Prerequisiti:

- Saper operare consapevolmente con i numeri razionali.
- Calcolare il valore di un'espressione letterale quando alle variabili si sostituiscono valori numerici.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *interpretare un'espressione algebrica con il linguaggio naturale e viceversa*
- *addizionare e moltiplicare due polinomi*
- *elaborare semplici espressioni letterali*
- *dimostrare semplici formule algebriche*
- *verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione*
- *confutare congetture mediante il ricorso ad un controesempio*
- *analizzare semplici sviluppi algebrici, individuando eventuali errori di ragionamento*
- *utilizzare con consapevolezza una calcolatrice simbolica per calcolare il valore di un'espressione algebrica*

Polinomi e operazioni con essi

Unità 5

5.1. ESPRESSIONI LETTERALI

5.1.1 Ti invitiamo a completare la seguente tabella, con i valori assunti dalle due espressioni, quando alle lettere si assegnano i valori indicati.

A	B	$(A+B)^2+AB$	$A^2+3AB+B^2$
-4	3		
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	-5		

Puoi constatare che, in tutti i casi proposti, i risultati delle due colonne sono uguali.
Ciò dipende forse dalla particolare scelta dei valori di A e di B?
Oppure le due espressioni letterali acquistano lo stesso valore per ogni valore di A e di B?
E, in quest'ultimo caso, credi possibile una verifica dell'uguaglianza delle due espressioni per tutte le coppie di numeri A e B?
Se hai risposto negativamente all'ultimo interrogativo, hai fatto bene, perché quelle coppie sono infinite. L'unico modo che abbiamo, di dimostrare che per ogni A e per ogni B le due espressioni letterali hanno lo stesso valore, non è un'impossibile verifica per tutte le infinite coppie, ma la trasformazione di una delle due espressioni nell'altra.
Ma com'è possibile questa trasformazione?
Ebbene, esistono regole che permettono di manipolare espressioni letterali in modo da farle diventare uguali ad altre, per cui l'espressione di partenza e quella ottenuta in seguito alla manipolazione assumono uguale valore numerico quando si assegnano alle variabili che le compongono valori numerici scelti a piacere, ma che siano gli stessi in tutte e due le espressioni.
Secondo queste regole è, inoltre, possibile semplificare espressioni letterali; vale a dire trasformare espressioni letterali anche complesse in espressioni più semplici aventi, però, lo stesso valore.
Queste regole sono fondate sulle proprietà delle operazioni: le più frequenti a questo riguardo sono le proprietà delle potenze e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, oltre all'uguaglianza "X=Y", in base alla quale è consentito sostituire X al posto di Y e, viceversa, Y al posto di X. In altri termini, è possibile leggere l'uguaglianza da sinistra a destra ma anche da destra a sinistra.
L'insieme di queste *regole* (o *tecniche di calcolo*) e la loro applicazione costituisce ciò che si chiama **CALCOLO LETTERALE** (o **CALCOLO ALGEBRICO**).

La creazione del calcolo letterale segnò uno dei momenti più rilevanti nell'evoluzione del pensiero matematico, giacché determinò un'accelerazione notevole nella ricerca matematica.
I primi tentativi di introdurre un qualche simbolismo in matematica si hanno già con ***Diofanto*** di Alessandria (II-III sec. d.C.), il quale nella sua **Aritmetica** utilizza una specie di stenografia, consistente nell'abbreviazione di vocaboli, per rappresentare una quantità incognita, le sue prime sei potenze e le loro reciproche, per indicare l'addizione, la sottrazione e l'uguaglianza.

Il passaggio da un'*algebra retorica*, in cui tutto è espresso a parole, ad un'*algebra sincopata*, in cui si fa largo uso di forme abbreviate, accennata in Diofanto, diviene prassi con ***Luca Pacioli***, cui abbiamo fatto un breve cenno trattando dell'evoluzione storica della notazione dei numeri [1]. Non è ancora la nostra maneggevole *algebra simbolica*, ma è certamente un passo importante verso questa.
Il passo decisivo in questa nuova direzione fu fatto nel 1591 con la pubblicazione dell'opera **In artem analyticem isagoge** del francese ***François Viète*** (1540-1603), il quale si dichiarava inventore della logistica speciosa (cioè il calcolo letterale) in contrapposizione alla logistica numerosa (cioè il calcolo numerico): egli, infatti, rese sistematico per l'appunto il calcolo letterale, benché i simboli di cui egli si serviva sparirono quasi subito dall'uso corrente.
Di fatto, il simbolismo che si affermò definitivamente dopo alterne vicende e che ancor oggi usiamo, a parte qualche integrazione successiva, fu quello di ***Cartesio*** (***René Descartes***, 1596-1650), la cui **Géométrie**, pubblicata nel 1637 come appendice al trattato filosofico **Discours de la methode**, è considerata dallo storico della matematica C. B. Boyer «*il più antico testo matematico che uno studente di algebra odierno potrebbe leggere senza incontrare difficoltà nella notazione*».

5.1.2 Il calcolo letterale è fondamentale in matematica e nelle scienze sperimentali, perché è uno strumento spesso indispensabile per la risoluzione dei problemi. Anche se oggi le difficoltà possono essere superate con l'uso di strumenti di calcolo automatico, è comunque necessario acquisire alcune abilità fondamentali. Noi ti aiuteremo a farlo affrontando l'argomento con gradualità, cominciando da alcuni esempi particolarmente semplici. Anzi, all'inizio, dopo ogni calcolo citeremo la proprietà che permette di eseguirlo. Nel seguito lasceremo a te questo compito.

$a+a=2\cdot a$	(moltiplicazione come somma di addendi uguali)
$a\cdot a=a^2$	(potenza come prodotto di fattori uguali)
$3\cdot a+2\cdot a=(3+2)\cdot a=5\cdot a$	(proprietà distributiva di "·" rispetto a "+")
$7\cdot x-6\cdot x=(7-6)\cdot x=1\cdot x=x$	(proprietà distributiva di "·" rispetto a "+"; 1 elemento neutro per la moltiplicazione)
$(3\cdot a^2\cdot b^3)^3=3^3\cdot(a^2)^3\cdot(b^3)^3=27\cdot a^6\cdot b^9$	(proprietà delle potenze)

Prima di proseguire enunciamo il seguente principio fondamentale:

- **In un'espressione letterale, una stessa lettera rappresenta sempre il medesimo numero**.

Ribadiamo poi che, di norma, invece di scrivere

$$2\cdot a,\quad a\cdot b,\quad a\cdot b\cdot c,\quad \dots,$$

si scrive più semplicemente, nell'ordine:

$$2\,a,\quad a\,b,\quad a\,b\,c,\quad \dots,$$

sottintendendo il segno "·" di moltiplicazione tra un numero ed una lettera oppure tra due lettere.
Il segno "·" oppure "×" è, invece, necessario quando si deve indicare il prodotto di due numeri. E questo si capisce bene: ognuno, infatti, è giustamente convinto, per esempio, che 23 indichi null'altro che il numero "ventitré"; se si vuole allora che esso indichi il prodotto di 2 per 3 bisogna scrivere $2\cdot 3$ oppure 2×3.

5.1.3 Al fine di verificare se ti è chiaro il concetto di espressione letterale, ti proponiamo alcuni esercizi in

[1] Cfr.: Unità 3: Numeri reali, N° 3.7.

cui devi esprimere con una formula matematica un procedimento di calcolo esposto a parole e, viceversa, esprimere a parole il significato di una formula.

Scrivi l'espressione letterale che traduce la seguente procedura di calcolo:

- Assegna un numero e raddoppialo, aggiungi un altro numero, dividi il totale per 2 e togli il numero che hai pensato all'inizio.
- Dividi per 5 il doppio del quadrato di un dato numero.
- Fa' il rapporto fra il quadrato, aumentato di 1, di un dato numero e il cubo dello stesso numero.
- Dividi la differenza fra un dato numero e 1/5 per la somma del doppio di 1/5 col numero dato. Al rapporto ottenuto togli il reciproco della somma del numero dato col triplo di 1/2.
- Esprimere a parole le seguenti espressioni, dove le lettere ivi presenti sono numeri razionali:

$$\frac{3a^2}{2}+1\,;\qquad (a^2+b)^2\,;\qquad \frac{2a+b}{2}-a\,;\qquad a(a+1)-\frac{1}{2}\,.$$

5.2 POLINOMI CON VALORI IN $\mathbb{Q}$

5.2.1 Le regole, riguardanti le espressioni letterali con valori in $\mathbb{Q}$, valgono per le espressioni che contengono operazioni totalmente definite in $\mathbb{Q}$ (addizione, sottrazione, moltiplicazione) o in $\mathbb{Q}_0$ (divisione, elevamento a potenza).

Cominciamo col premettere alcune definizioni che hanno il solo scopo di consentirci di essere più sintetici successivamente, a partire dal prossimo paragrafo N° 5.2.2.

Si chiama **monomio** (o **espressione monomia**) con valori in $\mathbb{Q}$ un qualunque prodotto di fattori, che siano numeri razionali o lettere i cui valori siano scelti in $\mathbb{Q}$.

Sono, per esempio, monomi con valori in $\mathbb{Q}$ le seguenti espressioni, nelle quali alle lettere che vi compaiono possono essere assegnati valori qualsiasi scelti in $\mathbb{Q}$:

$$2a\,,\quad -4ab\,,\quad -2a\cdot\frac{3}{2}b\,,\quad \frac{2}{5}\cdot 3a\cdot(-2ab)\,;$$

non lo sono invece queste altre:

$$2a+1\,;\quad a+b\,;\quad -a+2b\,;\quad \frac{3}{2}a(b-2)\,.$$

Anche $1\times a$ ed 1×3 sono monomi; essi si scrivono, più semplicemente, a e 3 (ricorda che 1 è elemento neutro per la moltiplicazione).

Dunque <u>una lettera ed un numero sono monomi</u>.

Prendiamo ora il monomio $2\cdot 3a\cdot 2ab$. Tenendo presenti le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in $\mathbb{Q}$ e la definizione di potenza, si ha:

$$2\cdot 3a\cdot 2ab = 2\cdot 3\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot b = 12a^2b.$$

Il monomio $12a^2b$ si dice ridotto alla forma normale.

In generale, un monomio si dice **ridotto alla forma normale** (o **irriducibile**), se c'è un solo fattore numerico (che si può tralasciare se è 1) e se ciascun fattore letterale compare in esso una sola volta, elevato ad un esponente naturale, che è sottinteso se vale 1.

Anche un numero è un monomio ridotto alla forma normale; infatti si ha, per esempio:

$$5 = 5\cdot 1 = 5a^0$$

poiché $a^0=1$, $\forall a\in\mathbb{Q}_0$.

Ti proponiamo i seguenti esercizi:

1. Tra le seguenti espressioni letterali due non sono monomi. Individuale.

$$x\cdot x\cdot x\,,\quad 2a\cdot(-3)\cdot 2x,\quad 2+x\,,\quad -2^2a\cdot\frac{3}{5}b^2\,,\quad (a+b)\cdot 2\,,\quad \frac{3}{4}a(-x)\cdot x.$$

2. Riduci a forma normale i seguenti monomi:

$$2a\cdot\left(-\frac{5}{2}a\right)\,,\quad -3a\cdot\left(-\frac{2}{5}b\right)\cdot 5\,,\quad a\cdot(-b)\cdot(-2a)\cdot 3b\cdot c,\quad x^2\cdot 2x\cdot(-3x).$$

AVVERTENZA: Le considerazioni sui monomi, che faremo da qui in poi, si riferiranno, salvo avviso contrario, a monomi ridotti alla forma normale.

In un monomio, il fattore numerico (che è 1 se non vi figura esplicitamente) si chiama *coefficiente* e la parte residua si chiama *parte letterale*. Per convenzione il coefficiente si scrive prima della parte letterale.

Si dice *grado di un monomio rispetto ad una data lettera* l'esponente con cui quella lettera figura nel monomio (che vale 1 quando non è indicato).

Il monomio ha grado 0 rispetto ad ogni lettera che non figura nel monomio.

Si chiama *grado (complessivo) di un monomio* la somma dei gradi del monomio rispetto ad ogni sua lettera.

<u>Ogni numero (diverso da 0) è un monomio di grado zero</u>. Per il monomio 0 non si definisce il grado.

Per esempio:

- il monomio $2a^2b$, di grado 3, ha grado 2 rispetto alla lettera a e grado 1 rispetto alla lettera b;
- il monomio $-3xy^2z^3$, di grado 6, è di grado 1 rispetto alla lettera x, di grado 2 rispetto ad y, di grado 3 rispetto a z.

ESERCIZIO. Usando o la sola lettera a o la sola lettera b o entrambe, scrivi:

- tutti i monomi di 1° grado aventi coefficiente 5;
- tutti i monomi di 2° grado aventi coefficiente −2;
- tutti i monomi di 3° grado aventi coefficiente 1;

tutti i monomi di 4° grado aventi coefficiente −1.

Due monomi, come $3ab^2$ e $-5ab^2$ oppure come $2a^2x$ e $-\frac{3}{4}xa^2$, che hanno la stessa parte letterale, si dicono **simili**.

Per poter riconoscere più facilmente i monomi simili, è consigliabile scrivere in ordine alfabetico le lettere che vi figurano.

ESERCIZIO. Scrivi almeno altri due monomi simili a ciascuno dei seguenti:

$$x\,;\quad -x^2\,;\quad -2ab\,;\quad 2a^2x;\quad -ab^2\,;\quad mn.$$

Quindi precisa qual è il grado di ciascun monomio rispetto alle lettere che vi figurano e qual è il grado complessivo di ciascun monomio.

5.2.2 Si chiama **polinomio** (o **espressione polinomiale**) la somma di più monomi e questi si dicono *termini* del polinomio. Se i termini sono 2 o 3, il polinomio si dice anche, rispettivamente, ***binomio*** o ***trinomio***.

Il numero 0, elemento neutro per l'addizione, è – come si sa – un monomio. Questo ci consente di affermare che **ogni monomio è un particolare polinomio**. Cosa che si comprende meglio attraverso il seguente esempio:

$$2x^2y = 2x^2y + 0 = 2x^2y + 0xy^2.$$

Si chiama **grado di un polinomio** (complessivo o rispetto ad una data lettera) il maggiore tra i gradi (complessivi o rispetto a quella lettera) dei monomi che lo compongono.

La somma di polinomi è, evidentemente, ancora un polinomio.

Per semplificare un'espressione letterale costituita da una somma di polinomi, basta sommare (si dice anche **ridurre**) i termini simili. Ecco un esempio:

$$(2a^2-ab+3b^2)+(3a^2+2b^2)+(-a^2+4ab) = 2a^2-ab+3b^2+3a^2+2b^2-a^2+4ab =$$
$$= (2+3-1)\,a^2+(-1+4)\,ab+(3+2)\,b^2 = 4a^2+3ab+5b^2.$$

Il prodotto di polinomi (uno dei quali può essere, in particolare, un monomio), si esegue, in base alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, come nel seguente esempio:

$$(2x+3y)\cdot(4x-y) = 2x\cdot(4x-y) + 3y\cdot(4x-y) =$$
$$= 2x\cdot 4x - 2x\cdot y + 3y\cdot 4x - 3y\cdot y = 8x^2-2xy+12xy-3y^2 = 8x^2+10xy-3y^2.$$

In pratica, **il prodotto di due polinomi è il polinomio che ha per termini i monomi, che si ottengono moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo;** dopo aver eseguito il prodotto, si riducono i termini simili, se ve ne sono.

Ti proponiamo alcuni esercizi sulla somma e il prodotto di polinomi.

- Calcola la somma dei seguenti polinomi e riduci i termini simili:

  $2a+3b,\ -3a+2b,\ -a+4b;$ $x+y,\ 2x+y,\ 3x-2y;$ $2x^2+x+2,\ -x^2-x+1;$

  $3a^2+4a+3,\ -a^2+2a;$ $-a+2ab-3b^2,\ 2a^2+ab-b^2;$ $x^2+y^2,\ 2x^2-3xy,\ -xy+2y^2.$

- Calcola il prodotto dei seguenti polinomi e riduci i termini simili:

  $3a-2b,\ 2a+b;$ $-x+3y,\ 3x-y;$ $-x+2a,\ 3x-4a;$

  $a^2+2ab+2b^2,\ -a+b;$ $2x^2+y^2,\ -3x+y;$ $3a^2+2ax+2x^2,\ 4a-x.$

Si definisce il ***polinomio opposto*** di un polinomio dato: è quel polinomio ottenuto dal primo cambiando il segno dei suoi coefficienti.

Per esempio, l'opposto del polinomio x^3-2x+3 è il polinomio $-x^3+2x-3$.

La differenza fra un polinomio P' ed un polinomio P" si ottiene sommando a P' l'opposto di P".

Per esempio:

$$(2x^2-3x+5) - (3x^2+x-2) = 2x^2-3x+5-3x^2-x+2 = -x^2-4x+7\ .$$

Come riepilogo di quanto detto fin qui, ti proponiamo, per esercizio, di semplificare le seguenti espressioni:

1. $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(a-\frac{1}{2}b\right)-(2a+b)\ .$
2. $(a+b)(2a-b)+\left(\frac{1}{2}a-b\right)\cdot 2a\ .$
3. $\left(\frac{3}{2}x-y+1\right)(x-2y-1)\ .$
4. $(x+y)\cdot\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y(x-2)-(x+2y)\left(\frac{1}{2}x-y\right)\ .$

5.2.3 Per **eseguire l'elevamento a potenza (con esponente un numero naturale) di un polinomio**, si potrebbe ricorrere ogni volta alla definizione di potenza e trasformare così l'espressione in un prodotto di polinomi.

Per i casi più semplici, che poi sono quelli più frequenti nelle applicazioni, esistono delle formule (chiamati **PRODOTTI NOTEVOLI**) che permettono di ottenere il risultato più velocemente. Esse sono le seguenti, dove con A, B, C si indicano espressioni generiche:

♦ **DIFFERENZA DI DUE QUADRATI:**

$$\mathbf{(A+B)\,(A-B) = A^2 - B^2}$$

- **QUADRATO DI UN BINOMIO:**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2;$$

- **QUADRATO DI UN TRINOMIO:**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 + 2\mathbf{AB} + 2\mathbf{AC} + 2\mathbf{BC}$$

- **CUBO DI UN BINOMIO:**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 = \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2\mathbf{B} + 3\mathbf{AB}^2 + \mathbf{B}^3$$

- **SOMMA DI DUE CUBI:**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,(\mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2) = \mathbf{A}^3 + \mathbf{B}^3$$

La prima formula può essere spiegata facilmente. Basta eseguire in successione i calcoli che si presentano, nel modo seguente:

$$(A+B)(A-B) = (A+B)A - (A+B)B = A^2+BA-(AB+B^2) = A^2+BA-BA-B^2 = A^2-B^2\,.$$

Questo vale anche per le altre formule: cosa che puoi fare da solo.
Ma la seconda e la terza possono essere interpretate geometricamente, come si vede nelle figure 1 e 2, supponendo che A, B, C siano le misure a, b, c, di opportuni segmenti e ricordando le note formule per l'area del quadrato e del rettangolo.

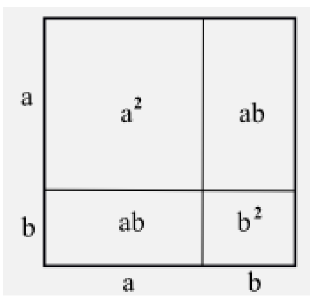

FIG. 1

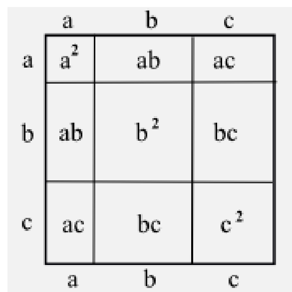

FIG. 2

In realtà, anche delle altre formule sarebbe possibile un'interpretazione geometrica, sulla quale però preferiamo glissare.
La quarta e la quinta formula si possono dimostrare sviluppando i calcoli. Lo facciamo solo per la prima di queste formule, lasciando a te per esercizio la seconda:

$$(A+B)^3 = (A+B)^2 \cdot (A+B) = (A^2+2AB+B^2) \cdot (A+B) =$$
$$= A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

Precisiamo che le espressioni A, B possono essere ovviamente anche numeri negativi. Vediamo qualche esempio:

- $(2a-5)^3 = (2a)^3+3(2a)^2\cdot(-5)+3(2a)\cdot(-5)^2+(-5)^3 = 8a^3-60a^2+150a-125.$
- $(a-2b+1)^2 = a^2+(-2b)^2+1+2a(-2b)+2a+2(-2b) = a^2-4ab+4b^2+2a-4b+1.$
- $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = [x+(-2y)][x^2+x(-2y)+(-2y)^2] = x^3+(-2y)^3 = x^3-8y^3.$

Come prima applicazione ti proponiamo di far vedere che elaborando l'espressione $(A+B)^2+AB$, considerata in 5.1.1, si ottiene proprio $A^2+3AB+B^2$.

Questo permette di concludere che effettivamente le due espressioni sono uguali e di scrivere perciò:

$$(A+B)^2+AB = A^2+3AB+B^2\,.$$

In questa uguaglianza, come in tutte quelle simili ad essa, l'espressione che precede il segno di ugua-

glianza "=" si dice "1° membro", quella che lo segue si dice "2° membro".
Per le applicazioni può essere comodo memorizzare delle regole che descrivano a parole la struttura delle formule (almeno di alcune di esse), oltre a ricordare le formule stesse. Le regole sono le seguenti:

- Il **quadrato di un binomio** è un polinomio che ha per termini il quadrato del primo termine del binomio, il doppio prodotto del primo per il secondo ed il quadrato del secondo. Per l'appunto:
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{2}=\mathbf{A}^{2}+\mathbf{2AB}+\mathbf{B}^{2}.$$
- Il **quadrato di un trinomio** (o più in generale di un polinomio) è un polinomio che ha per termini i quadrati di ogni termine del trinomio (o polinomio) ed i doppi prodotti di ciascun termine per ognuno di quelli che lo seguono. Per l'appunto:
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C})^{2}=\mathbf{A}^{2}+\mathbf{B}^{2}+\mathbf{C}^{2}+\mathbf{2AB}+\mathbf{2AC}+\mathbf{2BC}.$$
- Il **cubo di un binomio** è un polinomio che ha per termini il cubo del primo termine del binomio, il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo ed il cubo del secondo. Per l'appunto:
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{3}=\mathbf{A}^{3}+\mathbf{3A^{2}B}+\mathbf{3AB^{2}}+\mathbf{B}^{3}.$$

Prova a verificare se hai capito le proprietà sopra enunciate risolvendo i seguenti esercizi.

- Costruisci una figura geometrica che spieghi intuitivamente la seguente formula:
$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$
- Usando la formula del quadrato di un binomio, sviluppa:
$$(2a+b)^2,\quad (a-2b)^2,\quad (3x+2y)^2,\quad (2a-3x)^2,\quad (2a^2+1)^2.$$
- Usando la formula del quadrato di un trinomio, sviluppa:
$$(a+b+1)^2,\quad (2a-b+2)^2,\quad (a^2+a-1)^2,\quad (3a+x+2)^2,\quad (-2x+3y+z)^2.$$
- Usando la formula del cubo di un binomio, sviluppa:
$$(a+2b)^3,\quad (2a-3)^3,\quad (a+3x)^3,\quad (2x-3y)^3,\quad (a^2+2)^3.$$

- ESERCIZIO RISOLTO 1. Adesso, come esempio appena un po' più complicato di quelli proposti a te, semplifichiamo la seguente espressione letterale:
$$(a+3b)^2\cdot(a+2b)+(2a-b)^3.$$

RISOLUZIONE. Cercheremo di evidenziare tutti i passaggi, affinché il procedimento risulti il più chiaro possibile; in particolare nel primo passaggio utilizzeremo le formule del quadrato e del cubo di un binomio come le abbiamo descritte, lasciando indicati i relativi calcoli. Si ha:

$$\begin{aligned}
&(a+3b)^2\cdot(a+2b)+(2a-b)^3=\\
&=(a^2+2\cdot a\cdot 3b+(3b)^2)\cdot(a+2b)+((2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b)+3\cdot 2a\cdot(-b)^2+(-b)^3)=\\
&=(a^2+6ab+9b^2)\cdot(a+2b)+(8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3)=\\
&=(a^2\cdot a+6ab\cdot a+9b^2\cdot a+a^2\cdot 2b+6ab\cdot 2b+9b^2\cdot 2b)+(8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3)=\\
&=a^3+6a^2b+9ab^2+2a^2b+12ab^2+18b^3+8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=\\
&=(a^3+8a^3)+(6a^2b+2a^2b-12a^2b)+(9ab^2+12ab^2+6ab^2)+(18b^3-b^3)=\\
&=9a^3-4a^2b+27ab^2+17b^3.
\end{aligned}$$

Chi ha una buona abilità di calcolo (abilità che si acquista solo con l'esercizio) può naturalmente effettuare alcuni passaggi mentalmente e snellire la semplificazione dell'espressione, per esempio in questo modo:

$$\begin{aligned}
&(a+3b)^2\cdot(a+2b)+(2a-b)^3=(a^2+6ab+9b^2)\cdot(a+2b)+(8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3)=\\
&=a^3+6a^2b+9ab^2+2a^2b+12ab^2+18b^3+8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3=9a^3-4a^2b+27ab^2+17b^3.
\end{aligned}$$

- ESERCIZIO RISOLTO 2. In quest'altro esempio operiamo più speditamente.

Semplificare la seguente espressione letterale:

$$\left(\frac{1}{2}a+2\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)(2a+1)+\frac{1}{2}a\left(a+\frac{2}{3}\right)$$

RISOLUZIONE. Chiamato per comodità v il valore dell'espressione, si ha:

$$v=\frac{1}{4}a^2+2a+4+2a^2+a+a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a=$$

$$=\left(\frac{1}{4}+2+\frac{1}{2}\right)a^2+\left(2+1+1+\frac{1}{3}\right)a+\left(4+\frac{1}{2}\right)=\frac{1+8+2}{4}a^2+\left(4+\frac{1}{3}\right)a+\frac{9}{2}=\frac{11}{4}a^2+\frac{13}{3}a+\frac{9}{2}\,.$$

5.2.4 Esercizi da risolvere.

A) Semplifica le seguenti espressioni (nn. 1-8):

1. $(-2x+a)(a-2x)+\frac{1}{2}(x-a)(x-2a)$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{9}{2}x^2-\frac{11}{2}ax+2a^2\right]$
2. $-\frac{1}{2}a(x-2a)+2x\left(\frac{1}{2}x-a\right)-\left(2x-\frac{1}{2}a\right)\left(a-\frac{1}{2}x\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ 2x^2-\frac{19}{4}ax+\frac{3}{2}a^2\right]$
3. $\left[\left(2x-\frac{1}{2}a\right)(a-x)+\frac{1}{2}(x^2+a^2)\right]\left(\frac{1}{2}x-2a\right)$. $\left[\mathbf{R.}-\frac{3}{4}x^3+\frac{17}{4}ax^2-5a^2x\right]$
4. $(2x-a)(x-2a)-\left[\frac{1}{2}(2x^2-a^2)-(x+a)\left(x+\frac{1}{2}a\right)\right]$. $\left[\mathbf{R.}\ 2x^2-\frac{7}{2}ax+3a^2\right]$
5. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)(2x+1)-\frac{1}{2}(x-2)(1-2x)$.
6. $(x-3)^2+2x(x-4)-5$.
7. $\big((x-2)x+(x-1)\big)(x-1)-x(x-2)$.
8. $(2x+a)(2x-a)+(a-x)(x+a)-x(4a-x)$.

B) Tenendo presenti le formule dei prodotti notevoli, semplifica i seguenti prodotti (nn. 9-22):

9. $(2a+b)(2a-b)$; $(x-2y)(x+2y)$.
10. $\left(\frac{1}{2}xy+3\right)\left(x-\frac{1}{2}xy\right)$; $(-2x-1)(2x-1)$.
11. $(a-b)^2$; $(x-y)^2$.
12. $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$; $\left(2x-\frac{3}{4}y\right)^2$.
13. $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\right)^2$.
14. $(a-b)^3$; $(x-1)^3$.
15. $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$.
16. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$; $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)^3$.
17. $(a-b+c)^2$; $(a+b-c)^2$.
18. $\left(a-\frac{1}{2}b-2c\right)^2$; $\left(2x-\frac{1}{2}y-1\right)^2$.
19. $(a+1)(a^2-a+1)$; $(a+2)(a^2-2a+4)$.

20. $\left(\frac{1}{3}xy+3\right)\left(\frac{1}{9}x^2y^2-xy+9\right)$; $\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2\right)$.
21. $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+ab+4b^2\right)$; $\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.
22. $\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)\left(1+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^4\right)$; $\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)\left(\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{3}x^2+16\right)$.

C) Semplifica le seguenti espressioni, tenendo presenti i prodotti notevoli (nn. 23-29):

23. $(a+b+c)(a+b-c)-(b+c)(b-c)$. [**R.** a^2+2ab]
24. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$. $\left[\textbf{R.}\ \frac{1}{2}x^2-x\right]$
25. $(x+1)^2-(x-1)^2$. [**R.** $4x$]
26. $\frac{1}{2}x(2x-1)^2-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$. $\left[\textbf{R.}\ -5x^2-x-\frac{1}{4}\right]$
27. $(a-b)(a+b)^2-(a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)$. [**R.** $-a^3-2a^2b-4ab^2-3b^3$]
28. $(x+y)\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2\right)-\left(\frac{1}{2}x-y\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2\left(\frac{1}{2}x+y\right)$.
$\left[\textbf{R.}\ \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2y-\frac{3}{2}xy^2+3y^3\right]$
29. $\left(\frac{1}{2}a+b+1\right)^2-\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2-2\left(\frac{1}{a}-b\right)$. $\left[\textbf{R.}-\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2+4b+1\right]$

5.2.5 Le calcolatrici simboliche consentono di elaborare e semplificare espressioni algebriche. Ma anche adesso, come per le espressioni numeriche, bisogna fare molta attenzione all'uso delle parentesi. Alcuni esempi potranno essere utili per capire di cosa si tratti.

Si vuole, allora, immettere in una calcolatrice simbolica la seguente espressione:

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

Bisogna trasformarla in una espressione "lineare". Si ha precisamente:

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)=(1/2x-1)\text{^}2+(1/2x-1)(1/2x+1)$$

Altro esempio:

$$\left(\frac{1}{3}a+1\right)^3+\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}a+1\right)^2=(1/3a+1)\text{^}3+(a+1/2)(1/3a+1)\text{^}2$$

5.3 POLINOMI CON VALORI IN ℝ

Prendiamo in esame uno dei polinomi di cui ci siamo occupati nelle pagine precedenti, per esempio il seguente:

$$a^2+3\,a\,b+b^2.$$

È evidente che, fintantoché alle lettere a, b si attribuiscono valori scelti nell'insieme ℚ dei razionali, il valore del polinomio è ancora un numero razionale: si tratta, infatti, di operare sostanzialmente con addizioni e moltiplicazioni di numeri razionali (e, in altre situazioni, anche con sottrazioni e divisioni) e il risultato è, come sai, un numero razionale.

Nulla, però, impedisce di attribuire alle lettere valori scelti nell'insieme ℝ dei numeri reali o, addirittura, che gli stessi coefficienti del polinomio siano numeri reali. Ebbene, in tali casi, il valore del polinomio è esso stesso un numero reale. Ma nulla cambia di quanto abbiamo detto in precedenza, nel senso che si opera con questi polinomi esattamente come con quelli che hanno valore in $\mathbb{Q}$. Per questo non riteniamo che sia il caso di aggiungere altro.

5.4 POLINOMI IN UNA INDETERMINATA

Rivestono una particolare importanza, in matematica e non solo, polinomi come questi:

$$3x+2, \quad 2t^2-7t+1, \quad x^3+2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\ ;$$

o come questi altri:

$$ax+b, \quad az^2+bz+c,$$

nei quali ultimi le lettere presenti svolgono ruoli diversi, nel senso che a,b,c rappresentano delle costanti, vale a dire quantità che si suppone abbiano un valore determinato, quantunque non precisato (si chiamano ***parametri***), mentre x,z rappresentano quantità variabili (si chiamano per l'appunto ***variabili*** o ***indeterminate***) ma in modo che in ogni polinomio ne figuri una ed una soltanto.
In realtà, già nelle pagine precedenti abbiamo avuto occasione di imbatterci in polinomi come questi, senza farne specifica menzione.
Ognuno di questi polinomi è denominato ***polinomio in una indeterminata***.
Il più generale polinomio di grado n nell'indeterminata x con coefficienti (interi, razionali o reali) a_0, a_1, ..., a_n è rappresentato dalla seguente espressione:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

che si chiama ***forma normale*** del polinomio.
Il coefficiente a_n è chiamato solitamente *termine noto* del polinomio. Quando a_0, cioè il coefficiente del termine di grado più elevato, è uguale a 1, il polinomio è detto *monico*.

Un polinomio in una indeterminata può presentarsi non necessariamente ordinato secondo le potenze dell'indeterminata. Per esempio in questo modo:

$$2x-\frac{1}{3}x^4+3-x^3$$

Si preferisce però scriverlo sempre in forma ordinata o secondo le potenze decrescenti di x o, ma più raramente, secondo le potenze crescenti dell'indeterminata. Rispettivamente in uno di questi due modi:

$$-\frac{1}{3}x^4-x^3+2x+3 \ \text{ oppure: } \ 3+2x-x^3-\frac{1}{3}x^4.$$

Operare con la somma algebrica (addizione e sottrazione) o con la moltiplicazione di polinomi nella stessa indeterminata non implica nulla di diverso rispetto alla situazione in cui tali operazioni si eseguono con polinomi generici. Caso mai ora le operazioni sono più semplici. Neanche adesso riteniamo, ad ogni buon conto, che sia il caso di aggiungere altro a quanto già hai appreso.

VERIFICHE [2]

1. Ridurre alla forma normale i seguenti polinomi in x,y tenendo presente che un polinomio di 1° grado in quelle variabili ha la seguente forma normale:

$$a\,x + b\,y + c$$

ed un polinomio di 2° grado nelle stesse variabili ha la seguente forma normale:

$$a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f\,,$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri o espressioni letterali non contenenti x, y :

1. $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}y+1\right)-(x-y).$ $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{6}\right]$
2. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}(2x-y).$ $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{7}{12}x+\frac{7}{6}\right]$
3. $(x+2)(y+2)-(x-2)(y-1).$ $[\mathbf{R.}\ \ 3x+4y+2]$
4. $(a-1)(x+a)-(a+1)(y+a-1).$ $[\mathbf{R.}\ \ (a-1)x-(a+1)y+(1-a)]$
5. $a(x-a)+b(y+b)-(a+b)(a-b).$ $[\mathbf{R.}\ \ ax+by+(2b^2-2a^2)]$
6. $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(x+y)^2.$ $\left[\mathbf{R.}\ \ 2x^2+2xy+2y^2-4x-y+\frac{17}{4}\right]$
7. $(x+y+1)(x-y-1)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(y-\frac{1}{2}\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \ x^2-\frac{1}{2}xy-y^2+\frac{1}{4}x-3y-\frac{1}{2}\right]$
8. $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}.$ $\left[\mathbf{R.}\ \ x^2+y^2-4x-y+\frac{11}{4}\right]$
9. $\left(2x-\frac{1}{3}y\right)^2+(2x-a)\left(\frac{1}{2}y-2a\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \ 4x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2-4ax-\frac{1}{2}ay+2a^2\right]$
10. $(x+y+a)^2-(x+a)^2-(y+a)^2.$ $[\mathbf{R.}\ \ 2xy-a^2]$

2. Nello svolgimento seguito per semplificare le seguenti espressioni sono stati commessi degli ERRORI. Individuarli e correggerli.

1. $(2x-y)^2+(2x+y)^2-4\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2=4x^2-y^2+4x^2+y^2+4xy-4x^2-4xy-y^2=4x^2-y^2.$
2. $(2a-3b)^2(2a+3b)^2-(a-b)^4=(4a^2-9b^2)^2-(a^4-4a^3b-6a^2b^2+4ab^3+b^4)=$
   $=16a^4-72a^2b^2+81b^4-a^4+4a^3b+6a^2b^2-4ab^3-b^4=15a^4+4a^3b-66a^2b^2-4ab^3+80b^4.$
3. $(a+b)^3-(a^2+b^2)(a+b)-(a-b)(a+b)^2=(a^3+3ab+b^3)-(a^3+a^2b+ab^2+b^3)-(a^2-b^2)^2=$
   $=a^3+3ab+b^3-a^3-a^2b-ab^2-b^3-a^4+2a^2b^2-b^4=-a^4+2a^2b^2-b^4-a^2b-ab^2+3ab.$
4. $(x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2=x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+x^2-2xy+y^2=x^2+3y^2.$
5. $(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2-(x+y+z)^2=$
   $=x^2+2xy+y^2+x^2+2xz+z^2+y^2+2yz+z^2-x^2-y^2-z^2-2xy-2yz=x^2+y^2+z^2.$
6. $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-(x+y)^2=x^2-x-1+y^2-y+\frac{1}{4}-x^2-y^2-2xy=-2xy-x-y-\frac{3}{4}.$

3. Nel ragionamento che segue si giunge ad una conclusione assurda. Se ne deve desumere che nel ragionamento stesso è inserito almeno un errore. Individualo.

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella “Integrazione 2”, file “Matematica – Integrazione 2, unità 1-27”, pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Sia a un qualsiasi numero reale. Risulta:

$$a^2 - a^2 = (a + a)\,(a - a) \quad \text{e} \quad a^2 - a^2 = a\,(a - a)\,;$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza è dunque:

$$(a + a)\,(a - a) = a\,(a - a)\,,$$

e da qui, dividendo entrambi i membri per a – a, si ottiene:

$$a + a = a\,, \quad \text{ossia:} \quad 2\,a = a\,.$$

Pertanto: se $a=1$ allora $2=1$; se $a=2$ allora $4=2$; se $a=1/2$ allora $1=1/2$; eccetera.
In conclusione: tutti i numeri sono uguali!

4. Posto che a, b, c siano le misure di tre segmenti qualsiasi interpretare mediante un idoneo disegno geometrico la seguente relazione: $(a+b)\,c = a\,c + b\,c$.

5. Semplificare le seguenti espressioni letterali:

ESPRESSIONE	Risultato
1. $\left(\frac{1}{2}x^2+2x+1\right)\left(2x^2-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{5}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$
2. $\left(\frac{1}{2}a+3\right)+\left(\frac{1}{2}a+2\right)-\left(\frac{3}{2}+a\right)$	$\frac{7}{2}$
3. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a+1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}b+1\right)+(a+b)$	$\frac{7}{4}a+\frac{3}{2}b+\frac{5}{6}$
4. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}(2x+y)$	$\frac{25}{12}x+\frac{4}{3}y+\frac{3}{2}$
5. $\left(2x+\frac{1}{3}y\right)^2-(2x+y)\left(x+\frac{1}{2}y\right)$	$2x^2-\frac{2}{3}xy-\frac{7}{18}y^2$
6. $\left(\frac{1}{3}a+1\right)^3+\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}a+1\right)^2$	$\frac{4}{27}a^3+\frac{19}{18}a^2+\frac{7}{3}a+\frac{3}{2}$
7. $\left[\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2+\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2\right]\left(a+\frac{1}{2}b\right)$	$\frac{17}{4}a^3+\frac{49}{8}a^2b+\frac{25}{4}ab^2+\frac{17}{8}b^3$

6. Trasformare le espressioni letterali in modo da poterle immettere in una calcolatrice simbolica e calcolarne il valore semplificato:

1. $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
2. $\left[\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2+\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2\right]\left(a+\frac{1}{2}b\right)$
3. $\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}(x^2-1)\right]-\frac{1}{3}(x^2+1)(x^2-1)$

7. Ridurre alla forma normale i seguenti polinomi nell'indeterminata x, ricordando che un polinomio nella variabile x ha la seguente forma normale: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

a) $(2x-1)^2+\frac{1}{3}(x+1)$;
b) $\frac{1}{3}(ax+1)^2-(x+a)^2$.
c) $\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}(x^2-1)\right]^2-\frac{1}{3}(x^2+1)(x^2-1)$;
d) $\left(x-\frac{1}{3}k\right)^3-\frac{1}{4}x(2x-k)^2$.

8. Si può controllare facilmente che si ha:

$$15+16+17=48,\quad 105+106+107=318,\quad 1002+1003+1004=3009,$$

e, inoltre, che le somme ottenute – vale a dire: 48, 318, 3009 – sono numeri divisibili per 3.
Dimostrare che, in generale, la somma di 3 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 3.
Si può dire che la somma di 4 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 4?
E che la somma di 5 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 5?

9. Dimostrare che la somma di 3 qualsiasi numeri naturali dispari consecutivi è divisibile per 3.
Si può dire che la somma di 4 qualsiasi numeri naturali dispari consecutivi è divisibile per 4?
E che la somma di 5 qualsiasi numeri naturali dispari consecutivi è divisibile per 5?

10. Si può controllare immediatamente che si ha:

$$3 = 2^2 - 1^2,\quad 7 = 4^2 - 3^2,\quad 21 = 11^2 - 10^2.$$

Dimostrare che ogni numero dispari può essere ottenuto come differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi o, viceversa, dimostrare che questo non è vero.

11. Dimostrare che, se da un numero, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, si sottrae la somma delle sue cifre, si ottiene un numero divisibile per 9. La proprietà è vera quale che sia il numero assegnato, ma puoi eseguire la dimostrazione nel caso che esso abbia 4 cifre.

12. Indicato con P(x) – si legge "pi di x" – il seguente polinomio in x: $2x^2-3x+2$, calcolare:

$$P(0),\quad P(1),\quad P\left(\frac{1}{2}\right),\quad P\big(P(0)\big),\quad P\big(P(1)\big),\quad P\left(P\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

13. ® **LABORATORIO DI MATEMATICA**. Scrivi la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1. Sei in grado di trovare una formula per calcolarla rapidamente?
Prova a discuterne in classe con i compagni. Se del caso, chiedete aiuto al professore.

14. Considerata l'espressione $a_n=2n-1$, calcolare la somma dei 500 termini:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{499}+a_{500}\,.$$

15. Dato un qualsiasi numero naturale N, lo si moltiplichi per se stesso e si aggiunga il medesimo numero al prodotto ottenuto: si indichi con M il risultato di questa operazione. Si moltiplichi adesso il successivo di N per se stesso e si sottragga tale successivo dal prodotto ottenuto: verificare che il risultato dell'operazione è ancora M.
Un caso particolarmente interessante si ha quando N è compreso fra 0 e 8 inclusi. In tal caso infatti si ottengono due modi diversi di rappresentare uno stesso numero utilizzando per 3 volte solo ed esclusivamente una stessa cifra. Esempio: $6\times6+6=42$, $7\times7-7=42$.

16. ESERCIZIO RISOLTO.
I numeri reali a, b sono tali che $a+b=8$ e $a^2+b^2=34$. Quanto vale a^4+b^4 ?
RISOLUZIONE.
Si ha: $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$. D'altro canto: $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$ e da qui: $ab=15$ e $a^2b^2=225$. Di modo che, a conti fatti: $a^4+b^4=706$.

17. Sono dati due numeri reali a, b non negativi e tali che $a\geq b$ e $a+b\leq1$. Dimostrare che risulta: $a^2+3b^2\leq1$.
Dimostrare inoltre che risulta $a^2+3b^2+5c^2\leq1$, essendo a, b, c numeri reali non negativi tali che $a\geq b\geq c$ e $a+b+c\leq1$.

[**R**. Constatato che $a^2+3b^2=a^2+b^2+2b^2\leq a^2+b^2+2ab$, allora … .
Medesimo ragionamento per la seconda parte]

18. ® Utilizzando le formule dei cosiddetti "prodotti notevoli", calcolare rapidamente e senza l'uso di

strumenti di calcolo automatico i valori delle seguenti espressioni numeriche:
a) $59.674 \times 59676 - 59675^2$; b) $4.786^2 - 4.784 \times 4788$;
c) $26^2 - 24^2$; d) $102^2 - 98^2$.

19. Si prendano in considerazione i due numeri $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ e $b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$: una semplice calcolatrice permette facilmente di verificare che $a>b$. Ma si può ottenere la stessa verifica senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico. Come?

20. Nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale è dato un qualsiasi numero di tre cifre, in cui però la cifra delle centinaia e quella delle unità differiscono di una unità. Considerato il numero che si ottiene da quello assegnato dopo aver scambiato di posto la cifra delle centinaia con quella delle unità, sottrarre dal maggiore il numero minore. Dimostrare in modo esauriente perché la differenza è 99, indipendentemente dalla scelta del numero originario.

21. Siano a, b, c tre numeri interi consecutivi comunque scelti. Esprimere in funzione di b:

1) $a+b+c$; 2) $a^2+b^2+c^2$; 3) $a^3+b^3+c^3$.

[**R.** In ogni caso: a) … ; b) $3b^2+2$; c) $3b^3+6b$]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che l'espressione $2ab+1$ rappresenta un monomio?
2. È vero che l'espressione $a^2(-b)$ rappresenta un monomio?
3. È vero che $(a+2b)(a-2b) = a^2-2b^2$?
4. È vero che $(2x+3y)^2=4x^2+9y^2$?
5. È vero che il quadrato di un binomio è uguale alla somma dei quadrati dei suoi termini aumentata del loro prodotto?
6. È vero che bisogna sommare $6x^2y$ all'espressione $\frac{9}{4}x^2+4x^2y^2$ per ottenere un quadrato perfetto?
7. È vero che bisogna sommare 4 all'espressione $\frac{1}{4}a^2b^2-ab$ per ottenere un quadrato perfetto?
8. È vero che risulta: $\left(\frac{1}{3}xy-3\right)\left(\frac{1}{9}x^2y^2+xy+9\right)=\frac{1}{27}x^3y^3-27$?
9. Dimostra che:
   - il quadrato di un numero pari è pari e il quadrato di un numero dispari è dispari;
   - se il quadrato di un numero è pari anche il numero è pari e se è dispari anche il numero è dispari.
10. Posto che a, x, y siano numeri interi con $a\neq 0$, è vero che si può scrivere:

$$a^{x-y}=\frac{a^{-y}}{a^{-x}}\ ?$$

RISPOSTE.

1. No. Infatti in essa non figura soltanto un prodotto di fattori.
2. Sì. Infatti in essa figura soltanto un prodotto di fattori.
3. No. Il valore corretto del prodotto è $a^2 - 4\,b^2$.
4. No. Il valore corretto del quadrato è $4x^2+12xy+9y^2$.
5. No. La somma dei quadrati dei termini deve essere aumentata del loro doppio prodotto.
6. Sì. Risulta infatti: $\frac{9}{4}x^2+4x^2y^2+6x^2y=\left(\frac{3}{2}x+2xy\right)^2$.

7. No. In realtà bisogna sommare 1. Si ha, infatti: $\frac{1}{4}a^2b^2 - ab + 1 = \left(\frac{1}{2}ab - 1\right)^2$.

8. Sì. In virtù di una nota formula oppure in seguito a calcolo.

9. Se il numero a è pari si può considerare come il doppio di un numero b, ossia: $a=2b$. Di modo che: $a^2=(2b)^2=2(2b^2)$, per cui a^2 è pari. Se invece a è dispari allora esiste un numero b tale che $a=2b+1$, per cui $a^2=(2b+1)^2=4b^2+4b+1=2(2b^2+2b)+1$, per cui a^2 è dispari.
Viceversa, se, dato un numero a, risulta che il suo quadrato è pari, il numero stesso è pari, dal momento che se fosse dispari anche il suo quadrato lo sarebbe, contro l'ipotesi che sia pari. Così pure, se il quadrato di a è dispari, anche a lo è, dal momento che se fosse pari anche il suo quadrato lo sarebbe, contro l'ipotesi che sia dispari.

10. È vero. Si ha infatti:

$$a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^{-x}} \cdot a^{-y} = \frac{a^{-y}}{a^{-x}}.$$

LETTURA

UN QUADRATO MAGICO

Il gioco che ti proponiamo [3] richiede la presenza di un pubblico, composto da una o più persone.

1. Chiedi ad una persona del pubblico di scegliere uno qualsiasi dei seguenti numeri:
   34 – 38 – 42 – 46 – 50 – 54 – 58 – 62 – 66 – 70 – 74 – 78 – 82 – 86 – 90 – 94 – 98.
   Per comodità chiamiamolo N.
   (Ti facciamo notare che si tratta dei numeri di due cifre che si ottengono sommando a 30 un multiplo di 4)
   Calcola mentalmente il quoziente q della divisione di $N-30$ per 4 (il resto è ovviamente 0). Come dire che: $N-30=4q$, vale a dire $N=30+4q$.
2. Riempi le 16 caselle di un quadrato 4×4 come indicato in figura (Fig. 3).

q	q+1	q+2	q+3
q+4	q+5	q+6	q+7
q+8	q+9	q+10	q+11
q+12	q+13	q+14	q+15

FIG. 3

q	q+1		q+3
		q+6	
q+8	q+9		q+11
q+12	q+13		q+15

FIG. 4

3. Chiedi ad una persona del pubblico di indicare uno qualsiasi dei numeri inseriti nel quadrato. