Prerequisiti:
- Proprietà delle isometrie e delle similitudini.
- Rappresentazione di punti, rette, coniche in un piano cartesiano.
- Risoluzione di equazioni e sistemi.
- Nozioni di trigonometria.

In linea di massima l'unità è rivolta al 2° biennio del Liceo Scientifico, compresa l'opzione scienze applicate.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *scrivere e riconoscere le equazioni di una isometria diretta e di una isometria speculare*
- *dimostrare le proprietà invarianti di un'isometria attraverso le sue equazioni*
- *scrivere e riconoscere le equazioni di una similitudine diretta e di una similitudine speculare*
- *dimostrare le proprietà invarianti di una similitudine attraverso le sue equazioni*
- *risolvere semplici problemi mediante l'uso delle equazioni delle trasformazioni geometriche*

Trasformazioni nel piano: rappresentazione analitica

Unità 46

46.1 ISOMETRIA

46.1.1 Ricordiamo la definizione di isometria e le sue proprietà:

L'isometria è una funzione biiettiva nel piano che conserva la distanza dei punti.

- Ogni isometria conserva:
  - l'allineamento dei punti;
  - il parallelismo delle rette;
  - l'ampiezza degli angoli.
- Le isometrie si ripartiscono in due classi:
  - le **isometrie dirette**, che lasciano invariato il verso di un angolo orientato;
  - le **isometrie speculari** (o *inverse*), che mutano il verso di un angolo orientato.
- Sono particolari isometrie dirette:
  - le **traslazioni**, che trasformano ogni retta in una retta parallela;
  - le **rotazioni** intorno ad un dato punto, detto *centro*. Tra queste è da annoverare la simmetria rispetto al centro (detta **simmetria centrale**), la quale trasforma ogni retta in una retta parallela.

In più di una occasione, in passato, abbiamo fatto intravedere la possibilità di uno studio delle isometrie e delle loro proprietà, e più in generale delle trasformazioni geometriche, condotto attraverso lo strumento algebrico, utilizzando le cosiddette equazioni della trasformazione geometrica. Riproponiamo, a questo riguardo, le equazioni delle particolari trasformazioni geometriche che abbiamo avuto occasione di prendere in considerazione. Il piano si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e la trasformazione presa in esame muta il punto P(x,y) nel punto P'(x',y'). Ecco allora le trasformazioni prese in esame negli studi precedenti e le relative equazioni:

- **traslazione di componenti (a,b):** **$x' = x+a, \quad y' = y+b;$**
- **simmetria rispetto all'asse x:** **$x' = x, \quad y' = -y;$**
- **simmetria rispetto all'asse y:** **$x' = -x, \quad y' = y;$**
- **simmetria rispetto all'origine O:** **$x' = -x, \quad y' = -y;$**
- **rotazione di 90° intorno ad O;** **$x' = -y, \quad y' = x;$**
- **rotazione di –90° intorno ad O:** **$x' = y, \quad y' = -x;$**
- **omotetia di centro O e caratteristica k:** **$x' = kx, \quad y' = ky.$**

Al fine di verificare se tutto ciò ti è sufficientemente chiaro, ti invitiamo a risolvere il seguente esercizio.

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto P(1,2) e la retta $r \equiv y=3x-1$. Trova le coordinate del punto e l'equazione della retta che si ottengono da quelli dati in seguito alla seguente trasformazione geometrica: a) traslazione di componenti (1,–2); b) simmetria rispetto all'asse x; c) simmetria rispetto all'asse y; d) simmetria rispetto all'origine O; e) rotazione di –90° intorno ad O; f) omotetia di centro O e caratteristica 1/2.
In ogni situazione disegna sullo stesso piano il punto e la retta dati e quelli trasformati.

46.1.2 Ci proponiamo adesso di approfondire ed ampliare l'argomento.
Incominciamo con le isometrie dirette, ricordando che:

Un'isometria diretta può essere concepita come la composizione di una rotazione intorno ad un punto dato con una traslazione di dato vettore.

Consideriamo allora, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), la trasformazione costituita dalla composizione della rotazione di ampiezza α intorno ad O con la traslazione di vettore $\vec{v}$ di componenti (a, b). Essa trasforma il punto $P(x, y)$ dapprima nel punto $P_1(x_1,y_1)$ e quindi in $P'(x',y')$ (Fig. 1).

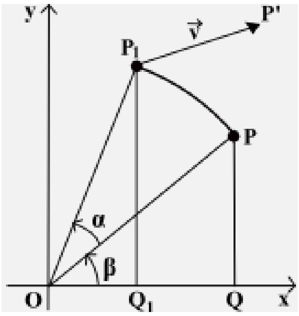

FIG. 1

Ci proponiamo di trovare le relazioni algebriche che legano le coordinate di P a quelle di P'.
A questo proposito osserviamo anzitutto che si ha:

$$x_1=\overline{OQ_1}=\overline{OP_1}\cos(\alpha+\beta)=\overline{OP_1}\,(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\overline{OP_1}\cos\alpha\cos\beta-\overline{OP_1}\sin\alpha\sin\beta\ ,$$
$$y_1=\overline{Q_1P_1}=\overline{OP_1}\sin(\alpha+\beta)=\overline{OP_1}\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\overline{OP_1}\sin\alpha\cos\beta+\overline{OP_1}\cos\alpha\sin\beta\ .$$

D'altronde: $x=\overline{OQ}=\overline{OP}\cos\beta$, $y=\overline{QP}=\overline{OP}\sin\beta$. Perciò, tenendo presente che: $OP_1=OP$:

$$x_1=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\quad y_1=x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Siccome $\overrightarrow{P_1P'}=\vec{v}$, prendendo le componenti dei due vettori, vale a dire: $(x'-x_1,\ y'-y_1)$ e (a,b), si ha:

$$x'-x_1=a,\quad y'-y_1=b;$$

da cui segue:

$$x'=x_1+a,\quad y'=y_1+b.$$

In definitiva ecco le relazioni cercate, dette **equazioni della isometria diretta**:

[1] $$\mathbf{x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a,\quad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b.}$$

In realtà esse non definiscono una sola isometria diretta ma infinite a seconda degli infiniti valori che si possono attribuire ai tre parametri reali a, b, α.

46.2 PROPRIETÀ DELL'ISOMETRIA

46.2.1 Le proprietà dell'isometria possono essere dimostrate utilizzando le sue equazioni. È quello che andiamo a fare.

- PROPRIETÀ 1. **Ogni isometria diretta è una funzione biiettiva nel piano**.

DIMOSTRAZIONE. Basta far vedere che non solo, come attestano le [1], ad ogni punto P(x,y) è associato uno ed un sol punto P'(x',y'), ma pure che ad ogni P'(x',y') le [1] associano uno ed un sol punto P(x,y). Per questo è sufficiente risolvere il sistema delle [1], considerate come equazioni in x, y.
Si trova per l'appunto:

[2] $$x=(x'-a)\cos\alpha+(y'-b)\sin\alpha,\quad y=-(x'-a)\sin\alpha+(y'-b)\cos\alpha\ .$$

- PROPRIETÀ 2. **Ogni isometria diretta conserva la distanza dei punti.**

DIMOSTRAZIONE. Considerati due punti $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, i loro trasformati A' e B' in base all'isometria [1] hanno coordinate $(x_{A'},y_{A'})$ e $(x_{B'},y_{B'})$ tali che:

$$x_{A'}=x_A\cos\alpha-y_A\sin\alpha+a,\quad y_{A'}=x_A\sin\alpha+y_A\cos\alpha+b;$$
$$x_{B'}=x_B\cos\alpha-y_B\sin\alpha+a,\quad y_{B'}=x_B\sin\alpha+y_B\cos\alpha+b.$$

Per cui:

$$\overline{A'B'}^2 = (x_{A'} - x_{B'})^2 + (y_{A'} - y_{B'})^2 =$$
$$= [(x_A \cos\alpha - y_A \sin\alpha + a) - (x_B \cos\alpha - y_B \sin\alpha + a)]^2 +$$
$$+ [(x_A \sin\alpha + y_A \cos\alpha + b) - (x_B \sin\alpha + y_B \cos\alpha + b)]^2 =$$
$$= (x_A - x_B)^2 \cos^2\alpha + (y_A - y_B)^2 \sin^2\alpha - 2\,(x_A - x_B)\,(y_A - y_B) \cos\alpha \sin\alpha +$$
$$+ (x_A - x_B)^2 \sin^2\alpha + (y_A - y_B)^2 \cos^2\alpha + 2\,(x_A - x_B)\,(y_A - y_B) \cos\alpha \sin\alpha =$$
$$= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = \overline{AB}^2 .$$

Di conseguenza: A'B'=AB. [c.v.d.]

