=\pm 2a\,.$$

Osservato ora che $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$, le coordinate (x,y) del generico punto P dell'iperbole, in virtù delle [3], devono soddisfare a quest'equazione:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a\,.$$

Dalla quale, procedendo come nel caso dell'ellisse, si ottiene:

$$a^2-c\,x=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

E da qui, elevando al quadrato entrambi i membri ed elaborando in modo conveniente, si ricava:

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2\,y^2=a^2\,(c^2-a^2).$$

Ora, nel triangolo PF_1F_2 (Fig. 5) è certamente $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|<\overline{F_1F_2}$; perciò 2a<2c, ossia a<c. Questo significa che $c^2-a^2>0$. Per comodità poniamo $c^2-a^2=b^2$ e supponiamo b>0.

La precedente equazione diventa allora:

$$b^2\,x^2-a^2\,y^2=a^2\,b^2$$

e da questa, dividendo tutto per a^2b^2, segue:

[4] $$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1},$$

dove i parametri a, b sono legati alla semidistanza focale c dalla relazione:

$$\mathbf{c^2=a^2+b^2}.$$

L'equazione [4], che poi è la forma analitica della relazione [3], è l'equazione cercata: si chiama **equazione normale** (o **canonica** o **standard**) **dell'iperbole**. Di essa ci serviremo per studiare la curva e per rappresentarla graficamente.

44.2.2 Rileviamo anzitutto che, come l'ellisse e per le stesse ragioni allora evidenziate, anche l'iperbole è simmetrica sia rispetto agli assi di riferimento sia rispetto all'origine O. Per questo si dice pure che la [4] è **l'equazione di un'iperbole riferita ai propri assi di simmetria** e il punto O è detto ***centro*** dell'iperbole.

Osserviamo poi che dalla [4] si desume che deve essere:

$$\frac{x^2}{a^2}\geq 1$$

ossia $x\leq -a$ oppure $x\geq a$; mentre y può assumere qualunque valore reale. Questo significa che l'iperbole

[3] Alcuni autori chiamano distanza focale la distanza di uno dei due fuochi dal loro punto medio. Ovviamente per noi questa è la semidistanza focale

è esterna alla striscia delimitata dalle rette $x=-a$, $x=a$; e quindi è costituita da due "pezzi", detti più propriamente *rami*. Più precisamente, siccome per $x=\pm a$ si ottiene $y=0$ (2 volte), i lati di quella striscia sono tangenti all'iperbole nei punti:

$$A_1(a,0),\quad A_2(-a,0).$$

I quali si chiamano ***vertici*** dell'iperbole. Il segmento A_1A_2, lungo $2a$, (ma a volte anche la retta A_1A_2) si dice ***asse traverso*** dell'iperbole. Col termine *semiasse traverso* s'intende invece di solito il numero a.
Diversamente dall'ellisse [2] l'iperbole [4] non seca l'asse y. Tuttavia si conviene prendere in considerazione i due punti:

$$B_1(0,b),\quad B_2(0,-b).$$

Il segmento B_1B_2, lungo $2b$, (ma a volte anche la retta B_1B_2) si dice ***asse non traverso*** dell'iperbole. Mentre col termine *semiasse non traverso* s'intende il numero b.
Facciamo notare che i fuochi dell'iperbole sono situati sull'asse traverso.

Osserviamo infine che, ragionando come nel caso dell'ellisse, si può giustificare che una retta può essere secante, tangente o esterna all'iperbole.
Un discorso particolare meritano però le rette passanti per l'origine O, che è il centro dell'iperbole. Le loro equazioni sono del tipo $y=mx$. Come al solito le intersezioni della generica di queste rette con l'iperbole [4] si trovano risolvendo il sistema delle loro equazioni. Troviamo subito la risolvente in x di tale sistema:

[5] $$(m^2a^2-b^2)\,x^2+a^2b^2=0.$$

Il suo discriminante è: $D=4\,a^2b^2\,(b^2-m^2a^2)$. Risulta $D=0$ per $b^2-m^2a^2=0$, cioè per $m=\pm b/a$.
Ma per questi valori di m l'equazione [5] è chiaramente impossibile.

Come si devono classificare dunque le rette di equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$?

Siccome $D=0$ si dovrebbe concludere che sono tangenti all'iperbole; ma poi, quando si cercano i punti di contatto, si trova che questi … svaniscono.
Tentiamo un altro approccio. L'equazione [4] dell'iperbole può essere scritta in questo modo:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \;\text{ o anche: }\; y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \;\text{ e infine: }\; y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\,.$$

Ora, questa scrittura evidenzia un fatto importante: man mano che ad x si attribuiscono valori sempre più grandi (in valore assoluto), la quantità a^2/x^2 acquista valori sempre più prossimi a 0 e, di conseguenza, la quantità:

$$1-\frac{a^2}{x^2}$$

li acquista sempre più prossimi ad 1 e, per questo, l'equazione suddetta tende ad identificarsi con l'equazione:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\,.$$

Tutto ciò si può esprimere dicendo che da un certo punto in poi, sia che ci si sposti verso le x positive sia verso le x negative, l'iperbole tende a confondersi con le rette di equazioni:

$$y = -\frac{b}{a}x,\;\; y = \frac{b}{a}x.$$

Queste rette sono chiamate ***asintoti*** dell'iperbole [4].
Ritornando all'equazione [5], siccome:

$$D>0 \text{ per } -\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a} \;\text{ mentre }\; D<0 \text{ per } m<-\frac{b}{a} \text{ oppure } m>\frac{b}{a},$$

possiamo concludere che solo le rette interne agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi secano l'iperbole; la quale pertanto è completamente contenuta in quegli angoli.
Tutte le precedenti informazioni – che, nei casi particolari in cui a, b sono effettivamente conosciuti, possono essere integrati con la ricerca di qualche punto particolare dell'iperbole – permettono il disegno della curva (Fig. 7).

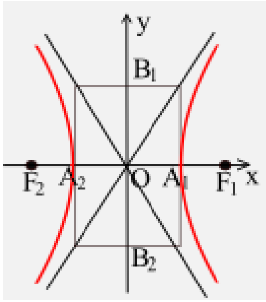

FIG. 7

44.2.3 Qualche altra considerazione.

- Il rettangolo di lati:

  $$x=a,\; x=-a,\; y=b,\; y=-b$$

  ha come rette diagonali quelle di equazioni:

  $$y = -\frac{b}{a}x,\;\; y = \frac{b}{a}x$$

  cioè gli asintoti dell'iperbole.
- Il numero:

  $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

  si chiama ***eccentricità*** dell'iperbole. Si tratta evidentemente un numero maggiore di 1. Ma è tanto più prossimo ad 1 quanto più b è piccolo rispetto ad a, cioè quanto più sono piccoli gli angoli formati dagli asintoti, entro cui è contenuta l'iperbole.
- Se nel riferimento cartesiano prefissato è scelto l'asse y come retta dei fuochi, l'equazione [4] assume questa forma:

  [6] $$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

  e l'iperbole che essa rappresenta ha ora come vertici due punti dell'asse y (Fig. 8):

  $$A_1(0,a) \;\text{ e }\; A_2(0,-a).$$

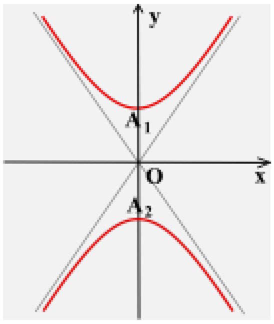

FIG. 8

I suoi asintoti sono le rette di equazioni:

$$y = \pm \frac{a}{b} x\,.$$

- Mentre ogni equazione [4] o [6] rappresenta un'iperbole, non è vero che ogni iperbole è rappresentata, nel piano cartesiano (Oxy), da un'equazione del tipo [4] o del tipo [6].
  Tra breve ci occuperemo di due tipi di equazioni che, pur differendo dalla [4] e dalla [6], rappresentano pur sempre delle iperboli. Nondimeno anch'essi sono dei tipi particolari.

44.2.4 ESERCIZIO. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1\,.$$

Trovare le sue intersezioni con le rette passanti per il punto $(1{,}0)$ e parallele ai suoi asintoti. Disegnare la curva.

RISOLUZIONE. L'iperbole ha i vertici nei punti:

$$A_1(2{,}0) \text{ e } A_2(-2{,}0).$$

I suoi asintoti hanno le seguenti equazioni:

$$y = \frac{x}{2}\,,\quad y = -\frac{x}{2}.$$

Una generica retta passante per il punto $P(1{,}0)$ ha equazione: $y=m(x-1)$. Se essa è parallela all'asintoto $y=\frac{x}{2}$, la sua equazione è: $y=\frac{1}{2}(x-1)$, ossia: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Se è parallela all'asintoto $y=-\frac{x}{2}$, la sua equazione è: $y=-\frac{1}{2}(x-1)$, ossia: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Le intersezioni di ciascuna di queste due rette con l'iperbole si trovano risolvendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene il punto $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$; dal secondo il punto $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right)$.

Prova da solo a disegnare la figura.

44.2.5 Alcuni esercizi per te.

1. Disegna i grafici dell'ellisse di equazione:

$$\text{(a)}\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1\,; \qquad \text{(b)}\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1\,.$$

2. Considerata l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

determina i parametri a^2, b^2 in modo che l'iperbole che la rappresenta:

a) abbia un vertice nel punto $\left(0,2\sqrt{3}\right)$ e un fuoco nel punto $(0,4)$;

b) abbia semidistanza focale $\sqrt{5}$ e passi per il punto $\left(2,\sqrt{2}\right)$;

c) abbia semiasse traverso 3 ed eccentricità $5/3$;

d) passi per i punti $(-3,2)$ e $\left(5,2\sqrt{5}\right)$;

e) abbia come asintoti le rette di equazioni y=2x e y=−2x e un vertice nel punto $(0,2)$.

[**R.** … ; b) $a^2=1$, $b^2=4$; c) $a^2=9$, $b^2=16$; d) $a^2=b^2=5$; …]

44.3 IPERBOLE EQUILATERA

44.3.1 Un'iperbole, i cui asintoti siano rette perpendicolari, si dice ***equilatera***.

Ora, con riferimento all'equazione [4], gli asintoti dell'iperbole risultano perpendicolari se:

$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)=-1,\ \text{ ossia: } b^2=a^2.$$

Stessa conclusione se il riferimento è all'equazione [6].

Ora, essendo a, b entrambi positivi, risulta $b^2=a^2$ se e solo se b=a. Dunque: l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri assi è la seguente:

[7] $$\mathbf{x^2-y^2=\pm a^2}$$

dove vale il segno "+" o il segno "–" a seconda che l'asse traverso coincida con l'asse x (Fig. 9) o con l'asse y (puoi disegnare da te il grafico).

Su questo argomento non avremmo altro da aggiungere a quanto abbiamo già detto con riguardo ad un'iperbole qualsiasi della forma [4] o [6].

Ma in questo caso l'iperbole, avendo per l'appunto gli asintoti perpendicolari, può essere trasformata, con un'opportuna rotazione, in modo da far coincidere questi asintoti con gli assi di riferimento.

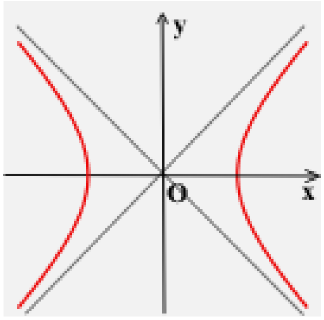

FIG. 9

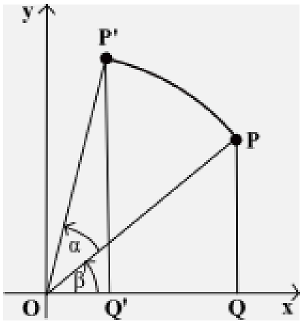

FIG. 10

44.3.2 Per trasformare l'iperbole equilatera di figura 9 in modo che i suoi asintoti coincidano con gli assi di riferimento è sufficiente una rotazione di ampiezza α=45° intorno ad O. Ma per procedere abbiamo bisogno delle equazioni di questa trasformazione, cioè delle relazioni che permettono di passare dalle coordinate (x,y) di un generico punto P del piano alle coordinate (x',y') del punto P' trasformato di esso in base alla rotazione suddetta (Fig. 10). Chiamate allora Q e Q' le proiezioni rispettivamente di P e P' sull'asse x e constatato che OP'=OP, si ha:

$$x'=\overline{OQ'}=\overline{OP'}\cos(45°+\beta)=\overline{OP}(\cos 45°\cos\beta-\sin 45°\sin\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{OP}\cos\beta-\overline{OP}\sin\beta\right),$$

$$y=\overline{Q'P'}=\overline{OP'}\sin(45°+\beta)=\overline{OP}(\sin 45°\cos\beta+\cos 45°\sin\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{OP}\cos\beta+\overline{OP}\sin\beta\right),$$

D'altro canto: $x=\overline{OQ}=\overline{OP}\cos\beta$ e $y=\overline{QP}=\overline{OP}\sin\beta$.

Di modo che le equazioni cercate sono le seguenti:

$$x'=\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}, \quad y'=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

44.3.3 A questo punto, per trovare la trasformata dell'equazione [7], esprimiamo dapprima x, y in funzione di x', y'. Si ottiene:

$$x=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y=-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}.$$

In base ad esse la [7] diventa:

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2;$$

ossia, dopo alcune facili elaborazioni:

$$x'y'=\frac{a^2}{2};$$

o anche, esprimendo – come siamo soliti fare – le coordinate correnti con x, y piuttosto che con x', y':

$$x\,y=\frac{a^2}{2}.$$

Il grafico di questa iperbole (Fig. 11), asintoti compresi, si ottiene naturalmente da quello dell'iperbole [7] (Fig. 9), facendolo ruotare di 45° in senso antiorario intorno ad O.

Se, adesso, si ribalta questo grafico intorno all'asse x (il che avviene con la simmetria assiale di equazioni x'=x, y'=−y) si ottiene l'iperbole (Fig. 12) di equazione:

$$x\,y=-\frac{a^2}{2}.$$

In generale, dunque, ogni equazione del tipo:

[8] $$\mathbf{x\,y=k}$$

dove $k\in\mathbb{R}_0$, rappresenta una **iperbole equilatera riferita ai propri asintoti**.

Essa è situata nel 1° e nel 3° quadrante degli assi se k>0 (Fig. 11), nel 2° e nel 4° quadrante se k<0 (Fig. 12). Si può trovare poi facilmente che il suo semiasse traverso è $a=\sqrt{2|k|}$, mentre la sua semidistanza focale è $c=2\sqrt{|k|}$.

Per concludere con l'equazione [8], facciamo notare che può mettersi nella forma:

$$\mathbf{y=\frac{k}{x}}$$

ed esprime, come si sa, la nota **legge della proporzionalità inversa**.

