Prerequisiti:
- Conoscenza delle proprietà delle figure piane.
- Possedere nozioni intuitive di geometria solida.

L'unità riguarda solamente il 2° biennio dei Licei

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *analizzare e riconoscere le reciproche posizioni di rette e piani nello spazio*
- *dimostrare qualche proprietà riguardo alle posizioni di rette e piani nello spazio*
- *dare la definizione di angolo di una retta con un piano*
- *dare le definizioni di angolo di due piani e di piani perpendicolari*
- *dimostrare le proprietà delle facce di un triedro*
- *enunciare il teorema delle sezioni parallele di un angoloide*

Rette e piani nello spazio

Unità 47

47.1 FIGURE SOLIDE

47.1.1 Le figure geometriche delle quali ci siamo prevalentemente occupati fin qui sono sottoinsiemi del piano o, se si preferisce, sono *figure piane*. Costituiscono delle vere e proprie astrazioni, dal momento che è impossibile riprodurne dei modelli reali, se si escludono forse i disegni che, per l'appunto, le raffigurano. In effetti, la lamina più sottile ha pur sempre uno "spessore", per quanto piccolissimo.
Intendiamo dire che non esiste nella realtà fisica un oggetto, per esempio, rettangolare: in esso, oltre alla lunghezza ed alla larghezza, bisogna comunque considerare uno spessore. Solo quando questa dimensione è trascurabile rispetto alle altre due diciamo, con buona approssimazione, che l'oggetto è bidimensionale. Un "foglio di carta" è un ottimo esempio di "figura rettangolare". Ma si tratta pur sempre di un'approssimazione.

47.1.2 Gli oggetti che troviamo in natura hanno dunque tre dimensioni: sono oggetti *tridimensionali*.
Le figure geometriche che essi ispirano sono dette **figure solide**. Lo studio di queste figure e le relazioni fra esse sono oggetto della ***geometria solida*** (o ***geometria dello spazio*** o ***stereometria***).
Questo studio potrebbe essere condotto in maniera rigorosa, completa ed approfondita. Ma noi dobbiamo accontentarci di alcuni aspetti elementari, presentati peraltro a livello molto intuitivo, talvolta addirittura empirico, senza alcuna pretesa di esaurire l'argomento ma con l'obiettivo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale di voi giovani studenti.

47.2 RETTE NELLO SPAZIO

47.2.1 Prendiamo in esame il cubo di figura 1. Si tratta di un solido geometrico delimitato da quadrati congruenti, che si dicono *facce* del cubo. I lati di questi quadrati sono gli *spigoli* del cubo. I vertici delle facce si dicono *vertici* del cubo.

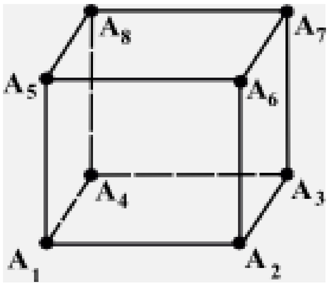

FIG. 1

47.2.2 Si possono notare alcuni fatti interessanti.

- Vi sono rette, come quelle degli spigoli A_1A_2 ed A_1A_4, che hanno un punto in comune (ed uno soltanto): le rette di questo tipo si continuano a chiamare *secanti* (o *incidenti*). Anzi nel caso specifico sono *perpendicolari*, poiché oltre ad essere incidenti formano un angolo retto.
- Vi sono rette che non hanno alcun punto in comune, ma queste possono essere di due tipi:
  - quelle situate come le rette degli spigoli A_1A_2 ed A_4A_3, le quali sono contenute in uno stesso piano (si dice che sono *complanari*): le chiamiamo *parallele*;
  - quelle disposte come le rette A_1A_2 ed A_5A_8, per le quali non esiste alcun piano che le contenga: le diciamo *sghembe*.

In generale, due rette si dicono:

- **secanti** (o **incidenti**) se hanno uno ed un solo punto in comune (Fig.2);
- **parallele** se esiste un piano che le contiene e non hanno punti comuni (Fig.3); per indicare che la retta a è parallela alla retta b scriviamo: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
- **sghembe** se non esiste alcun piano che le contenga (Fig.4).

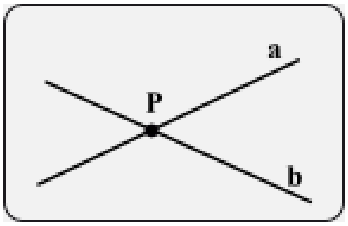

FIG. 2

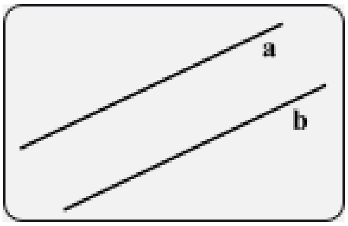

FIG. 3

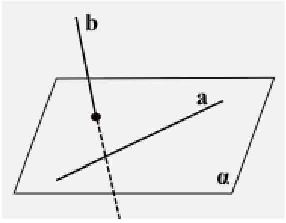

FIG. 4

Se consideriamo lo spigolo A_1A_2, si riconosce immediatamente che la sua retta:

- è parallela sia ad A_4A_3 sia ad A_5A_6;
- seca tutte le rette A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_6;
- è sghemba rispetto alle rette A_3A_7, A_4A_8, A_5A_8, A_6A_7.

Da questa analisi è rimasta fuori la retta A_8A_7. Essa è parallela alla retta A_4A_3 che, a sua volta, è parallela alla retta A_1A_2. S'intuisce che le due rette A_1A_2 ed A_8A_7 sono parallele.
In realtà si verifica sempre che due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro. Se così non fosse si potrebbero condurre due parallele per il punto comune alle due rette e questo sarebbe in contraddizione con la seguente regola, che continua a valere nello spazio:

♦ **RS1** : Per un punto si può condurre una e una sola parallela ad una retta data.

47.3 RETTA E PIANO NELLO SPAZIO

47.3.1 Nello studio della geometria piana non si precisa nulla circa le reciproche posizioni di una retta con un piano, dal momento che ogni retta si suppone contenuta nel piano, considerato come l'insieme di tutti i punti. Nella geometria dello spazio qualche precisazione al riguardo è, invece, necessaria.
Si ha anzitutto la seguente proposizione, che è assunta come regola:

♦ **RS2** : Se una retta ha due punti in comune con un piano, tutti i suoi punti appartengono al piano.