- PROPRIETÀ 3. **Ogni isometria diretta conserva l'allineamento dei punti.**

DIMOSTRAZIONE. In sostanza bisogna dimostrare che l'isometria trasforma una retta in una retta. Considerata allora la retta s di equazione $px+qy+r=0$, sia s' la sua trasformata in base alle equazioni [1]. L'equazione di s' si ottiene chiaramente dopo aver espresso nelle [1] x, y in funzione di x', y' come dettato dalle [2]. Per cui quest'equazione è:

$$p\,[(x' - a) \cos\alpha + (y' - b) \sin\alpha] + q\,[-(x'-a) \sin\alpha + (y'-b) \cos\alpha] + r = 0.$$

Da qui, dopo alcune facili elaborazioni, si trova:

$$(p \cos\alpha - q \sin\alpha)\, x' + (p \sin\alpha + q \cos\alpha)\, y' + [(aq - bp) \sin\alpha - (ap + bq) \cos\alpha + r] = 0.$$

Dopo aver constatato che le quantità:

$$p \cos\alpha - q \sin\alpha,\quad p \sin\alpha + q \cos\alpha,\quad (aq - bp) \sin\alpha - (ap + bq) \cos\alpha + r$$

sono numeri reali poiché ottenute moltiplicando e sommando numeri reali, si può concludere che l'equazione trovata è ancora quella di una retta. [c.v.d.]

- PROPRIETÀ 4. **Ogni isometria diretta conserva il parallelismo delle rette. Che è come dire che ogni isometria conserva la direzione delle rette.**

DIMOSTRAZIONE. Siano s, t due rette parallele. Le loro equazioni sono allora del tipo seguente:

$$px + qy + r = 0,\quad px + qy + r' = 0.$$

È facile spiegare (basta esaminare la conclusione precedente) che le loro trasformate s', t' in base alle [1] hanno equazioni del tipo:

$$P\,x + Q\,y + R = 0,\quad P\,x + Q\,y + R' = 0$$

e pertanto le due rette sono parallele. [c.v.d.]

- PROPRIETÀ 5. **Ogni isometria diretta conserva l'ampiezza e il verso degli angoli.**

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'angolo orientato (r,s) delle due rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$y = m_r\, x + n_r,\quad y = m_s\, x + n_s.$$

Come si sa:

$$\tan(r,s) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} .$$

Andiamo a calcolare allora $\tan(r',s')$, dove r' ed s' sono le rette trasformate di r ed s in base alle [1]. Per la verità di queste rette ci interessa qui prendere in esame i soli coefficienti angolari. Si trova:

$$m_{r'} = \frac{\sin\alpha + m_r \cos\alpha}{\cos\alpha - m_r \sin\alpha} ,\quad m_{s'} = \frac{\sin\alpha + m_s \cos\alpha}{\cos\alpha - m_s \sin\alpha} .$$

Sicché:

$$\tan(r', s') = \frac{m_{s'} - m_{r'}}{1 + m_{r'} m_{s'}} = \frac{\frac{\sin\alpha + m_s \cos\alpha}{\cos\alpha - m_s \sin\alpha} - \frac{\sin\alpha + m_r \cos\alpha}{\cos\alpha - m_r \sin\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha + m_s \cos\alpha}{\cos\alpha - m_s \sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha + m_r \cos\alpha}{\cos\alpha - m_r \sin\alpha}} .$$

A conti fatti, dopo aver semplificato, si trova:

$$\tan(r', s') = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} = \tan(r, s) .$$

E questo significa che i due angoli orientati (r,s) ed (r’,s’), che possiamo supporre entrambi convessi, hanno uguali ampiezza e verso. [c.v.d.]

46.2.2 Dalle equazioni [1], ponendo $\alpha=0$ si ottengono le **equazioni della traslazione** di componenti (a,b):

[3] $$\mathbf{x' = x + a, \quad y' = y + b.}$$

Ponendo invece a=b=0 si ottengono le **equazioni della rotazione** di ampiezza α intorno ad O:

[4] $$\mathbf{x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.}$$

Ragionando sulle [3] come abbiamo fatto prima sulle [1], si trovano le proprietà della traslazione. Ragionando sulle [4] si trovano quelle della rotazione intorno al punto O.

46.2.3 Per trovare le equazioni di un’isometria speculare ricordiamo che:

Un’isometria speculare può essere concepita come la composizione di un’isometria diretta con una simmetria assiale.

Come isometria diretta prendiamo quella di equazioni:

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta + p, \quad y' = x\sin\beta + y\cos\beta + q.$$

Come simmetria assiale prendiamo quella rispetto all’asse x, le cui equazioni sono:

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Ebbene, il prodotto della prima per la seconda isometria dà luogo alla trasformazione di equazioni:

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta + p, \quad y' = -x\sin\beta - y\cos\beta - q;$$

le quali equazioni, ponendo $\beta=-\alpha$, p=a, q=–b, diventano:

[5] $$\mathbf{x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \quad y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + b}$$

Sono le **equazioni dell’isometria speculare**.

Si possono dimostrare le sue proprietà ragionando sulle [5] come abbiamo già fatto sulle [1].

46.2.4 Le equazioni [1] e [5] sono evidentemente casi particolari di queste altre:

[6] $$\mathbf{x' = a\,x + b\,y + c, \quad y' = a'\,x + b'\,y + c',}$$

dove a, b, c, a’, b’, c’ sono numeri reali qualsiasi a patto che:

- per ottenere le equazioni [1] di un’isometria diretta bisogna porre:

$$\mathbf{a' = -b, \qquad b' = a, \qquad ab' - a'b = 1};$$

- per ottenere le equazioni [5] di un’isometria speculare bisogna porre:

$$\mathbf{a' = b, \qquad b' = -a, \qquad ab' - a'b = -1}.$$

Come al solito, ragionando sulle [6], con le condizioni su evidenziate per i coefficienti, si ritrovano tutte le proprietà di una generica isometria.

46.2.5 Ti proponiamo adesso il seguente esercizio.

Nella figura sottostante (Fig. 2) sono disegnati due triangoli congruenti. Descrivi un’isometria che trasformi il triangolo ABC nel triangolo A’B’C’ e trovane le equazioni.

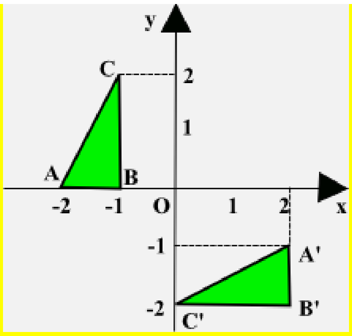

FIG. 2

46.3 SIMILITUDINE E SUE PROPRIETÀ

46.3.1 Ricordiamo la definizione di similitudine e le sue proprietà:

La similitudine** è **una funzione biiettiva nel piano che trasforma due punti A, B in due punti A', B' conservando il rapporto delle distanze

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}},$$

***detto* rapporto di similitudine.**

- Ogni similitudine conserva:
  - l'allineamento dei punti,
  - il parallelismo delle rette,
  - l'ampiezza degli angoli.
- Le similitudini si ripartiscono in due classi:
  - le **similitudini dirette**, quando l'isometria componente è diretta: queste similitudini conservano anche il verso degli angoli;
  - le **similitudini speculari** (o *inverse*), quando l'isometria componente è speculare: esse mutano il verso degli angoli.
- Sono particolari similitudini dirette:
  - le isometrie dirette;
  - le omotetie di dato centro.

L'isometria – la quale addirittura conserva la distanza dei punti e perciò detto rapporto è uguale ad 1 – è evidentemente una particolare similitudine.