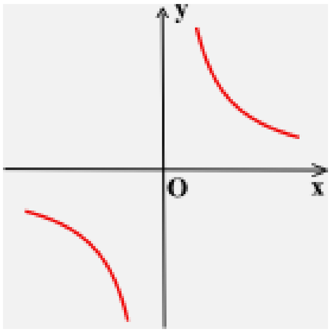

FIG. 11

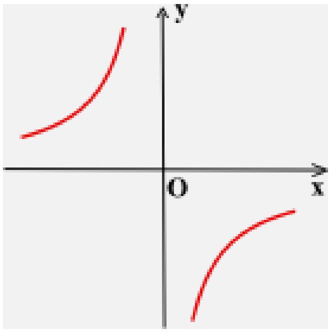

FIG. 12

44.3.4 Un'iperbole di equazione [8] può essere ulteriormente trasformata mediante una traslazione. Ricordiamo a tale riguardo che le equazioni di siffatta trasformazione sono:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b;$$

dove a, b sono le componenti della traslazione. Da qui segue:

$$x = x' - a, \quad y = y' - b .$$

In base a queste la [8] diventa: $(x' - a)(y' - b) = k$, ossia, dopo alcuni semplici passaggi:

$$x'\, y' - b\, x' - a\, y' - k = 0.$$

O anche, ritornando alle solite coordinate correnti x, y:

[9] $$\mathbf{x\, y - b\, x - a\, y - k = 0}.$$

Equazione che può essere scritta anche in questo modo:

[10] $$\mathbf{y = \frac{b\, x + k}{x - a}} .$$

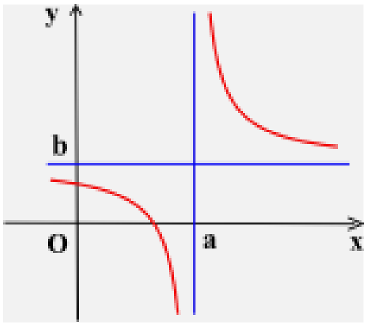

FIG. 13

Il grafico di questa iperbole (Fig. 13), asintoti compresi, si può pensare ottenuto da quello dell'iperbole [8], rappresentata in figura 11, facendolo traslare del vettore di componenti (a,b). Di modo che l'equazione [9], come anche la [10], rappresenta una **iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi di riferimento**; più precisamente con asintoti di equazioni x=a, y=b. Tutto questo però a patto che sia $k \neq -ab$. Se, infatti, fosse $k = -ab$, la [9] diventerebbe:

$$x\, y - b\, x - a\, y + a\, b = 0,$$

da cui:

$$x\,(y - b) - a\,(y - b) = 0,$$

o anche:

$$(x - a)(y - b) = 0.$$

E questa equazione si spezza in queste altre due:

$$x - a = 0, \quad y - b = 0;$$

le quali rappresentano evidentemente una coppia di rette: per la precisione gli asintoti della generica iperbole [9]. In questo caso si usa dire che l'iperbole [9] *degenera* nei suoi asintoti e l'iperbole si dice appunto ***degenere***.

44.3.5 Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi riguardanti l'iperbole equilatera:

1. Disegna i grafici delle seguenti funzioni:

   a) $y = \sqrt{x^2+3}$, $y = \sqrt{x^2-3}$. b) $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{1}{2x}$;

   c) $y = \frac{x+2}{x}$, $y = \frac{3-x}{2+x}$; d) $y = 2 + \frac{1}{x}$, $y = 1 - \frac{1}{2x}$.

2. Quante, fra le rette passanti per il punto (0,1) e aventi pendenza positiva, risultano tangenti all'iperbole di equazione xy=k, con k>0?

   [A] Nessuna. [B] Due. [C] Infinite. [D] Un numero imprecisato.

   Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

3. Considerata l'equazione:

   $$y = \frac{a\,x + b}{2\,x},$$

   determina i parametri a, b in modo che l'iperbole che la rappresenta:

   a) passi per i punti (1,1) e (2,–1);

   b) passi per il punto (1,0) ed abbia come asintoto la retta y=2;

   c) sia tangente alla retta y=x nel punto di ascissa 1;

   d) abbia un vertice nel punto (2,4).

   [**R.** a) a=–6, b=8; b) a=4, b=–4; c) a=4, b=–2; d) a=4, b=8]

4. Nella figura sottostante (Fig. 14) è disegnata un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani. Trovarne l'equazione.

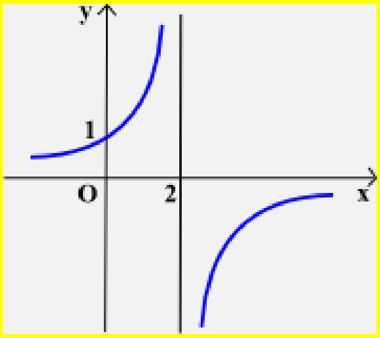

FIG. 14

5. Considera l'equazione:

   $$a\,x\,y + b\,x + c\,y + d = 0$$

   dove a, b, c, d sono parametri reali. Determina sotto quali condizioni per tali parametri l'equazione rappresenta un'iperbole non degenere. [**R.** a≠0 e ad≠bc]

VERIFICHE

Avvertenza. Negli esercizi in cui non è detto esplicitamente, ma è sottinteso che c'è, il piano della figura s'intende riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Ellisse (nn. 1-13).

1. Disegnare l'ellisse di equazione:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; d) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

2. Disegnare l'ellisse di equazione:

a) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$; b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{15}=1$; c) $4\,x^2+9\,y^2=36$; d) $9\,x^2+4\,y^2=36$.

3. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

a) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. b) $y=2\sqrt{1-x^2}$; $y=-2\sqrt{1-x^2}$.

c) $y=\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}$; $y=-\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}$.

4. Considerata l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

determinare i parametri a^2, b^2 in modo che l'ellisse che la rappresenta abbia:

a) due vertici nei punti $(3,0)$ e $(0,2)$;
b) un fuoco nel punto $(0,2)$ e un vertice nel punto $(2,0)$;
c) un fuoco nel punto $(3,0)$ e passi per il punto $(5,0)$;
d) un vertice nel punto $(0,4)$ e passi per il punto $\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
e) un fuoco nel punto $(1,0)$ ed eccentricità uguale a $1/4$.

5. Considerata l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

determinare i parametri a^2, b^2 in modo che l'ellisse che la rappresenta passi per i punti:

a) $(3,0)$, $(0,4)$; b) $(1,1)$, $(1,2)$; c) $(2,1)$, $(-1,1)$;

d) $(2\sqrt{2},1)$, $\left(1,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; e) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},-2\right)$, $(0,3)$; f) $(2\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},2)$.

[**R**. ... ; b) !? ; c) !? ; d) !? ; e) $a^2=4$, $b^2=9$; ...]

6. Fornire un'interpretazione grafica dei seguenti sistemi di equazioni:

1. $\begin{cases}2x^2+y^2=2\\ y=x\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x^2+4y^2=1\\ x-2y-1=0\end{cases}$ 3. $\begin{cases}3x^2+2y^2=6\\ y=2-x\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x^2+2y^2=4\\ x\sqrt{2}+2y=4\end{cases}$

7. Considerata l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

determinare i parametri a^2, b^2 in modo che l'ellisse che la rappresenta abbia un fuoco nel punto $(0,2)$ ed eccentricità uguale a $1/2$. Successivamente determinare un punto dell'ellisse sapendo che: 1) la somma delle sue coordinate è uguale a 2; 2) l'ascissa è il doppio dell'ordinata; 3) l'ordinata è il doppio dell'ascissa. [**R.** 1) $a^2=12$, $b^2=16$; ...]

8. Si consideri l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\,.$$

1) Trovare i suoi punti A e B di ascissa 2. 2) Determinare le tangenti all'ellisse nei punti A e B.

[**R.** ...; 2) $x \pm 2y = 4$]

9. Si consideri l'ellisse di equazione $x^2+4y^2=4$. 1) Condurre le tangenti ad essa per il punto C(2,2). 2) Chiamati A e B i punti in cui dette tangenti toccano l'ellisse, calcolare l'area del triangolo ABC.

$\left[\mathbf{R.}\ 1)\ \dots,\ y=\frac{3}{8}x+\frac{5}{4};\quad 2)\ \frac{16}{5}\right]$

10. Si consideri l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1\,.$$

1) Tra le rette di equazione $y=mx-m+2$ trovare le secanti, le tangenti e le rette esterne all'ellisse.
2) Tra le rette secanti determinare quella che passa per il centro dell'ellisse.
3) Chiamati A e B i punti in cui quest'ultima retta seca l'ellisse, trovare le tangenti all'ellisse medesima in tali punti.

[**R.** ...; 3) $x+y=\pm 3$]

11. Si consideri l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\,.$$

1) Tra le rette di equazione $2x+y=k$ trovare le secanti, le tangenti e le rette esterne all'ellisse.
2) Chiamate t' e t'' le due rette tangenti trovate, indicare con p' e p'' altre due rette tangenti all'ellisse e perpendicolari alle precedenti.
3) Calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dalle rette t', t'', p', p'' e quella del quadrilatero avente per vertici i punti in cui queste rette toccano l'ellisse.

[**R.** 1) rette secanti per $-4<k<4$, tangenti per $k=\pm 4$, ... ; 2) ...; p',p'' $\equiv x-2y\pm\sqrt{19}=0$; 3) ...]

12. Si determinino i coefficienti dell'equazione $ax^2+by^2=1$, con a, b numeri reali positivi, in modo che l'ellisse che la rappresenta abbia come tangente nel punto P di ascissa 2 la retta t di equazione $x+2y-8=0$. Condotta per P la perpendicolare p alla retta t e detti F' ed F'' i fuochi dell'ellisse, si verifichi che la retta p è bisettrice dell'angolo $F'\widehat{P}F''$. [**R.** $a=1/16$, $b=1/12$; ...]

13. Detto P un generico punto di un'ellisse, la retta p perpendicolare alla tangente all'ellisse in P si chiama ***normale*** all'ellisse in P. Dimostrare che la normale ad un'ellisse nel suo generico punto P è bisettrice dell'angolo $F_1\widehat{P}F_2$, essendo F_1 ed F_2 i fuochi dell'ellisse.

[N.B.: Calcoli piuttosto complessi]

14. Sono assegnate le ellissi di equazioni:

$$a)\ x^2+\frac{y^2}{2}=1\,,\quad \frac{x^2}{2}+y^2=1;\qquad b)\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Tra le ellissi passanti per i loro punti comuni e le cui equazioni sono scritte in forma canonica, c'è una circonferenza: determinarne l'equazione.

[N.B.: Si possono trovare i 4 punti comuni alle due ellissi assegnate e quindi trovare l'equazione della circonferenza passante per essi, ma è più economico utilizzare la teoria dei fasci. Vedere al riguardo i fasci di circonferenze – Unità 42, n. 42.4]

Iperbole (nn. 15-25).

15. Disegnare l'iperbole di equazione:

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$; c) $\frac{x^2}{4} - y^2 = -1$; d) $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$.

e) $4x^2 - 9y^2 = 36$; f) $4x^2 - 9y^2 = -36$; g) $4x^2 - 9y^2 = 1$; h) $4x^2 - 9y^2 = -1$.

16. Disegnare sullo stesso piano i grafici delle seguenti funzioni:

a) $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$, $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$. b) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$.

17. Considerata l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

determinare i parametri a^2, b^2 in modo che l'iperbole che la rappresenta:

a) abbia un vertice nel punto (4,0) e un fuoco nel punto (5,0);

b) abbia un vertice nel punto (2,0) e passi per il punto $(2\sqrt{5}, 2)$;

c) abbia un vertice nel punto $(-2,0)$ ed eccentricità uguale a 2;

d) passi per i punti $(2\sqrt{2}, 2)$ e $(-3, \sqrt{5})$;

e) abbia come asintoti le rette di equazioni y=2x e y=–2x e un fuoco nel punto (1,0).

[**R.** a) $a^2=16,\ b^2=9$; ... ; d) $a^2=b^2=4$; e) $a^2=\frac{1}{5}, b^2=\frac{4}{5}$]

18. Considerata l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

determinare i parametri a^2, b^2 in modo che l'iperbole che la rappresenta:

a) abbia un vertice nel punto $(2\sqrt{3}, 0)$ e un fuoco nel punto (4,0);

b) abbia semidistanza focale uguale a $\sqrt{5}$ e passi per il punto $(\sqrt{2}, 2)$;

c) abbia semiasse traverso uguale a 3 ed eccentricità uguale a $5/3$;

d) passi per i punti $(-3,2)$ e $(5, 2\sqrt{5})$;

e) abbia per asintoti le rette di equazioni $y = \frac{x}{2}$ e $y = -\frac{x}{2}$ e un vertice nel punto (2,0).

19. Fornire un'interpretazione grafica dei seguenti sistemi di equazioni:

1. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 16x^2 - 9y^2 = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

20. Considerata l'equazione $9x^2 - 16y^2 = 9$, determinare un punto sull'iperbole che la rappresenta sapendo che:

1) la somma delle sue coordinate è uguale a 4;

2) l'ascissa è il triplo dell'ordinata;

3) l'ordinata è il triplo dell'ascissa.

[**R.** 1) $x=\frac{64+3\sqrt{249}}{7}, y=-\frac{36+3\sqrt{249}}{7}$; $x=\frac{64-3\sqrt{249}}{7}, y=-\frac{36-3\sqrt{249}}{7}$; 2)...; 3) !?]

21. Si consideri l'iperbole di equazione $x^2 - 2y^2 = 8$. 1) Trovare i punti, A e B, in cui essa è intersecata dalla retta x=4. 2) Determinare le tangenti all'iperbole in tali punti. [**R.** ...; 2) $x \pm y = 2$]

22. Si consideri l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 5$. 1) Tra le rette di equazione 3x–2y=k trovare le secanti, le tangenti e le esterne all'iperbole. 2) Chiamate t' e t" le due tangenti trovate, calcolare l'area del quadrilatero convesso avente per vertici i punti in cui esse intersecano gli asintoti dell'iperbole.

[**R.** 1) rette secanti per $k<-5$ oppure $k>5$, tangenti per $k=\pm 5, \dots$; 2) $25/2$]

23. Si consideri l'iperbole di equazione $9y^2 - 4x^2 = 1$. Condurre per il punto A(½,1) le rette tangenti, secanti ed esterne ad essa.

24. Si determinino i coefficienti dell'equazione $ax^2 - by^2 = 1$, con a, b numeri reali positivi, in modo che l'iperbole che la rappresenta abbia come tangente nel punto P di ascissa 6 la retta t di equazione $3x-2y=8$. Verificare che il quadrilatero convesso avente per vertici i fuochi dell'iperbole e i punti in cui la retta t interseca le tangenti all'iperbole nei suoi vertici è un rettangolo. [**R.** $a=1/16$, $b=1/20$; ...]

25. Si consideri l'equazione $(a+1)x^2+ay^2 = 1$.
1) Si calcoli per quali valori del parametro reale a essa rappresenta un'iperbole.
2) Fra queste iperboli si trovi quella che risulta tangente alla retta t di equazione $2x-3y=2$.
3) Detto P il punto in cui t tocca l'iperbole, verificare che P è il punto medio del segmento avente per estremi i punti in cui t seca gli asintoti dell'iperbole.

[**R.** ...; 2) $x^2 - 3y^2 = 4$; ...]

Iperbole equilatera (nn. 26-40).

26. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

1. $y=\dfrac{1}{|x|}$ 2. $y=-\dfrac{1}{|x|}$ 3. $y=\dfrac{|x|}{x-1}$ 4. $y=\dfrac{|x|}{x+2}$.

5. $y=\dfrac{|x|-1}{x}$ 6. $y=\dfrac{x}{|x|-1}$ 7. $y=\dfrac{|x-1|}{x}$ 8. $y=\dfrac{x}{|x-1|}$.

27. Considerata l'equazione:
$$y=\frac{a\,x+b}{x-2}$$
determinare i parametri a, b in modo che l'iperbole che la rappresenta:
a) passi per i punti $(0,\frac{1}{2})$ e $(1,-1)$;
b) passi per il punto $(1,-1)$ ed abbia come asintoto la retta $y=1$;
c) sia tangente alla retta $y=-x$ nel punto di ascissa 1;
d) abbia un vertice nel punto (1,0).

28. Considerata l'equazione:
$$y=\frac{a\,x+b}{x+c}$$
determinare i parametri a, b, c in modo che l'iperbole che la rappresenta:
a) passi per i punti $(2,2), (-1,-1), (-2,0)$;
b) passi per i punti $(0,2), (1,2), (-1,3)$; (*attenzione!*)
c) passi per l'origine O degli assi coordinati ed abbia per asintoti le rette $x=1$ ed $y=2$.

[**R.** ... ; c) $a=2, b=0, c=-1$]

29. Si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy=2$.
1) Trovare le coordinate dei suoi vertici e dei suoi fuochi. 2) Condurre la tangente t all'iperbole nel suo punto M di ascissa 1. 3) Chiamati A e B i punti in cui la retta t seca gli assi di riferimento, verificare che M è il punto medio del segmento AB.

[**R.** 1) $V'(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $F'(2,2)$, ... ; 2) $y=-2x+4$; 3) ...]

30. Si consideri l'equazione:
$$y=\frac{2\,x+a}{x-2\,a}$$

dove a è un parametro reale non nullo.

1) Spiegare perché essa rappresenta un'iperbole equilatera per ogni valore di a. 2) Tra le iperboli assegnate disegnare quella che ha come tangente la retta y=x–2a. 3) Calcolare la distanza del punto in cui questa retta tocca l'iperbole dal centro della stessa. [**R.** ...; 2) a=–1/5; 3) ...]

31. Si consideri l'equazione:

$$y = \frac{m\,x + 1}{x - m}$$

dove m è un parametro reale.

1) Stabilire se per qualche valore di m l'equazione rappresenta un'iperbole degenere. 2) Verificare che tra le equazioni assegnate esistono due iperboli che, sulla retta t di equazione y=x, intercettano una corda lunga 4. [**R.** 1) … ; 2) m=±1]

32. Tra le iperboli di equazione:

$$y = \frac{a\,x + 2}{x + b}$$

determinare quella che risulta tangente alla retta t di equazione 2x+5y=4 nel punto A di ascissa 2. La perpendicolare in A alla retta t interseca ulteriormente l'iperbole trovata nel punto B. Calcolare l'area del triangolo ABC, dove C è il centro di simmetria dell'iperbole. [**R.** a=–1, b=1/2; ...]

33. Tra le iperboli di equazione:

$$y = \frac{1}{a\,x + b}$$

con a, b numeri reali positivi, determinare quella che ha un vertice nel punto (0,1). Studiare quindi il comportamento delle rette 2x+y = k rispetto all'iperbole trovata, quando k varia nell'insieme dei numeri reali. [**R.** a=b=1; ...]

34. Tra le iperboli di equazione:

$$y = \frac{a\,x + b}{x + c}$$

determinare quella che ha un vertice nel punto (0,0) ed è tangente alla retta x+y+2=0. Studiare quindi il comportamento delle rette 2x–my+1=0 rispetto all'iperbole trovata, quando m varia nell'insieme dei numeri reali. [**R.** a=–1/2, b=0, c=1/2; ...]

35. È data la seguente funzione reale di variabile reale:

$$y = 1 + \frac{x+3}{2x-3}\ ,\ \ x > \frac{3}{2}\,.$$

a) Disegnarne il grafico G.

b) Per valori maggiori di un determinato valore di x la frazione $\frac{x+3}{2x-3}$ è una frazione propria. Trovare questo valore.

c) Dimostrare che esistono tre punti del grafico G, e tre soltanto, le cui coordinate sono entrambe numeri interi.

36. I lati AB e BC del parallelogramma ABCD misurano rispettivamente 8 cm e $4\sqrt{2}$ cm e anche la diagonale BD misura $4\sqrt{2}$ cm. Chiamato E il centro del parallelogramma, indicare con M il punto in cui il lato AB è intersecato dalla perpendicolare alla diagonale AC condotta per E e con N il punto in cui lo stesso lato AB è intersecato dalla perpendicolare alla diagonale BD condotta per E. Calcolare le misure dei segmenti AN, NM, MB. Successivamente, indicati con P un generico punto del segmento [AN] e con Q il punto in cui il lato [AB] è intersecato dalla retta perpendicolare alla retta PE condotta per E, esprimere la distanza di Q da A in funzione della distanza t di P da A e tracciare il grafico della funzione ottenuta.

[N.B.: Si può ricorrere sia alla geometria sintetica sia alla geometria analitica. Naturalmente, nel secondo caso, bisogna riferire il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani]

$\left[\textbf{R.}\ 4\text{ cm},\ \frac{8}{3}\text{cm},\ \frac{4}{3}\text{cm};\ \text{dist}(Q,A)=\frac{6\,t-40}{t-6},\ \text{con } 0\le t\le 4\right]$

37. I cateti AB e AC del triangolo rettangolo ABC misurano rispettivamente 4 e 2 rispetto ad una medesima unità di misura. Indicati con P un punto interno al cateto AB e con Q un punto interno al cateto AC, si sa che sono tangenti esternamente la circonferenza avente il centro in P e passante per B e la circonferenza avente il centro in Q e passante per C. Posto uguale ad x il raggio della prima circonferenza ed uguale ad y quello della seconda, esprimere y in funzione di x e tracciare il grafico della funzione ottenuta. Le due circonferenze in questione possono essere congruenti? $\left[\textbf{R.}\ \ y=\frac{10-4\,x}{2+x}\right]$

38. L'equazione dei punti coniugati di uno specchio, avente raggio di curvatura R, è la seguente:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R}$$

dove p, q sono le distanze del punto oggetto e del punto immagine dallo specchio. Dopo aver espresso q in funzione di p, rappresentare graficamente la funzione in un piano (Opq) e trarne qualche conclusione di ordine fisico. In particolare:
- Dove si forma l'immagine quando l'oggetto si trova alla distanza $R/2$ dallo specchio?
- Dove quando si trova alla distanza R?
- Dove si forma l'immagine quando l'oggetto si trova molto lontano dallo specchio (teoricamente all'infinito)?

39. Tra le parabole aventi l'asse parallelo all'asse y e le iperboli equilatere aventi gli asintoti paralleli agli assi di riferimento trovare quelle passanti per il punto A(2,2) e tangenti alla bisettrice del 2° quadrante nell'origine O del sistema di riferimento.
Trovare poi sotto quale angolo le due curve s'intersecano nel punto A (vale a dire qual è l'angolo formato dalle tangenti alle due curve in A). $\left[\textbf{R.}\ y=x^2-x\,,\ \ y=\frac{x}{x-1}\ ;\ \tan\alpha=2\right]$

40. Sono assegnate le iperboli di equazioni:

$$a)\ \ x^2-\frac{y^2}{2}=1\,,\quad \frac{x^2}{2}-y^2=1;\qquad b)\ \ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1,\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Tra le iperboli passanti per i loro punti comuni e le cui equazioni sono scritte in forma canonica, c'è un'iperbole equilatera: determinarne l'equazione. [**R.** Cfr. N.B. esercizio n. 14]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che ogni ellisse, considerata in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove a, b sono numeri reali positivi qualsiasi?

2. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove a, b sono numeri reali positivi qualsiasi. È vero che i suoi fuochi sono situati sull'asse delle ascisse?

3. È vero che ogni equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove a, b sono numeri reali positivi qualsiasi, rappresenta un'iperbole nel piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy)?

4. Quando un'iperbole si dice equilatera?

5. È vero che ogni equazione del tipo $xy+ax+by+c=0$, con a, b, c numeri reali qualsiasi, purché non tutti contemporaneamente nulli, rappresenta, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), un'iperbole con asintoti paralleli agli assi di riferimento?

6. Qual è l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti?

RISPOSTE.

1. No, solo se gli assi cartesiani coincidono con gli assi di simmetria dell'ellisse.

2. No, ma solo se $a>b$, cioè se l'ellisse è "schiacciata" secondo l'asse y. Se, al contrario, essa è "schiacciata" secondo l'asse x, i suoi fuochi si trovano sull'asse y.

3. Sì. Ma non è vero il contrario, cioè non è vero che ogni iperbole è rappresentata da un'equazione di quel tipo.

4. Quando i suoi assi di simmetria sono perpendicolari. In un'iperbole equilatera gli assi, traverso e non traverso, sono uguali.

5. No, ma solo se risulta $c\neq -ab$. In caso contrario, infatti, l'equazione considerata si può porre nella forma $(x+a)(y+b)=0$ e l'iperbole, pertanto, degenera nelle due rette $x+a=0$ e $y+b=0$.

6. L'equazione è $xy=k$, dove k è un numero reale qualsiasi, purché diverso da 0. In particolare: se $k>0$ l'iperbole è situata nel 1° e 3° quadrante, se $k<0$ è situata nel 2° e 4° quadrante.