In questo caso si dice pure che la retta *giace* (o *è contenuta*) nel piano (Fig. 5).
Con riferimento al cubo di figura 1, la retta A_1A_2 giace sia nel piano della faccia $A_1A_2A_3A_4$ sia in quello della faccia $A_1A_2A_6A_5$.

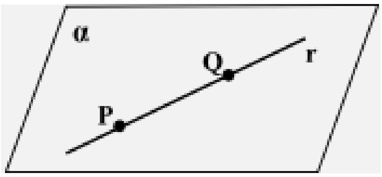

FIG. 5

Se, ora, si esclude che una retta sia contenuta in un piano, rimangono due possibilità:
- la retta e il piano hanno in comune uno ed un sol punto: si dicono **secanti** (o **incidenti**);
- la retta e il piano non hanno alcun punto in comune: si dicono **paralleli**.

Per indicare che la retta r è parallela al piano α scriviamo: $\mathbf{r \parallel \alpha}$.

Per esempio, nel solito cubo, la retta A_1A_5 seca il piano della faccia $A_1A_2A_3A_4$ mentre è parallela a quello della faccia $A_2A_3A_7A_6$.

47.3.2 Oltre a quelle ammesse fin qui, assumiamo quest'altra regola:

♦ **RS3** : Tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa retta) individuano uno ed un sol piano (Fig. 6).

Da essa si deduce il seguente corollario.

♦ COROLLARIO. Un piano è individuato da:
- una retta ed un punto che non le appartiene;
- due rette secanti.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima parte.

Considerati una retta r ed un punto A che non le appartiene (Fig. 7), basta prendere su r due punti distinti B, C. I tre punti A, B, C – per RS3 – individuano uno ed un sol piano, nel quale – per RS2 – giace la retta r.

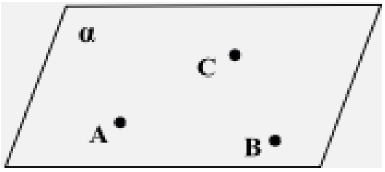

FIG. 6

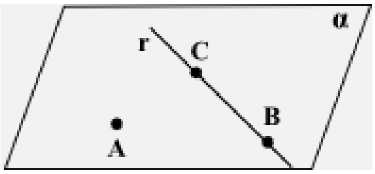

FIG. 7

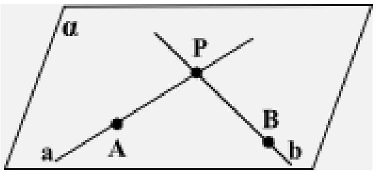

FIG. 8

La dimostrazione della seconda parte (Fig. 8) non differisce dalla precedente. La lasciamo a te.

Un quarto modo di individuare un piano è implicito nella definizione di rette parallele:

Se due rette sono parallele allora, per definizione, individuano il piano che le contiene.

47.3.3 Se una retta e un piano sono secanti e se la retta è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di intersezione allora *la retta si dice **perpendicolare** al piano*.

Per indicare che la retta r è perpendicolare al piano α scriviamo: $\mathbf{r \perp \alpha}$.

Appare subito manifesta l'impossibilità di controllare la perpendicolarità di una data retta rispetto a tutte le rette di un dato piano passanti per il punto in cui essa interseca il piano stesso, essendo tali rette in numero infinito. Questo significa che non è possibile ricorrere alla definizione precedente per decidere della perpendicolarità di una retta ad un piano. Sopperisce all'inconveniente il seguente teorema.

♦ TEOREMA. Se una retta interseca un piano in un punto ed è perpendicolare a due rette del piano passanti per quel punto, allora la retta è perpendicolare al piano in quel punto (questo punto si chiama *piede della perpendicolare* al piano).

DIMOSTRAZIONE. Sia r una retta che intersechi il piano α nel punto O (Fig. 9) e siano a, b due rette contenute nel piano α ed entrambe perpendicolari ad r in O. Per dimostrare il teorema è sufficiente provare che r è perpendicolare ad una qualsiasi altra retta c, contenuta nel piano α e passante per O. A questo riguardo consideriamo in α una retta che sechi le tre rette a, b, c rispettivamente nei punti A, B, C (distinti da O) e diciamo M ed N due qualsiasi punti di r simmetrici rispetto ad O. Tracciamo i segmenti che congiungono M ed N con A, B, C. Si giustifica facilmente che AM≅AN e BM≅BN, per cui i due triangoli MAB ed NAB risultano congruenti. Perciò MÂB≅NÂC. Se ne desume che anche i due triangoli MAC ed NAC sono congruenti. Infatti hanno: MA≅NA, CA in comune, MÂC≅NÂC. Di conseguenza CM≅CN. Pertanto il triangolo MCN è isoscele sulla base MN e la sua mediana CO è anche altezza. In conclusione r è perpendicolare a c. [c.v.d.]

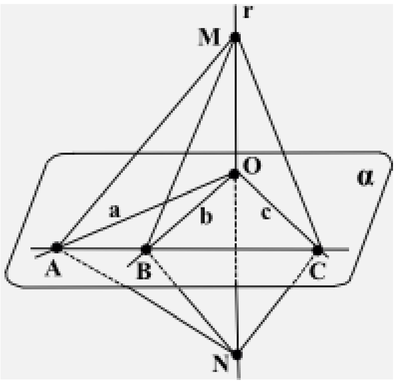

FIG. 9

Per esempio, nel solito cubo di figura 1, la retta A_1A_5, perpendicolare alle due rette A_1A_2 e A_1A_4 del piano della faccia $A_1A_2A_3A_4$, è perpendicolare a questo piano.

Se una retta r è perpendicolare ad un piano α si dice pure che α è perpendicolare ad r.

Ammettiamo le seguenti regole:

- ♦ **RS4** : Per un punto si può condurre una ed una sola retta perpendicolare ad un piano dato.
- ♦ **RS5** : Per un punto si può condurre uno ed un sol piano perpendicolare ad una retta data.

Considerati ora un piano α ed un punto P (Fig. 10), si conduca per P la retta perpendicolare ad α e sia H il suo piede. Il punto P', simmetrico di P rispetto ad H, si dice ***simmetrico*** *di* P *rispetto ad* α.

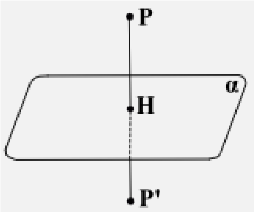

FIG. 10

47.3.4 Vale il seguente importante teorema.

♦ TEOREMA (detto **teorema delle tre perpendicolari**). Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una retta qualsiasi del piano, quest'ultima retta risulta perpendicolare al piano delle prime due.

DIMOSTRAZIONE. Condotta dal piede O della retta r perpendicolare al piano α la perpendicolare p ad una qualsiasi retta s giacente in α, ci proponiamo di dimostrare che s è perpendicolare al piano β individuato dalle rette secanti p ed r. Tralasciamo di considerare il caso banale in cui $O \in s$ e supponiamo $O \notin s$. Diciamo H il piede della perpendicolare p condotta da O ad s (Fig. 11).

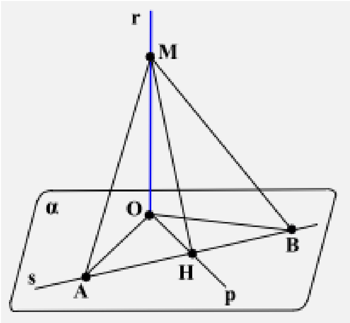

FIG. 11

Prendiamo un qualunque punto $M \in r$, ma distinto da O. Siccome il piano β contiene la retta HM, per dimostrare che $s \perp \beta$ è sufficiente dimostrare che s è perpendicolare ad HM (sappiamo già che s è perpendicolare a p).
A tal riguardo prendiamo due qualsiasi punti di s – A e B – simmetrici rispetto ad H. Si giustifica facilmente che $OA \cong OB$. Per cui i due triangoli MOA ed MOB, entrambi rettangoli in O, risultano congruenti. Perciò $MA \cong MB$. Ne discende che il triangolo AMB è isoscele sulla base AB e, di conseguenza, la sua mediana HM è anche altezza. Quindi $s \perp HM$ e, di conseguenza: $s \perp \beta$. [c.v.d.]

47.3.5 Se una retta r è perpendicolare ad un piano α, ogni retta s contenuta nel piano si dice ***ortogonale*** (o ***perpendicolare***) alla retta r. Naturalmente le rette r ed s possono essere incidenti o sghembe, ma sono comunque ortogonali [(1)].

Ti proponiamo, come esercizio di riepilogo, di riprendere in esame il solito cubo (Fig. 1) e di classificare le posizioni delle rette degli altri spigoli rispetto alla retta dello spigolo A_1A_2. In altri termini, stabilisci se la retta di ogni altro spigolo è parallela, incidente, perpendicolare, complanare, sghemba rispetto alla retta A_1A_2

47.4 PIANI NELLO SPAZIO

47.4.1 Come per le mutue posizioni di due rette o di una retta e di un piano, anche riguardo alle posizioni reciproche di due piani bisogna distinguere più situazioni, a seconda che i due piani abbiano o no punti in comune. Precisamente:

- Due piani non aventi alcun punto in comune si dicono **paralleli** (Fig. 12).
  Sono tali, per esempio, i piani delle facce $A_1A_2A_3A_4$ e $A_5A_6A_7A_8$ del solito cubo.
  Per indicare che il piano α è parallelo al piano β scriviamo: $\alpha \parallel \beta$.
  Ammettiamo la seguente regola:

♦ **RS6**: Per ogni punto esterno ad un piano si può condurre uno ed un sol piano parallelo al piano dato.

---

[1] N.B.: Alcuni autori distinguono fra rette *ortogonali* e rette *perpendicolari*, riservando la denominazione di rette perpendicolari al solo caso in cui esse sono incidenti. Nulla di scandaloso: basta mettersi d'accordo.

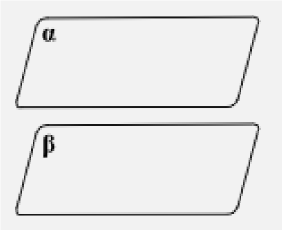

FIG. 12

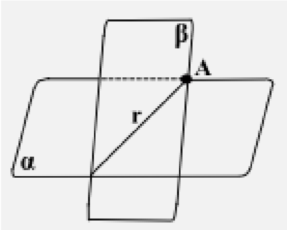

FIG. 13

- Se due piani distinti hanno un punto in comune allora hanno in comune una retta passante per quel punto: i due piani si dicono **incidenti** (o **secanti**) (Fig. 13).
  Questo si può dimostrare ma si intuisce facilmente.
  Chiaramente se due piani distinti hanno in comune due punti allora hanno in comune la retta passante per i due punti.
- Se due piani hanno in comune tre punti allora hanno in comune tutti i punti: sono **coincidenti**.
  Se così non fosse si andrebbe contro la regola RS3.

47.4.2 Valgono i seguenti teoremi. Sei invitato a dimostrarne qualcuno per esercizio.

- ♦ TEOREMA 1. Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono rette parallele (Fig. 14).
- ♦ TEOREMA 2. Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare all'uno lo è anche all'altro (Fig. 15).
- ♦ TEOREMA 3. Se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare all'una lo è anche all'altra (Fig. 16).

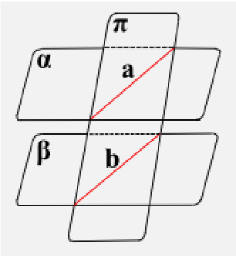

FIG. 14

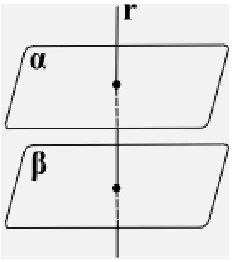

FIG. 15

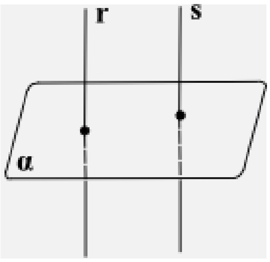

FIG. 16

- ♦ TEOREMA 4. Se due piani distinti sono perpendicolari ad una stessa retta, allora sono paralleli (Fig. 15).
- ♦ TEOREMA 5. Se due rette distinte sono perpendicolari ad uno stesso piano allora sono parallele (Fig. 16).
- ♦ TEOREMA 6. Dati un punto P e un piano α e preso un qualunque punto $Q\in\alpha$, distinto dal piede H della perpendicolare ad α condotta per P, risulta: $PH<PQ$.
  La lunghezza PH si chiama ***distanza del punto P dal piano α***. Si indica anche con **d(P,α)** e anche con **dist(P,α)**.
- ♦ TEOREMA 7. Se una retta è parallela ad un piano, i suoi punti hanno uguale distanza dal piano (Fig. 17).
  La distanza di ogni punto della retta r dal piano α ad essa parallelo si chiama ***distanza della retta r dal piano α***. Si indica anche con **d(r,α)** e anche con **dist(r,α)**.

♦ TEOREMA 8. Se due piani sono paralleli, i punti di uno di essi hanno uguale distanza dall'altro.
La distanza di un punto del piano α dal piano α' ad esso parallelo (Fig. 18) si chiama ***distanza dei due piani* α, α'**. Si indica anche con **d(α,α')** e anche con **dist(α,α')**.

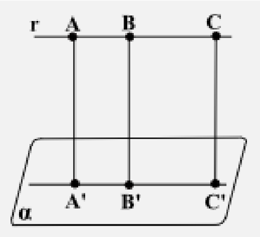

FIG. 17

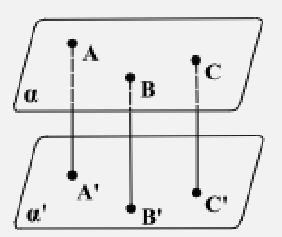

FIG. 18

47.5 ANGOLI DIEDRI. PIANI PERPENDICOLARI

47.5.1 Due semipiani α, β aventi come origine la stessa retta s dividono lo spazio in due parti: ciascuna di esse si chiama **angolo diedro** (o semplicemente **diedro**).
Precisamente: la parte che non contiene i prolungamenti dei semipiani si chiama ***diedro convesso*** (Fig. 19); quella che li contiene si chiama ***diedro concavo*** (Fig. 20).
Salvo diverso avviso, quando parleremo di diedri ci riferiremo sempre a quelli convessi.
Se i due semipiani α, β sono tali da formare un piano (o, come si dice, sono ***semipiani opposti*** – Fig. 21) allora individuano un ***diedro piatto***.
La retta s – origine comune dei due semipiani che determinano un diedro – si chiama ***spigolo*** (o ***costola***) del diedro. I due semipiani si dicono ***facce*** del diedro.
Un diedro di facce α, β e di spigolo s si indica con la scrittura $\alpha\hat{s}\beta$ o anche, se non c'è luogo ad ambiguità, con $\widehat{\alpha\beta}$.

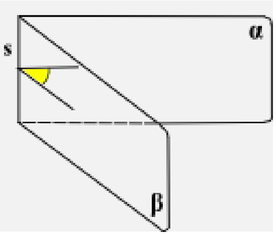

FIG. 19

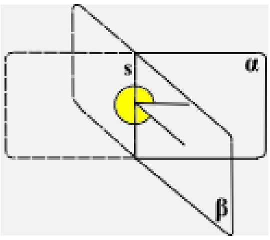

FIG. 20

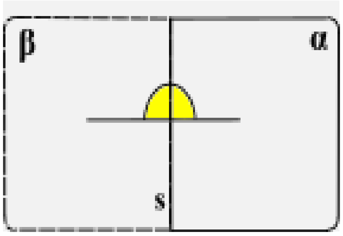

FIG. 21

Due diedri tali che le facce dell'uno siano i semipiani opposti alle facce dell'altro (Fig. 22) si dicono ***opposti allo spigolo***.

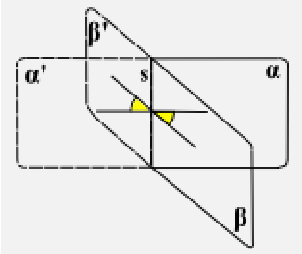

FIG. 22

Due diedri, $\widehat{\alpha\beta}$ e $\widehat{\beta\gamma}$, aventi in comune soltanto lo spigolo ed una faccia (Fig. 23) si dicono ***consecutivi***. Se essi, oltre ad essere consecutivi, sono tali che le facce α e γ sono semipiani opposti (Fig. 24) allora si dicono ***adiacenti***.

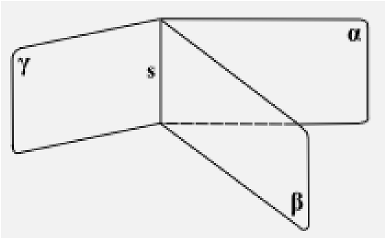

FIG. 23

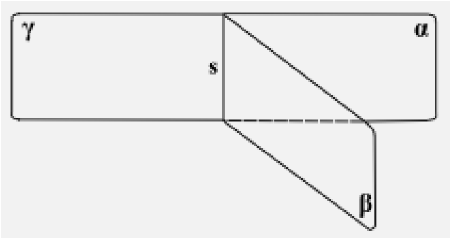

FIG. 24

47.5.2 L'intersezione di un qualunque piano δ con un diedro $\widehat{\alpha\beta}$, il cui spigolo s non sia parallelo a δ (Fig. 25), è un angolo il cui vertice O è l'intersezione di s con δ ed i cui lati a, b sono le semirette secondo cui δ interseca rispettivamente i semipiani α, β. Si dimostra che al variare di δ parallelamente a se stesso le sue intersezioni con il diedro sono angoli congruenti.

Siccome c'interessa la particolare situazione in cui δ è perpendicolare allo spigolo del diedro, è in relazione a questo caso che condurremo la dimostrazione. Essa peraltro si estende facilmente ad una situazione generica.

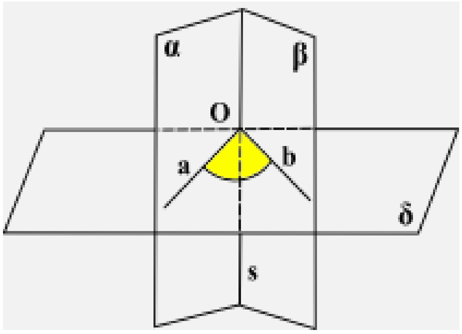

FIG. 25

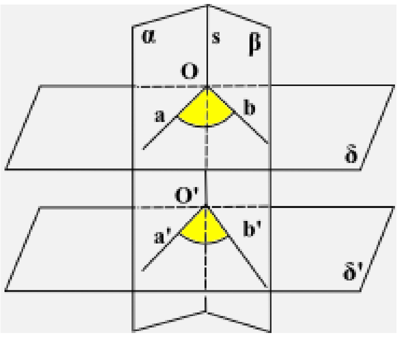

FIG. 26

♦ TEOREMA. Gli angoli ottenuti intersecando un diedro con due qualsiasi piani perpendicolari al suo spigolo sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il diedro $\alpha\hat{s}\beta$, siano $a\hat{O}b$ ed $a'\hat{O}'b'$ gli angoli ottenuti intersecandolo con i piani δ e δ' perpendicolari ad s e perciò paralleli tra loro (Fig. 26). Tali angoli sono congruenti poiché hanno i lati paralleli e con lo stesso verso. Infatti $a \parallel a'$ perché le due rette sono intersezioni dei due piani paralleli δ e δ' rispettivamente con il piano α; per lo stesso motivo $b \parallel b'$: infatti b e b' sono intersezioni di δ e δ' con β.

Insomma, considerato un qualunque diedro, al variare del piano perpendicolare allo spigolo del diedro, non varia l'ampiezza dell'angolo sezione del piano col diedro.

Uno qualsiasi di questi angoli congruenti, cioè ogni angolo ottenuto intersecando un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo, si dice **sezione normale** del diedro.

L'ampiezza della sezione normale di un diedro si dice ***ampiezza*** del diedro.

Essa si dice anche ***angolo dei due semipiani*** che formano il diedro.

Due diedri aventi la stessa ampiezza sono ***congruenti*** (o ***uguali***)
In caso contrario è ***maggiore*** (risp.: ***minore***) quello che ha ampiezza maggiore (risp.: minore).

47.5.3 Riconducendoli alle loro sezioni normali, si possono estendere ai diedri molti concetti già noti, relativi agli angoli piani. In particolare:

- un diedro si dice ***retto***, ***acuto***, ***ottuso*** se la sua sezione normale è rispettivamente un angolo retto, acuto, ottuso;
- due diedri si dicono ***complementari*** o ***supplementari*** se sono rispettivamente complementari o supplementari le loro sezioni normali ottenute con lo stesso piano secante.

47.5.4 Due piani si dicono **perpendicolari** se formano un diedro retto.
Si giustifica facilmente che se due piani formano un diedro retto allora tutti e quattro i diedri formati da essi sono retti. Pertanto possiamo concludere che:

Due piani perpendicolari formano quattro diedri congruenti.

♦ TEOREMA. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che la contiene è perpendicolare al piano dato.

DIMOSTRAZIONE. Sia r una retta perpendicolare ad un piano α e sia P il piede di r su α (Fig. 27). Un qualunque piano β contenente r contiene P e pertanto interseca α secondo una retta s passante per P.

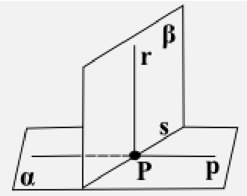

FIG. 27

Condotta allora nel piano α la perpendicolare p in P alla retta s, la retta p risulta pure perpendicolare ad r. Come dire che uno dei diedri formati dai piani α e β è intersecato da un piano (quello delle rette p ed r) perpendicolare allo spigolo s del diedro secondo un angolo retto. Per cui i due piani α e β sono perpendicolari. [c.v.d.]

Complementare al precedente è il seguente teorema che però non dimostriamo.

♦ TEOREMA. Se una retta non è perpendicolare ad un piano, esiste uno ed un sol piano che la contiene ed è perpendicolare al piano dato.

47.6 ANGOLO DI UNA RETTA CON UN PIANO

47.6.1 Il piede della perpendicolare condotta da un punto ad un piano si chiama anche ***proiezione ortogonale*** (o semplicemente ***proiezione***) del punto sul piano. È evidente che:
Se una retta è perpendicolare ad un piano le proiezioni dei suoi punti sul piano cadono nel piede di detta perpendicolare.
Vale invece il seguente teorema, che non dimostriamo.

♦ TEOREMA. Se una retta non è perpendicolare ad un piano il luogo delle proiezioni dei suoi punti sul piano è l'intersezione del piano con il piano perpendicolare al primo e contenente la retta data (Fig. 28).

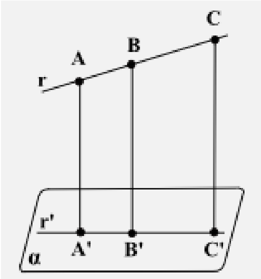

FIG. 28

Questo teorema autorizza la seguente definizione:

Se una retta non è perpendicolare ad un piano, si dice ***proiezione della retta sul piano*** la retta in cui esso è intersecato dal piano contenente la retta data e perpendicolare al piano dato.

47.6.2 Se una retta è perpendicolare ad un piano, essa, come si sa, è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il piede della perpendicolare stessa. Per cui, in ultima analisi, la retta forma angoli retti con ognuna di quelle rette. In questo senso ci pare lecito affermare che:

Una retta perpendicolare ad un piano forma col piano un angolo retto.

Ammettiamo poi, per convenzione, che:

Una retta parallela ad un piano forma col piano un angolo nullo.

Infine, se una retta seca un piano (senza essere perpendicolare ad esso), si dice ***angolo della retta col piano*** l'angolo acuto che essa forma con la sua proiezione sul piano.

♦ TEOREMA. Nell'insieme degli angoli – che una retta secante un piano (ma senza essere perpendicolare ad esso) forma con le rette del piano passanti per il punto intersezione – l'angolo della retta col piano è il minore.

DIMOSTRAZIONE. Considerato un piano α, sia r una retta che lo interseca nel punto O (Fig. 29). Per ottenere la retta r', proiezione di r su α, è sufficiente determinare la proiezione H su α di un qualunque punto A di r purché distinto da O: la retta r' è proprio OH.

Ci proponiamo di dimostrare che l'angolo AÔH – che è appunto l'angolo della retta r col piano α – è il minore tra gli angoli formati dalla retta r con le rette contenute in α e passanti per O.

A questo proposito, su una qualsiasi di tali rette, mettiamo s, riportiamo il segmento OP, lungo quanto OH. Considerati ora i due triangoli AOH ed AOP, risulta che essi hanno OA in comune ed OH≅OP; inoltre AH<AP perché AH è il cateto e AP è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AHP. Per cui: AÔH<AÔP. Ciò che si voleva dimostrare.

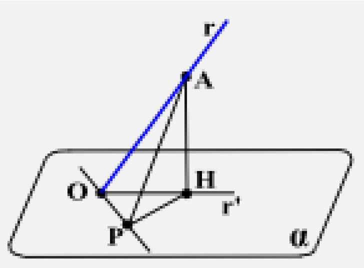

FIG. 29

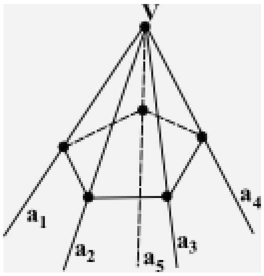

FIG. 30

47.7 ANGOLOIDI

47.7.1 Nello spazio siano assegnate n semirette (n≥3) aventi la stessa origine V:

$$Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_{n-1}, Va_n,$$

considerate nell'ordine scritto e tali che il piano di due qualunque rette consecutive:

$$a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n, a_na_1,$$

lasci le altre semirette in uno solo dei semispazi individuati da esso (Fig. 30, dove n=5).

L'intersezione dei semispazi aventi quali origini i piani suddetti e contenenti le altre semirette si chiama **angoloide**. [(2)]

Il punto V si dice ***vertice*** dell'angoloide. Le semirette che lo individuano si dicono ***spigoli*** dell'angoloide. Gli angoli:

$$a_1\widehat{V}a_2,\ a_2\widehat{V}a_3,\ \dots,\ a_{n-1}\widehat{V}a_n,\ a_n\widehat{V}a_1$$

si dicono ***facce*** dell'angoloide. I diedri formati da due facce consecutive si dicono ***diedri*** dell'angoloide.

In base al numero n dei suoi spigoli (che è anche quello delle sue facce e dei suoi diedri) un angoloide ha nomi diversi. In particolare esso si chiama:

- *angoloide triedro* o semplicemente *triedro* se n=3;
- *angoloide tetraedro* se n=4;
- *angoloide pentaedro* se n=5;

eccetera.

Per esempio, ciascuno degli 8 vertici di un cubo è vertice di un *triedro trirettangolo*, formato cioè da tre angoli retti.

47.7.2 Circa la congruenza degli angoloidi, ci limitiamo all'enunciato della seguente proposizione:

Due angoloidi sono congruenti (o uguali) se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di uno di essi e quelli dell'altro in modo che risultino congruenti le facce e i diedri corrispondenti.

47.7.3 Le facce di un angoloide godono di due importanti proprietà. Qui appresso le enunciamo nella forma generale ma ci limitiamo a dimostrarle solo nel caso dei triedri.

♦ TEOREMA 1. In ogni angoloide l'ampiezza di ciascuna faccia è minore della somma delle ampiezze delle altre.

DIMOSTRAZIONE (relativa al triedro). Considerato il triedro Vabc (Fig. 31), se in esso non c'è una faccia che risulti maggiore delle altre due, il teorema è evidente.

Supponiamo perciò che $\widehat{ac}$ sia maggiore tanto di $\widehat{ab}$ quanto di $\widehat{bc}$. Ci proponiamo di provare che:

$$\widehat{ac}<\widehat{ab}+\widehat{bc}.$$

A questo proposito tracciamo la semiretta Vd interna all'angolo $\widehat{ac}$ in modo che risulti $\widehat{ad}\cong\widehat{ab}$. Chiamati A, C due qualsiasi punti di a, c rispettivamente, distinti da V, indichiamo con D l'intersezione del

---

2 In realtà questa figura geometrica si dovrebbe definire **angoloide convesso**, per distinguerla da un **angoloide concavo**, nel quale è possibile che esista una faccia il cui piano non lascia da una medesima parte gli altri spigoli. Noi, comunque, non ci occuperemo degli angoloidi concavi e quando parleremo di angoloidi supporremo implicitamente che siano convessi. Questo bisogna sempre tenerlo presente per evitare di commettere strafalcioni.

segmento AC con d e su Vd riportiamo il segmento VB uguale a VD.
I due triangoli VAB e VAD risultano congruenti poiché hanno: Va in comune, $VB \cong VD$, $A\hat{V}B \cong A\hat{V}D$; di conseguenza: $AB \cong AD$.
Considerato ora il triangolo ABC, si ha: $BC > AC - AB$ e perciò: $BC > AC - AD$, ossia: $BC > DC$.
Di modo che, con riferimento ai due triangoli VAB e VDC, risulta che essi hanno:

$$VC \text{ in comune},\ \ VB \cong VD,\ \ BC > DC;$$

ne discende che $B\hat{V}C > D\hat{V}C$. Come dire: $\widehat{dc} < \widehat{bc}$. Per cui, ricordando che $\widehat{ad} \cong \widehat{ab}$, si ha: $\widehat{ad} + \widehat{dc} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$ e da qui: $\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$. [c.v.d.]

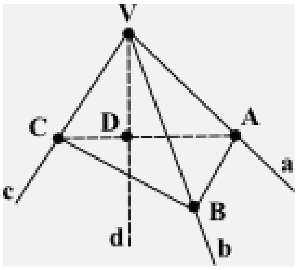

FIG. 31

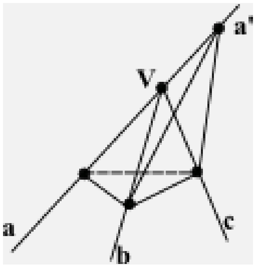

FIG. 32

♦ TEOREMA 2. In ogni angoloide [3] la somma delle ampiezze delle facce è minore dell'ampiezza di un angolo giro.

DIMOSTRAZIONE (relativa al triedro). Considerato il triedro Vabc (Fig. 32), diciamo Va' la semiretta opposta di Va. Otteniamo un altro triedro: Va'bc. In esso, per il teorema precedente:

$$\widehat{bc} < \widehat{ba'} + \widehat{ca'}.$$

D'altronde, indicata con p l'ampiezza di un angolo piatto, risulta: $\widehat{ab} + \widehat{ba'} = p$ e $\widehat{ac} + \widehat{ca'} = p$.
Per cui, essendo:

$$\left(\widehat{ab} + \widehat{ac}\right) + \widehat{bc} < \left(\widehat{ab} + \widehat{ac}\right) + \left(\widehat{ba'} + \widehat{ca'}\right),$$

risulta:

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 2p. \qquad \text{[c.v.d.]}$$

47.7.4 Come nel piano, anche nello spazio si potrebbe sviluppare una teoria della similitudine. Noi però non ce ne occuperemo. Segnaliamo tuttavia che si conservano nello spazio le proprietà delle figure simili del piano.
Osserviamo inoltre che, come si comprende facilmente, o quantomeno s'intuisce, secando un angoloide di n spigoli con un piano che li intersechi tutti, ma non nel vertice, si ottiene un poligono di n lati.
Ciò detto, vale il seguente importante teorema, di cui però forniamo solo l'enunciato.

♦ TEOREMA (detto **delle sezioni parallele di un angoloide**). Intersecando un angoloide con due piani paralleli, che sechino tutti i suoi spigoli, ma non nel vertice:
- le sezioni S ed S' sono poligoni simili e il loro rapporto di similitudine è uguale al rapporto delle loro rispettive distanze dal vertice dell'angoloide;
- il rapporto dei perimetri dei poligoni sezione S ed S' è uguale al rapporto di similitudine;
- il rapporto delle aree dei poligoni sezione S ed S' è uguale al quadrato del rapporto di simi-

[3] ATTENZIONE. Ribadiamo che stiamo facendo riferimento ad un angoloide convesso. La proprietà, infatti, non vale per un angoloide concavo.

litudine.

Ossia, con riferimento alla figura 33, dove abbiamo preso in considerazione il triedro Vabc e abbiamo indicato con ABC ed A'B'C' due sezioni ottenute con i piani paralleli α ed α', chiamati H e H' i punti in cui la perpendicolare condotta per V ai piani α ed α' interseca tali piani:

- le sezioni ABC ed A'B'C' sono poligoni simili;
- i loro perimetri P, P' e le loro aree A, A' sono tali che: $\frac{P}{P'}=\frac{\overline{VH}}{\overline{VH'}}$, $\frac{A}{A'}=\frac{\overline{VH}^2}{\overline{VH'}^2}$.

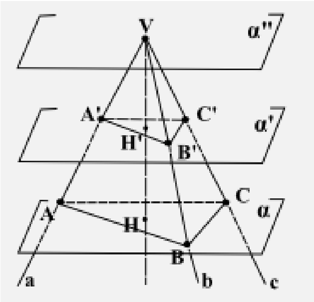

FIG. 33

VERIFICHE

1. Considerate due rette qualsiasi dello spazio, dire quali sono le loro possibili posizioni reciproche.
2. Dire in quali e quanti modi può essere individuato un piano nello spazio.
3. Dire che differenza sussiste fra rette parallele e rette sghembe.
4. Dimostrare che se due o più rette passano per uno stesso punto e ciascuna di esse seca un'ulteriore retta allora tutte le rette considerate sono complanari.
5. Dato un cubo e fissato un suo spigolo, scegliere a caso un secondo spigolo del cubo e calcolare la probabilità che le rette dei due spigoli siano: a) incidenti, b) parallele, c) sghembe, d) complanari. Indicate con p_a, p_b, p_c, p_d tali probabilità è vero che risulta: $p_a+p_b+p_c=1$? È vero che risulta: $p_d=p_a+p_b$?
6. Dati due piani non paralleli, dimostrare che se tre punti distinti appartengono ad entrambi allora questi punti sono allineati.
7. Considerati un piano α ed una retta r parallela ad esso, sia β un piano contenente r. Dimostrare che sono possibili le due situazioni seguenti e solo esse:
   - β è parallelo ad α;
   - β seca α secondo una retta parallela ad r.
8. Se due rette sono entrambe parallele ad un piano si può concludere che sono parallele tra loro?
9. Se due rette sono parallele si può concludere che un piano parallelo ad una di esse è parallelo anche all'altra?
10. Dimostrare che se tre o più rette sono due a due parallele e ciascuna di esse interseca un'ulteriore retta allora tutte le rette considerate sono complanari.
11. Dimostrare che se tre rette sono tali che due di esse, comunque scelte, individuano un piano allora si possono presentare le tre situazioni seguenti e solo esse: a) le tre rette sono complanari; b) le tre rette sono due a due parallele; c) le tre rette passano per uno stesso punto.

12. Se due piani sono entrambi paralleli ad una retta si può concludere che sono paralleli tra loro?
13. Dimostrare che se due piani sono paralleli, ogni retta contenuta in uno di essi è parallela all'altro piano.
14. Dimostrare che due piani paralleli staccano, su due rette parallele, segmenti congruenti.
15. Dimostrare che se una retta non giace in un piano e retta e piano sono entrambi perpendicolari ad un'altra retta allora sono paralleli.
16. Da un punto P esterno ad un piano α si conduca la perpendicolare PH al piano e la perpendicolare PA ad una qualsiasi retta a del piano ma non passante per H, con $H,A\in\alpha$. Dimostrare che la retta HA è perpendicolare alla retta a.
17. Considerato un quadrato ABCD, contenuto in un piano α, sia EA un segmento perpendicolare ad α. Dimostrare che i triangoli EAB, EBC, ECD, EDA sono tutti e quattro rettangoli e a due a due congruenti.
18. Considerata una circonferenza di centro O, siano t ed s due rette tangenti ad essa. Condotta per O la retta r perpendicolare al piano della circonferenza e chiamato P un qualsiasi punto di r, dimostrare che i segmenti perpendicolari condotti da P alle rette t ed s sono congruenti.
19. Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, sia AD un segmento perpendicolare al piano α del triangolo, con $D\in\alpha$. Dimostrare che il piede della perpendicolare al segmento BC biseca il segmento stesso.
20. Considerato un triangolo ABC, contenuto in un piano α, si conducano per i suoi vertici A,B,C rispettivamente le rette a, b, c perpendicolari ad α. Si dica α' un qualunque piano parallelo ad α. Dimostrare che α' interseca a, b, c rispettivamente secondo i punti A',B',C' e che i due triangoli ABC ed A'B'C' sono congruenti.
21. Dati un piano α e due rette r ed s, si supponga che α sia parallelo ad entrambe le rette. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette?
22. Date le rette a, b, c, si supponga c perpendicolare sia alla retta a sia alla retta b. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche delle due rette a, b?
23. Dati un piano α e due rette r ed s, si supponga r perpendicolare sia al piano α sia alla retta s. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche del piano α e della retta s?
24. Dato un punto P interno ad un diedro, si consideri l'angolo avente il vertice in P ed i cui lati sono le semirette uscenti da P e perpendicolari alle facce del diedro. Dimostrare che tale angolo è supplementare della sezione normale del diedro.
25. Dimostrare che per un punto si possono condurre infiniti piani perpendicolari ad un piano dato.
26. Dimostrare che, se due piani sono secanti, ogni piano perpendicolare alla loro intersezione è perpendicolare a ciascuno di essi.
27. Dati una retta r ed un piano α, quanti piani si possono condurre per r paralleli ad α? Quanti perpendicolari?
28. Dati due piani α, β ed una retta r, si supponga che r sia parallela ad α e perpendicolare a β. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di questi due piani?
29. Dati due piani α, β ed una retta r, si supponga che α sia parallelo ad r e perpendicolare a β. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di r e β?
30. Dimostrare che, se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano parallelo alla retta è perpendicolare a quel piano. Si può concludere che ogni piano perpendicolare al piano dato è parallelo alla retta?
31. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela

all'altro o è contenuta in esso. Si può concludere che ogni retta parallela ad uno di essi è perpendicolare all'altro?

32. Dati due piani perpendicolari α e β, dimostrare che le rette a, b – condotte per un punto P perpendicolarmente ai piani α, β rispettivamente – sono perpendicolari.

33. I triangoli ABC e ABD sono rettangoli e isosceli sulla base AB. Sapendo che i loro piani sono perpendicolari, dimostrare che i triangoli ACD e BCD sono uguali ed equilateri.

34. Considerati due punti distinti A, B ed una retta r, dimostrare che si possono presentare le tre situazioni seguenti ed esse soltanto: a) non esiste su r alcun punto equidistante da A e da B; b) tutti i punti di r sono equidistanti da A e da B; c) esiste su r uno ed un sol punto equidistante da A e da B.

35. Considerato un punto P e detti A e B due punti qualsiasi di un piano α ed H la proiezione di P su α, dimostrare che:

a) PA≅PB se e solo se HA≅HB; b) PA>PB se e solo se HA>HB.

36. Dimostrare che, se due rette sono parallele, le loro proiezioni su un piano sono o due punti o due rette parallele.

37. Dimostrare che gli angoli che due rette parallele formano con un dato piano sono congruenti.
Si può concludere che risultano parallele due rette che formino angoli congruenti con un dato piano?
Si può concludere che non possono essere parallele due rette che non formino angoli congruenti con un dato piano?

38. Dimostrare che il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti dai vertici di un triangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo nel suo circocentro. A tal riguardo bisogna dimostrare che ogni punto di tale retta è equidistante dai vertici del triangolo e, viceversa, ogni punto equidistante dai vertici del triangolo appartiene a tale retta.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

N.B.: Senza precisarlo, si suppone che le figure considerate siano collocate nello spazio ordinario.

DOMANDE.

1. È vero che due rette parallele non hanno punti comuni?

2. È vero che due rette sono parallele se non hanno punti comuni?

3. È vero che, se due rette sono parallele, ogni piano parallelo ad una di esse è parallelo anche all'altra?

4. Se due piani sono paralleli ad una stessa retta si può concludere che sono paralleli fra loro?

5. È vero che, se due piani sono paralleli, ogni retta giacente in uno di essi è parallela all'altro piano?

6. È vero che una retta e un piano perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli?

7. Due rette a, b sono perpendicolari ad una stessa retta c. Si può concludere qualcosa circa le reciproche posizioni delle due rette a, b?

8. Una retta è parallela ad un piano e perpendicolare ad un altro piano. Si può concludere qualcosa circa le reciproche posizioni dei due piani?

9. Una retta è perpendicolare ad un piano α. È vero che ogni piano β perpendicolare al piano dato è parallelo alla retta?

10. È vero che le proiezioni di due rette parallele, comunque scelte, su uno stesso piano sono due rette parallele?

RISPOSTE.

1. Sì, per definizione.
2. NO. Oltre a non avere punti comuni devono risultare complanari.
3. NO. Infatti la retta potrebbe giacere nel piano.
4. NO. In effetti i due piani potrebbero essere in qualsiasi posizione: paralleli, secanti, coincidenti.
5. Sì. Se, infatti, così non fosse, la retta e il piano avrebbero un punto in comune, che sarebbe punto comune anche ai due piani, contro l'ipotesi che siano paralleli.
6. NO. Infatti la retta potrebbe giacere nel piano. A meno che non si modifichi la definizione di retta e piano paralleli, ammettendo che anche una retta giacente in un piano sia definita parallela al piano. In tal caso bisogna distinguere tra "parallelismo in senso stretto" se la retta non giace nel piano e "parallelismo in senso largo" se la retta giace nel piano. Insomma qualcosa di simile al parallelismo fra rette.
7. Si può concludere solo che le due rette a, b non possono essere secanti, mentre possono risultare coincidenti, parallele, sghembe.
8. Si può concludere che i due piani sono perpendicolari.
9. NO. Infatti la retta potrebbe giacere nel piano β. Come quesito 6.
10. NO. Le proiezioni potrebbero essere due punti: ma occorre in tal caso che le rette siano perpendicolari al piano. In ogni altro caso le proiezioni sono effettivamente rette parallele.