46.3.2 Tutte le proprietà su elencate si possono ritrovare, come per le isometrie, dopo aver ottenuto le equazioni di una similitudine. Per la verità, riguardo all'omotetia, è stato proprio sulle sue equazioni che a suo tempo [1] abbiamo ragionato, evidenziandone alcune proprietà. Pertanto, su questa faccenda, rimandiamo a quanto già hai appreso, limitandoci qui a ricordare che le equazioni dell'omotetia di centro O – origine del sistema di riferimento cartesiano (Oxy) – e di caratteristica k sono le seguenti:

[7] $$\mathbf{x' = k\,x,\quad y' = k\,y\,.}$$

Componendo ora l'isometria di equazioni:

$$x' = px + qy + r,\quad y' = p'x + q'y + r,$$

(dove per i coefficienti p, q, r, p', q', r' valgono le note condizioni) con l'omotetia di equazioni [7], si

[1] Cfr-: Unità 30 – Omotetie e similitudini nel piano.

ottiene la similitudine di equazioni:

$$x' = kpx + kqy + kr, \quad y' = kp'x + kq'y + kr';$$

o anche, ponendo:

$$kp = a,\ kq = b,\ kr = c,\ kp' = a',\ kq' = b',\ kr' = c':$$

[8] $$\mathbf{x' = a\,x + b\,y + c, \quad y' = a'\,x + b'\,y + c'.}$$

Le [8], dove per i coefficienti valgono certe condizioni di cui diremo tra breve, sono le **equazioni della similitudine**.

46.3.3 A seconda che l'isometria componente sia diretta o speculare, la similitudine è a sua volta diretta o speculare.

- Nel primo caso – *similitudine diretta* – si ha:

  $$p' = -q, \quad q' = p, \quad pq' - p'q = 1;$$

  e di conseguenza, i coefficienti delle [8] devono soddisfare alle seguenti condizioni:

  $$\mathbf{a' = -b, \quad b' = a, \quad ab' - a'b = k^2.}$$

  Ricordando poi che:

  $$p' = -q = \cos\alpha \ \text{ e } \ q' = p = \sin\alpha,$$

  le [8] assumono la seguente forma particolare:

  [9] $$\mathbf{x' = k\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + c, \quad y' = k\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + c'.}$$

  Sono per l'appunto le **equazioni della similitudine diretta**. Da queste:

  - per k=1 si ritrovano le equazioni dell'isometria diretta;
  - per c=c'=0 ed α=0 si ritrovano le equazioni dell'omotetia di centro O.

- Nel caso della *similitudine speculare* si ha:

  $$p' = q, \quad q' = -p, \quad pq' - p'q = -1;$$

  e di conseguenza, con riferimento alle [8]:

  $$\mathbf{a' = b, \quad b' = -a, \quad ab' - a'b = -k^2.}$$

  Più precisamente, ricordando che:

  $$a' = b = \sin\alpha \ \text{ e } \ b' = -a = -\cos\alpha,$$

  dalle [8] si ottengono le **equazioni della similitudine speculare**:

  [10] $$\mathbf{x' = k\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + c, \quad y' = k\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha) + c'.}$$

  Da queste, per k=1 si ritrovano le equazioni dell'isometria speculare.

Ragionando nell'ordine sulle [8], [9] e [10], si ricavano analiticamente tutte le proprietà della similitudine, della similitudine diretta e della similitudine speculare.
Si tratta di ripetere pari pari il procedimento che abbiamo seguito per l'isometria.

46.3.4 Con riferimento alle equazioni [8] di una generica similitudine, il numero reale non nullo:

$$\mathbf{m = ab' - a'b}$$

si chiama ***modulo*** della similitudine.
Si dimostra che una superficie di area S è trasformata dalla similitudine di equazioni [8] in una superficie di area S' tale che:

$$\frac{\mathbf{S'}}{\mathbf{S}} = |\mathbf{m}|.$$

Non riportiamo la dimostrazione per le lungaggini che comporta ma ti proponiamo per esercizio di verificare la proprietà con riferimento al triangolo di vertici $A(0,0), B(2,0), C(0,1)$ ed al suo trasformato in base

alla similitudine di equazioni: $x'=2x-3y+1,\ y'=3x+2y$.
Ancora un esercizio.
Nella figura sottostante (Fig. 3) sono disegnati due triangoli simili. Descrivi una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' e trovane le equazioni. Qual è il modulo di questa similitudine? Verifica che il valore assoluto di tale modulo è uguale al rapporto fra l'area del triangolo A'B'C' e quella del triangolo ABC.

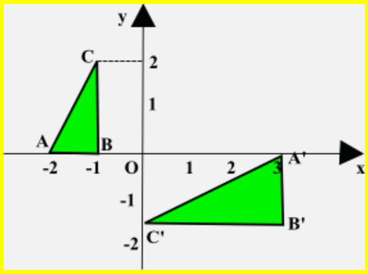

FIG. 3

46.4 AFFINITÀ: UN BREVE CENNO

46.4.1 Le equazioni:

[11] $$\mathbf{x' = a\,x + b\,y + c,\quad y' = a'\,x + b'\,y + c',}$$

si possono considerare dunque come equazioni sia di una isometria sia di una similitudine. Dipende tutto dalle condizioni alle quali si assoggettano i coefficienti.

- Nel caso dell'isometria, a seconda che risulti diretta o speculare, si ha rispettivamente:
$$a' = -b,\quad b' = a,\quad ab' - a'b = 1;$$
$$a' = b,\quad b' = -a,\quad ab' - a'b = -1.$$
- Nel caso della similitudine viene meno la condizione $ab'-a'b=\pm 1$ e, a seconda che essa sia diretta o speculare, si ha rispettivamente:
$$a' = -b,\ b' = a,\ \text{(di conseguenza: } ab' - a'b > 0);$$
$$a' = b,\ b' = -a,\ \text{(di conseguenza: } ab' - a'b < 0).$$
- Se facciamo cadere le ulteriori condizioni $(a'=-b, b'=a)$ e $(a'=b,\ b'=-a)$, purché manteniamo quest'altra:
$$\mathbf{ab' - a'b \neq 0},$$
che adesso deve essere esplicitamente precisata, le equazioni [11] definiscono una nuova trasformazione geometrica nel piano, più ampia delle precedenti, chiamata **trasformazione affine** (o semplicemente **affinità**). Le [11] sono pertanto le **equazioni dell'affinità**.

46.4.2 È evidente che sia le similitudini sia le isometrie sono particolari affinità.
Ricordando adesso che, nel passaggio dall'isometria alla similitudine, si perde la proprietà relativa alla conservazione della distanza dei punti, ci domandiamo se si perda qualche altra proprietà delle figure geometriche quando si passa all'affinità.
Intanto incominciamo a vedere quali proprietà delle figure rimangono invarianti. E col solito ragionamento scopriamo quanto segue.
Le affinità sono trasformazioni che conservano: a) l'allineamento dei punti, b) il parallelismo delle rette.

Si viene a perdere invece la conservazione dell'ampiezza degli angoli. Questo significa, per esempio, che un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza non si mantiene retto nella trasformazione affine. Ragion per cui la circonferenza non è mutata in una circonferenza (come avviene invece nella similitudine); essa viene invece trasformata in un'ellisse, come mostra quest'esempio particolare, il cui sviluppo completo lasciamo a te.

In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$.
Fa' vedere che l'affinità di equazioni $x'=x$, $y'=2y$ la muta in un'ellisse.

Più in generale si potrebbe dimostrare che:

Un'affinità trasforma una conica di un dato tipo in una conica dello stesso tipo.

Vale a dire: un'affinità trasforma un'ellisse in un'ellisse (la circonferenza è considerata una particolare ellisse), una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole.

Ma della dimostrazione di ciò non ci occupiamo e chiudiamo qui il discorso sull'affinità, mostrando comunque due figure (Figg. 4-5) che evidenziano la trasformazione affine della figura F in F', riassumendo alcune delle cose dette riguardo a questa trasformazione geometrica [2].

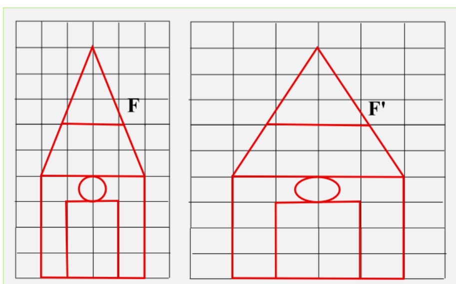

FIG. 4

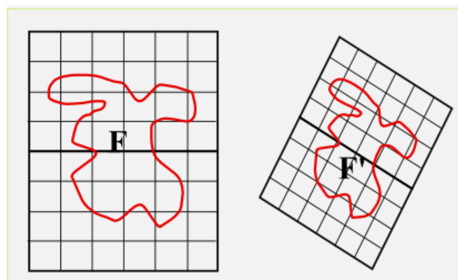

FIG. 5

46.5 ELEMENTI UNITI DI UNA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA

46.5.1 Data una trasformazione geometrica T, può capitare che qualche punto P venga trasformato da T in P medesimo: se ciò accade il punto P si dice **punto unito**.

Parimenti può verificarsi che qualche retta r venga trasformata da T in r medesima: in tal caso la retta r si dice **retta unita**.

Può infine accadere che tutti i punti di una retta siano punti uniti: in tal caso evidentemente anche la retta è unita. Una tale retta si chiama più propriamente **retta unita luogo di punti uniti**.

Non ci vuol molto a capire (basta rifarsi alla geometria elementare) che:

- nell'identità tutti i punti sono uniti e tutte le rette sono unite; anzi queste sono luoghi di punti uniti; (per la verità, nell'identità ogni figura è unita ed è luogo di punti uniti)
- in una traslazione generica non vi sono punti uniti, mentre ogni retta parallela al vettore della traslazione è unita;
- in una generica rotazione il centro della rotazione è l'unico punto unito, ma non vi sono rette unite;
- in una simmetria centrale ogni retta passante per il centro della simmetria (punto unito) è retta unita;

---

[2] NOTA BENE: Chi volesse saperne di più su questo argomento può consultare la cartella "Integrazione 4" e in essa il file "3 – Matematica – Fuori programma". È presente in questo medesimo sito ed è consultabile gratuitamente, come tutto il resto.

- in una simmetria assiale ogni punto dell'asse di simmetria è punto unito, per cui tale asse è retta unita luogo di punti uniti; inoltre è retta unita ogni perpendicolare all'asse di rotazione;
- in un'omotetia generica il suo centro è l'unico punto unito e ogni retta passante per esso è retta unita.

Si potrebbero ritrovare le precedenti conclusioni con considerazioni di geometria analitica, utilizzando le equazioni della trasformazione geometrica presa in esame. Ma il discorso da farsi sarebbe troppo lungo e non privo di insidie. Preferiamo sorvolare e riferirci allo specifico caso che di volta in volta si presenterà.

46.5.2 Occupiamoci allora di un paio di situazioni particolari, supponendo chiaramente che, in ciascuna di esse, il piano sia riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali.

- ESERCIZIO 1. Considerata la seguente trasformazione:

(A) $$x' = -x + 2\,,\;\; y' = y + 1\,,$$

stabilirne la natura e determinarne gli elementi uniti.

RISOLUZIONE. Le equazioni (A) sono un caso particolare delle equazioni [5] dell'isometria speculare. Basta porre nelle [5]: $\alpha=\pi$, $a=2$, $b=1$.

Tale isometria è ottenuta componendo la traslazione di equazioni:

$$x' = x - 2,\;\; y' = y + 1$$

con la simmetria assiale rispetto all'asse y le cui equazioni sono:

$$x' = -x\,,\;\; y' = y.$$

Una tale isometria speculare è chiamata pure ***glissosimmetria***.

Per la ricerca dei suoi punti uniti bisogna risolvere il sistema di equazioni:

$$x = -x + 2,\;\; y = y + 1;$$

il quale è evidentemente impossibile.

Dunque l'isometria in esame non ha punti uniti.

Per stabilire se ha rette unite consideriamo la generica retta di equazione:

(B) $$ax + by + c = 0,$$

con a, b non contemporaneamente nulli.

La sua trasformata in base alle (B) ha la seguente equazione:

(C) $$-ax + by + (2a + b + c) = 0\,.$$

Bisogna distinguere due casi:

- se $a\neq0$ la (B) e la (C) non possono mai coincidere;
- se $a=0$ coincidono solo se risulta $b=0$; il che, essendo già $a=0$, non può accadere.

Dunque l'isometria in esame non ha rette unite. In effetti:

Ogni glissosimmetria, cioè la composizione di una traslazione con una simmetria assiale, non ha punti uniti né rette unite.

- ESERCIZIO 2. Considerata la seguente trasformazione:

(A) $$x' = 3x + 4y,\;\; y' = -4x + 3y,$$

stabilirne la natura e determinarne gli elementi uniti.

RISOLUZIONE. Con riferimento alle equazioni [8] sono soddisfatte le condizioni $a'=-b$, $b'=a$; per cui le (A) rappresentano una similitudine diretta di modulo 5.

Tale similitudine si può pensare ottenuta componendo l'isometria diretta di equazioni:

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\,,\;\; y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$$

(più precisamente si tratta di una rotazione intorno ad O, di angolo α tale che $\tan\alpha = -4/3$) con l'omotetia di equazioni:

$$x' = 5\,x\,,\;\; y' = 5\,y\,.$$

Per ricercarne i punti uniti bisogna risolvere il sistema delle seguenti equazioni:

$$x = 3x + 4y, \qquad y = -4x + 3y\,.$$

Poiché esso ha l'unica soluzione $(0{,}0)$, la trasformazione ammette uno ed un solo punto unito: l'origine del sistema di riferimento.

Per stabilire se essa ha rette unite consideriamo la generica retta di equazione:

(B) $$mx + ny + p = 0,$$

con m, n non contemporaneamente nulli.

La sua trasformata in base alle (A) è la retta di equazione:

(C) $$(3m - 4n)\,x + (4m + 3n)\,y + p = 0.$$

Bisogna distinguere due casi:

- Se p≠0 la (B) e la (C) coincidono se risulta:
  $$3m - 4n = m \;\text{ e }\; 4m + 3n = n.$$
  L'unica soluzione di questo sistema nelle incognite m, n è $m=0$, $n=0$: non è accettabile.
- Se p=0 la (B) e la (C) coincidono se risulta:
  $$\frac{3m-4n}{m} = \frac{4m+3n}{n}\;;\;\; \text{ossia: } m^2 + n^2 = 0.$$
  L'unica soluzione (reale) di questa equazione è $(0{,}0)$ e, come detto sopra, è inaccettabile.

Dunque la trasformazione in esame non ha rette unite.

46.6 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E MATRICI

46.6.1 Riprendiamo l'affinità di equazioni:

$$x' = a\,x + b\,y + c\,,\quad y' = a'\,x + b'\,y + c'\,.$$

Essa, come si sa, a seconda dei valori dei coefficienti, può essere una generica affinità oppure una similitudine diretta (in particolare un'isometria diretta o un'omotetia) o una similitudine speculare (in particolare un'isometria speculare). In sintesi:

Le equazioni:

$$\mathbf{x' = a\,x + b\,y + c,\;\; y' = a'\,x + b'\,y + c',}$$

dove a, b, c, a', b', c' sono numeri reali assegnati, rappresentano:

- ♦ una **generica affinità** se a b'–a' b≠ 0;
- ♦ una **similitudine diretta** se a'=–b, b'=a (quindi a b'–a' b>0);
  in particolare, poi, la similitudine diretta è:
  - una **isometria diretta** se a b'–a' b=1;
    la quale isometria diretta può essere, a sua volta:
    - una traslazione se b'=a=1, a'=b=0,
    - una rotazione di centro O se c=c'=0,
    - una simmetria di centro O se c=c'=0, b'=a=–1, a'=b=0;
  - una **omotetia** di centro O se b'=a, b=c=a'=c'=0;
- ♦ una **similitudine speculare** se a'=b, b'=–a (quindi a b'–a' b<0);
  in particolare, la similitudine speculare è:
  - una **isometria speculare** se a b'–a' b=–1;

la quale isometria speculare può essere, sua volta:

- una simmetria rispetto all'asse x se a=1, b'=−1, b=c=a'=c'=0,
- una simmetria rispetto all'asse y se a=−1, b'=1, b=c=a'=c'=0,
- una simmetria rispetto alla 1ª bisettrice degli assi se a=c=b'=c'=0, b=a'=1.

Un diagramma di Eulero-Venn (Fig. 6) visualizza adeguatamente, ancorché in misura parziale, quanto detto sopra.

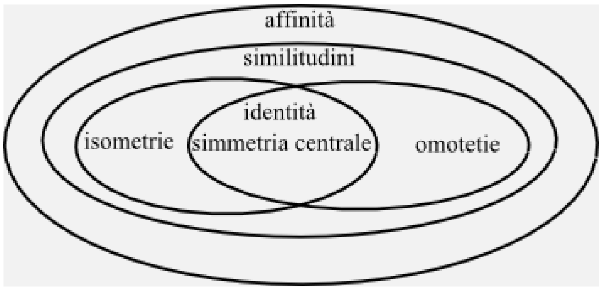

FIG. 6

46.6.2 È interessante constatare che le equazioni di una generica affinità:

$$x' = a\,x + b\,y + c,\quad y' = a'\,x + b'\,y + c'$$

si possono mettere in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

ovviamente con $ab' - a'b \neq 0$.

In particolare, se l'affinità è una similitudine diretta, la forma matriciale è la seguente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

la quale, nel caso generico in cui a^2+b^2 assume un valore qualsiasi, ovviamente positivo, è una generica similitudine diretta; nel caso particolare in cui $a^2+b^2=1$ è invece un'isometria diretta.

La forma matriciale di una similitudine speculare è la seguente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

la quale, nel caso generico in cui $-(a^2+b^2)$ assume un valore qualsiasi, ovviamente negativo, è una generica similitudine speculare; nel caso particolare in cui $-(a^2+b^2)=-1$ è invece un'isometria speculare.

Ti invitiamo a scrivere la forma matriciale delle seguenti particolari trasformazioni geometriche nel piano:
- omotetia di centro l'origine O degli assi di riferimento e di caratteristica k;
- traslazione di vettore (a,b);
- simmetria centrale di centro O;
- simmetria assiale rispetto all'asse x;
- simmetria assiale rispetto all'asse y.

VERIFICHE

[N.B. : Anche se sottinteso, quando occorre il piano s'intende riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy)]

Isometria (nn. 1-15).

1. Disegnare i punti A, B, C e i loro trasformati A', B', C' in base alla traslazione di equazioni:

$$x' = x + 2,\ \ y' = y - \frac{1}{2},$$

sapendo che:

a) $A(1,-1),\ B\left(-\frac{1}{2},0\right),\ C\left(-2,\frac{3}{2}\right).$ b) $A(-\sqrt{2},0),\ B(0,\sqrt{2}),\ C\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

c) $A(0,0),\ B\left(-2,\frac{1}{2}\right),\ C\left(-1,\frac{1}{4}\right).$

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ A'\left(3,-\frac{3}{2}\right),\ B'\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\ C'(0,1);\ \ldots\right]$

2. Disegnare i punti A, B, C e i loro trasformati A', B', C' in base alla rotazione di equazioni:

$$x' = x\cos 30° - y\sin 30°,\ \ y' = x\sin 30° + y\cos 30°,$$

sapendo che:

a) $A(2,0),\ B(0,-2),\ C(-1,-2).$ b) $A(\sqrt{3},1),\ B(1,\sqrt{3}),\ C(-\sqrt{3},\sqrt{3}).$

c) $A(1,1),\ B(2,2),\ C(3,3).$

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ A'(\sqrt{3},1),\ B'(1,-\sqrt{3}),\ C'\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right);\ \ldots\right]$

3. Disegnare il triangolo ABC e il suo trasformato A'B'C' in base all'isometria di equazioni:

$$x' = x\cos(-45°) - y\sin(-45°) + 1,\ \ y' = x\sin(-45°) + y\cos(-45°) - 2,$$

sapendo che:

a) $A(2,0),\ B(3,1),\ C\left(0,\frac{3}{2}\right).$ b) $A(\sqrt{2},0),\ B(0,-\sqrt{2}),\ C(2\sqrt{2},-\sqrt{2}).$

c) $A(2,1),\ B(-4,-2),\ C\left(-1,-\frac{1}{2}\right).$

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ A'(1+\sqrt{2},-2-\sqrt{2}),\ B'(2\sqrt{2}+1,-2-\sqrt{2}),\ C'\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+1,\frac{3}{4}\sqrt{2}-2\right);\ \ldots\right]$

4. Disegnare la retta r di equazione $2x-3y+6=0$ e la sua trasformata r' in base all'isometria di equazioni:

a) $x' = x - 2,\ \ y' = y + 3.$

b) $x' = x\cos 120° - y\sin 120°,\ \ y' = x\sin 120° + y\cos 120°.$

c) $x' = x\cos(-60°) - y\sin(-60°) + 2,\ \ y' = x\sin(-60°) + y\cos(-60°) - \frac{3}{2}.$

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ r' \equiv 2x-3y+19=0;\ \text{b)}\ r' \equiv (3\sqrt{3}-2)x+2(2\sqrt{3}+3)y+12=0;\ \ldots\right]$

5. Disegnare il quadrilatero ABCD di vertici $A(3,0)$, $B(5,0)$, $C(5,3)$, $D(4,2)$ e il suo trasformato A'B'C'D' in base all'isometria di equazioni:

a) $x' = y,\ y' = x.$ b) $x' = y + 2,\ y' = x - 1.$ c) $x' = x - 3,\ y' = -y + 1.$

$[\textbf{R.}\ \text{a)}\ A'(0,3),\ B'(0,5),\ C'(3,5),\ D'(2,4);\ \ldots]$

6. Disegnare la curva γ e la sua trasformata γ' in base alla traslazione di componenti $\left(-3,\frac{5}{2}\right)$, sapendo che γ ha equazione:

a) $y = 2x - 1$. b) $x^2 + y^2 = 2$. c) $y = x^2$. d) $y = \frac{1}{x}$.

$\left[\right.$**R.** a) $y=2x+\frac{15}{2}$; b) $4x^2+4y^2+24x-20y+53=0$; ... $\left.\right]$

7. Dopo aver scritto le equazioni della simmetria di centro O, disegnare la curva γ e la sua trasformata γ' in base a detta simmetria, sapendo che γ ha equazione:

a) $y = 3x + 2$. b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. c) $y = x^2 - 2x + 1$. d) $y = \frac{2}{x}$.

[**R.** ... ; a) $y=3x-2$; 2) $x^2+y^2+2x+2y=0$; ...]

8. Determinare le equazioni della traslazione che trasforma:

a) il punto (2,0) nel punto (−3,1). b) il punto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ nel punto (1, −2).

c) il punto $\left(\sqrt{2},1\right)$ nel punto $\left(-1,\sqrt{2}\right)$.

[**R.** a) x'=x−5, y'=y+1; ...]

9. Determinare le equazioni della traslazione che trasforma:

a) la retta y=2x−1 nella retta y=2x+1 e la retta 2x−4y+1=0 nella retta x−2y=0.

b) la retta 3x−y+2=0 nella retta 2x−y+1=0 e la retta x+y=0 in se stessa.

$\left[\right.$**R.** a) $x'=x-\frac{3}{2}$, y'=y−1; ... $\left.\right]$

10. Determinare le equazioni delle isometrie che mutano in se stesso il quadrato avente per vertici i punti (1,0), (0,1), (−1,0), (0,−1).

[**R.** 1) x'=x, y'=y; 2) x'=−y, y'=x; 3) x'=−x, y'=−y; 4) x'=y, y'=−x;
5) x'=−x, y'=y; 6) x'=x, y'=−y; 7) x'=y, y'=x; 8) x'=−y, y'=−x]

11. Mostrare che l'isometria che si ottiene componendo la traslazione di componenti (−1,2) con la rotazione di centro O e di ampiezza 30° ha equazioni diverse dall'isometria che si ottiene componendo la stessa rotazione con la medesima traslazione. Quale conclusione se ne trae?

12. Trovare le equazioni della simmetria di centro (a,b). [**R.** x'=2a−x , y'=2b−y]

13. Dimostrare che tra le isometrie dirette solo la traslazione e la simmetria centrale trasformano una retta in una retta parallela.

14. In una trasformazione geometrica un punto si dice "unito" se è mutato in sé dalla trasformazione. Dimostrare che:

a) una traslazione non ha punti uniti a meno che non sia l'identità;

b) una simmetria centrale ha uno ed un sol punto unito;

c) le simmetrie assiali rispetto agli assi coordinati non hanno punti uniti.

15. Una trasformazione geometrica si dice *involutoria* (oppure che è una *involuzione*) se, detto P un qualunque punto del piano, trasforma P in P' e P' in P. Stabilire se vi sono delle involuzioni tra le isometrie. E tra le similitudini?

Similitudine (nn. 16-25).

16. Disegnare i punti A, B, C e i loro trasformati A', B', C' in base all'omotetia di equazioni:

x'=2x, y'=2y,

sapendo che:

a) A(1,0), B(2,0), C(0,3). b) A(2, −1), B(0,2), C(−3, −2).

c) $A(-1,-3)$, $B\left(\frac{1}{2},0\right)$, $C(2,3)$.

[**R.** a) $A'(2,0)$, $B'(4,0)$, $C'(0,6)$; …]

17. I punti $A(1,0), B(2,1), C(-1,1)$ sono i vertici di un triangolo. Disegnarlo assieme al suo trasformato A'B'C' in base all'omotetia di equazioni:

a) $x' = 3x,\ \ y' = 3y$. b) $x' = \frac{1}{2}x,\ \ y' = \frac{1}{2}y$. c) $x' = -2x,\ \ y' = -2y$.

[**R.** a) $A'(3,0)$, $B'(6,3)$, $C'(-3,3)$; …]

18. Determinare le equazioni dell'omotetia di centro O che trasforma:

a) la retta $y = 3x + \frac{1}{2}$ nella retta $y = 3x + 1$.

b) la retta $2x - 3y + 4 = 0$ nella retta $4x - 6y + 5 = 0$.

c) la retta $3x + 4y - 1 = 0$ nella retta $4x - 3y + 1 = 0$.

[**R.** a) $x'=2x$, $y'=2y$; …]

19. Disegnare la curva K e la sua trasformata K' in base all'omotetia di equazioni:

$$x' = -\frac{1}{2}x,\ \ y' = -\frac{1}{2}y,$$

sapendo che K ha equazione:

a) $y = \frac{1}{2}x - 2$. b) $x^2 + y^2 = 3$. c) $y = \frac{1}{2}x^2$. d) $y = -\frac{1}{x}$.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } y=\frac{1}{2}x+1;\ \text{b) } 4x^2+4y^2=3;\ \ldots\right]$

20. È assegnata la retta a di equazione $2x+y-1 = 0$. La similitudine di equazioni:

$$x' = -2y + 1,\ \ y' = 2x - 2$$

la trasforma nella retta b, mentre la similitudine di equazioni:

$$x' = \frac{1}{2}y - 1,\ \ y' = -\frac{1}{2}x + 2$$

la trasforma nella retta c. Stabilire se le rette a, b, c individuano o no un triangolo.

21. Dopo aver spiegato perché le seguenti equazioni:

$$x' = \frac{1}{2}y + 2,\ \ y' = -\frac{1}{2}x + 1$$

definiscono una similitudine s, far vedere che questa trasformazione ha un punto unito A.
Quindi dimostrare che:

a) ogni circonferenza che passa per A è trasformata da s in una circonferenza che passa per A;

b) ogni circonferenza con centro in A è trasformata da s in una circonferenza con centro in A.

[**R.** $A(2,0)$; …]

22. Dopo aver disegnato il triangolo ABC di vertici $A(1,0), B(3,0), C(2,1)$ e il suo trasformato A'B'C' in base alla similitudine di equazioni:

$$x' = x - y\sqrt{3} - 4,\ \ y' = x\sqrt{3} + y + 2,$$

calcolare i perimetri e le aree dei due triangoli.

[**R.** $A'(-3,\ 2+\sqrt{3})$, $B'(-1,\ 2+3\sqrt{3})$, $C'(-2-\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3})$; …]

23. Spiegare perché le equazioni:

$$x' = 3x + y\sqrt{3} + 2,\ \ y' = x\sqrt{3} - 3y - 1$$

definiscono una similitudine speculare s. Quindi disegnare il triangolo ABC di vertici $A(-2,0), B(0,0), C(-1,2)$ e il suo trasformato A'B'C' in base alla similitudine s. Calcolare infine i perimetri e le aree dei due triangoli.

24. Determinare le equazioni dell'omotetia di centro (a, b) e di caratteristica k. Quindi, considerate l'omotetia ω' di centro A' e l'omotetia ω" di centro A", provare che:
- la trasformazione ω'∘ ω" è ancora un'omotetia ω;
- il centro A di ω è allineato con i punti A' e A".

[**R.** x'=kx+(1–k)a, y'=ky+(1–k)b; ...]

25. Dimostrare che tra le similitudini dirette, che non siano isometrie, solo l'omotetia trasforma una retta in una retta parallela.

Affinità (nn. 26-28).

26. Disegnare i punti A, B, C e i loro trasformati A', B', C' in base all'affinità di equazioni:

$$x' = 2x - 1,\ \ y' = x + y + 1,$$

sapendo che:

a) $A(1,-1),\ B(2,0),\ C(0,1)$. b) $A(-2,0),\ B(-4,-1),\ C(1,2)$.

c) $A\left(1,\frac{1}{2}\right),\ B(2,2),\ C(0,-1)$.

[**R.** a) A'(1,1), B'(3,3), C'(–1,2); ...]

27. Disegnare il triangolo OAB, sapendo che A(2,0) e B(0,1), ed il suo trasformato O'A'B' in base all'affinità di equazioni:

1) $x' = 2x, y' = y$; 2) $x' = -2x, y' = y$; 3) $x' = x, y' = 2y$; 4) $x' = x, y' = -2y$;

5) $x' = \frac{1}{2}x, y' = y$; 6) $x' = -\frac{1}{2}x, y' = y$; 7) $x' = x, y' = \frac{1}{2}y$; 8) $x' = x, y' = -\frac{1}{2}y$.

28. Disegnare la retta r e la sua trasformata r' in base all'affinità di equazioni:

$$x' = -x + y,\ \ y' = x - 2y,$$

sapendo che r ha equazione:

a) $x = 0$. b) $y = 0$. c) $y = x$. d) $2x - y + 1 = 0$.

[**R.** a) 2x+y=0; ... ; d) 3x+y–1=0]

Questioni varie.

29. Per ciascuna delle seguenti questioni è corretta una ed una sola risposta (V sta per "vero", F per "falso"). Individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

I. Risulta chiuso rispetto all'operazione prodotto l'insieme delle:

a) traslazioni	V	F
b) rotazioni di dato centro	V	F
c) simmetrie assiali	V	F
d) isometrie dirette	V	F
e) isometrie speculari	V	F
f) isometrie	V	F
g) omotetie di dato centro	V	F
h) similitudini dirette	V	F
i) similitudini speculari	V	F
l) similitudini	V	F

II. Ogni isometria trasforma:

a) un parallelogrammo in un parallelogrammo	V	F
b) una circonferenza in una circonferenza	V	F

c) una retta in una retta parallela V F
d) una parabola in una parabola V F

III. Due punti corrispondenti distinti sono sufficienti per individuare una ed una sola:
a) traslazione V F
b) rotazione V F
c) simmetria centrale V F
d) simmetria assiale V F
e) omotetia V F
f) similitudine V F

IV. Due rette corrispondenti, strettamente parallele, sono sufficienti ad individuare una ed una sola:
a) traslazione V F
b) rotazione V F
c) simmetria centrale V F
d) simmetria assiale V F
e) omotetia V F

V. Ogni traslazione diversa dall'identità ha:
[A] una sola retta unita; [B] nessuna retta unita;
[C] due sole rette unite; [D] infinite rette unite.

VI. Ogni traslazione diversa dall'identità ha:
[A] un solo punto unito; [B] nessun punto unito;
[C] due soli punti uniti; [D] infiniti punti uniti.

VII. Ogni simmetria centrale ha:
[A] una sola retta unita; [B] nessuna retta unita;
[C] due sole rette unite; [D] infinite rette unite.

VIII. Ogni simmetria assiale ha:
[A] una sola retta unita luogo di punti uniti; [B] nessuna retta unita luogo di punti uniti;
[C] due sole rette unite luogo di punti uniti; [D] infinite rette unite luogo di punti uniti.

IX. Date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra, di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ne esistono:
[A] solo una; [B] nessuna; [C] solo due; [D] infinite.

30. 1. A) Scrivere le equazioni della trasformazione geometrica τ ottenuta facendo seguire alla traslazione di componenti $(0,2)$ l'omotetia di centro O e caratteristica $1/2$.
B) Trovare il punto unito e le rette unite di τ.
C) Trovare l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse x, passante per il punto unito di τ e per l'origine del sistema di riferimento e avente il vertice sulla retta x=2.
2. A) Fra le rette unite di τ determinare quella tangente alla parabola p.
B) Considerato il triangolo T formato da tale tangente e dagli assi coordinati, calcolare l'area del triangolo T' trasformato di T in base alla τ.

$\left[\mathbf{R.}\ 1A)\ x' = \frac{1}{2}x,\ \ y' = \frac{1}{2}y + 1;\ \ 1B)\ \text{punto unito: } (0,2);\ \ 1C)\ \dots\ 2A)\ \ y=-\frac{1}{4}x+2;\ 2B)\ A(T')=2\right]$

31. Sono assegnati i punti C(2,0) e T(3,1).
a) Trovare l'equazione della circonferenza γ' avente centro in C e passante per T.
b) Trovare l'equazione della circonferenza γ'' tangente in T a γ' e avente il centro sulla retta x=4.
c) Dopo aver spiegato perché esiste una traslazione che muta γ' in γ'', trovarne le equazioni.

[**R.** a) … ; b) … ; c) … , x'=x+2, y'=y+2]

32. È assegnata la circonferenza γ’ di equazione $x^2+y^2-10x-4y+12=0$.

a) Dopo aver verificato che passa per il punto T(1,1), trovare l’equazione della circonferenza γ” tangente a γ’ in T e avente il centro sulla retta di equazione $y=x+1$.

b) Esiste un’omotetia di centro T che trasforma γ’ in γ”: trovarne le equazioni.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } 3x^2+3y^2+2x-4y-4=0;\ \text{b) } x'=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\ ,y'=-\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}\right]$

33. In figura (Fig. 7) sono rappresentate le due circonferenze C e C’.

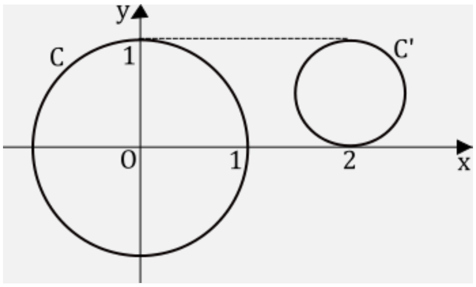

FIG. 7

Quali delle seguenti equazioni trasforma C in C’?

$$[A]\ \ x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,,\ \ y' = y + 2. \qquad [B]\ \ x' = \frac{1}{2}x + 2,\ \ y' = y + \frac{1}{2}.$$

$$[C]\ \ x' = 2x + 2,\ \ y' = 2y + \frac{1}{2}. \qquad [D]\ \ x' = \frac{1}{2}x + 2,\ \ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.$$

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un’esauriente spiegazione della scelta operata.

34. Disegnare le circonferenze K e K’ di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0\,,\ \ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Verificare, quindi, che la trasformazione geometrica T di equazioni:

$$x' = -2x\,,\ \ y' = -2y + 3\,,$$

muta K in K’.

Di tale trasformazione T trovare il punto unito H e le rette unite.

Condotta poi per il centro C di K la retta r di coefficiente angolare 2, trovare le coordinate dei punti A e B in cui r seca K.

Determinare quindi le coordinate dei punti P e Q in cui la retta r’, trasformata di r in base alla T, seca K’.

Calcolare infine il rapporto fra i perimetri e quello fra le aree dei triangoli HAB e HPQ nell’ordine.

$\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\ H(0,1),\text{ rette unite: quelle passanti per H};\ \ldots;\ \frac{P(HAB)}{P(HPQ)} = \frac{1}{2},\ \ \frac{A(HAB)}{A(HPQ)} = \frac{1}{4}\right]$

35. Considerate le parabole:

$$p' \equiv y = \frac{1}{2}x^2,\qquad p'' \equiv x = -\frac{1}{3}y^2 + 2y - \frac{1}{2},$$

far vedere che esiste almeno una similitudine (S) che trasforma p” in p’ e trovarne le equazioni. Determinare quindi gli elementi uniti di (S).

$\left[\mathbf{R.}\ \text{Una similitudine, non l’unica, ha queste equazioni: } x'=\frac{2}{3}y-2,\ \ y'=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3};\ \ldots\right]$

36. Sono dati i punti P(x, y), A(x’, y’), B(x”, y”), P’(X, Y) legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}\qquad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases}\qquad \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$$

Il candidato:

a) dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3 rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;

b) determini la trasformazione T che fa passare da P a P';

c) studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone gli eventuali punti uniti;

d) considerati i punti $C(3,0)$, $D(0,\sqrt{3})$, $E(0,-\sqrt{3})$ e detti γ la circonferenza per tali punti, a la retta CD, γ' ed a' i trasformati di γ ed a mediante T, determini l'area delle regioni finite del piano delimitate da γ' e a';

e) determini il perimetro delle stesse regioni.

[Tratto dall'esame di Stato 1999, indirizzo sperimentale, sessione ordinaria]

37. È assegnata la trasformazione geometrica di equazioni: $x' = y,\ y' = -x$. Si tratta di:

[A] una simmetria centrale di centro O;

[B] di una rotazione intorno ad O (ma non di 180°);

[C] di una omotetia di centro O;

[D] di una similitudine (ma non di un'omotetia di centro O).

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

38. Sono assegnati i punti $A(0,0)$ e $B(0,2)$. Si considerino uno dei due quadrati aventi AB come lato ed il quadrato di cui AB è una diagonale.

a) Di tali quadrati si trovino le coordinate dei vertici.

b) Si descriva una similitudine che trasformi il quadrato maggiore nel minore e se ne trovino le equazioni.

39. Sono assegnati i punti $A(0,0)$, $B(1,0)$ e $C(0,1)$.

a) Si trovino le coordinate del vertice D del quadrato ABDC.

b) Si trovino le coordinate dei vertici E ed F del quadrato BCEF contenente al proprio interno in punto D.

c) Si descriva una similitudine che trasformi il quadrato ABDC nel quadrato BCEF e se ne trovino le equazioni.

40. Nel triangolo ABC i lati AB, BC, CA misurano nell'ordine, rispetto alla medesima unità di misura: 20, 21, 13. Prendere, internamente al lato BC, il punto D in modo che risulti $D\hat{A}C = C\hat{B}A$.

1. A) Calcolare il coseno e il seno dell'angolo $B\hat{C}A$.
   B) Dimostrare che il triangolo DAC è specularmente simile al triangolo ABC.
2. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):
   A) Trovare le coordinate dei punti A, B, C, D.
   B) Trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo DAC.
   C) Stabilire se la similitudine trovata ha punti uniti.

[**R.** 1. A) $\cos B\hat{C}A = 5/13$, … .
2. Un conveniente sistema cartesiano (Oxy) è quello che ha l'origine O in C, l'asse x coincidente con la retta CB orientata da C verso B e il punto A situato nel primo quadrante. Con questa scelta: A) … , $A(5,12)$, $D(169/21,\ 0)$; B) Una similitudine è la trasformazione $(\sigma\circ\rho)\circ\omega$, dove σ è la simmetria assiale rispetto all'asse x, ρ è la rotazione di ampiezza $B\hat{C}A$ intorno a C e ω è l'omotetia diretta di centro C e caratteristica CA/CB. Le sue equazioni sono le seguenti: $x' = \frac{5}{21}x + \frac{12}{21}y$, $y' = \frac{12}{21}x - \frac{5}{21}y$; C) …]

41. Nel triangolo ABC i lati AB e BC misurano rispettivamente 9 cm e 6 cm. Sia poi D il punto interno al lato AB tale che $C\widehat{D}B = C\widehat{A}B$.

a) Dimostrare che i due triangoli ABC e CDB sono simili, precisando se sono direttamente o specularmente simili.

b) Sotto la condizione che il triangolo CDB sia rettangolo in D, calcolare il seno e il coseno dell'angolo $C\widehat{B}D$.

c) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo CBD.

42. È assegnato il triangolo OAB in cui A ha coordinate (4,0) e B ha coordinate (3,3). Dopo aver dimostrato, con considerazioni di geometria sintetica, che il triangolo LMN, avente per vertici i punti medi del triangolo OAB, è simile a questo triangolo, trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il triangolo LMN nel triangolo OAB. Stabilire se la similitudine trovata ha punti uniti.

[**R**. Si può considerare la similitudine che trasforma il punto medio del lato OA in B ed il punto medio del lato AB in O. Ha equazioni: $x'=-2x+7,\ y'=-2y+3$. ...]

43. Si prenda in esame la seguente equazione:

$$y^2 - 2(x^2 - 2)y - 3x^2(x^2 + 4) = 0\,.$$

a) Verificare che rappresenta due parabole e trovare le loro equazioni.

b) Esiste un'omotetia che trasforma la parabola concava verso l'alto nell'altra: trovare le sue equazioni.

[**R**. a) … ; b) x' = – 3x, y' = – 3y – 4]

44. Si prenda in esame la seguente equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 + 9x(x^2 + y^2) - 36x^2 = 0\,.$$

a) Verificare che rappresenta due circonferenze disuguali e trovare le loro equazioni.

b) Esistono due omotetie che trasformano la circonferenza minore nella maggiore: trovare le loro equazioni.

[**R**. a) … ; b) x' = 4x – 12, y' = 4y; x'= – 4x, y' = – 4y]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1 Ricordi alcune delle proprietà delle figure che si conservano in una isometria piana?

2 Esistono isometrie piane che trasformano ogni retta in una retta parallela?

3 C'è un invariante che si perde nel passaggio dall'isometria alla similitudine? Una proprietà, in altri termini, che vale per le isometrie ma non per le similitudini?

4 Esistono similitudini (che non siano però delle isometrie) che trasformano ogni retta in una retta parallela?

5 Esistono similitudini che trasformano due rette parallele in due rette parallele?

6 C'è un invariante che si perde nel passaggio dalla similitudine all'affinità?

7 Una generica simmetria assiale ha punti uniti? Ha rette unite?

8 È vero che due qualsiasi parabole sono figure simili?

RISPOSTE.

1. Oltre alla distanza dei punti (per definizione di isometria), alcune proprietà che si conservano sono le seguenti: a) l'allineamento dei punti; b) il parallelismo delle rette; c) l'ampiezza degli angoli. Ma ci sono altre proprietà dell'isometria che si conservano, come, per esempio, il fatto che ogni circonferenza è trasformata in una circonferenza, ogni parabola in una parabola, ogni ellisse in un'ellisse ed ogni iperbole in un'iperbole. Bisogna dire che tutte queste proprietà, tranne la prima, riguardante la distanza dei punti, si conservano anche in una similitudine.
2. Sì. Si tratta precisamente della traslazione (di ampiezza qualunque) e della simmetria centrale.
3. Sì. Si tratta della distanza di due punti, che si conserva nell'isometria ma non necessariamente nella similitudine.
4. Sì. Si tratta dell'omotetia.
5. Ogni similitudine trasforma due rette parallele in due rette parallele.
6. Sì. Nell'affinità non si conservano più le ampiezze degli angoli.
7. In ogni simmetria assiale i punti dell'asse di simmetria sono punti uniti, per cui l'asse stesso è retta unita, in particolare "retta unità luogo di punti uniti". Non ci sono altri punti uniti ma rette unite sì: ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è infatti retta unita.
8. È vero. Infatti, quali che siano le due parabole, esiste almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra.

COMPLEMENTI: CAMBIAMENTO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

1. In una trasformazione geometrica, fermo restando il sistema di riferimento, una figura F è mutata dalla trasformazione in un'altra figura F'.
In particolare, se la trasformazione è un'isometria le figure F ed F' sono uguali (Fig. 8).
A volte, assegnata una figura F in un riferimento cartesiano, necessita lasciar ferma la figura e modificare il riferimento. Ci domandiamo: **quali sono le equazioni che fanno passare da un sistema di riferimento all'altro?**
È ciò che vogliamo scoprire in queste righe.

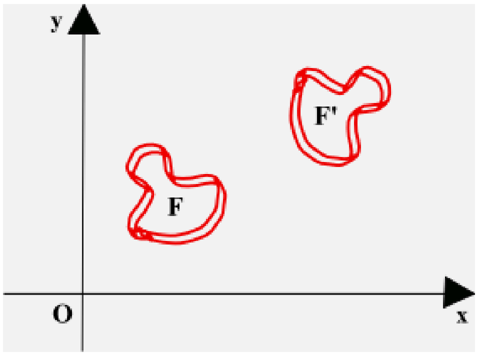

FIG. 8

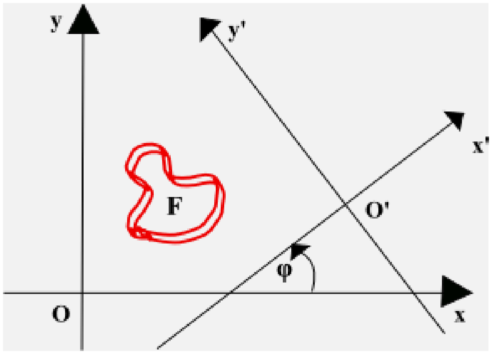

FIG. 9

2. Ogni cambiamento del sistema di riferimento è determinato da un sistema di equazioni del tipo:

$$x=x(x',y'),\ \ y=y(x',y'),$$

che lega le coordinate (x,y) di un generico punto P del piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), alle coordinate (x’,y’) dello stesso punto P, riferito però ad un nuovo sistema di assi cartesiani (O’x’y’) (Fig. 9).
Ebbene – se sono (a,b) le coordinate dell’origine O’ del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio ed è φ l’ampiezza dell’angolo orientato che l’asse x’ forma con l’asse x (Fig. 9) – si dimostra che le equazioni del cambiamento di coordinate sono le seguenti:

$$\mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + a}\,, \quad \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b}\,.$$

Sono chiamate **formule della rototraslazione degli assi**.
Esse diventano le **formule della traslazione degli assi** quando φ=0 (Fig. 10):

$$\mathbf{x = x' + a}\,, \quad \mathbf{y = y' + b}\,;$$

e le **formule della rotazione degli assi** quando a=b=0 (Fig. 11):

$$\mathbf{x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi}\,, \quad \mathbf{y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi}\,.$$

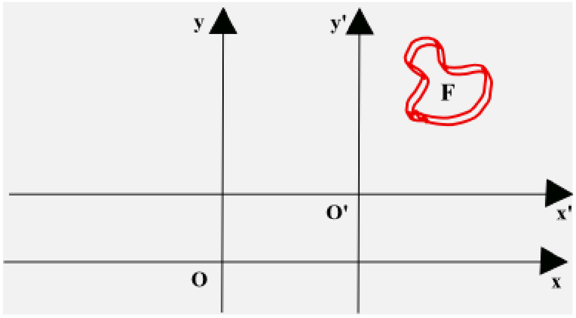

FIG. 10

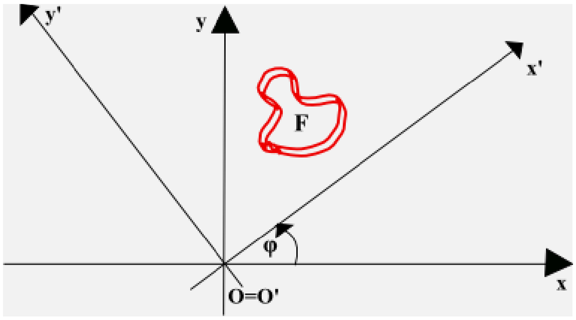

FIG. 11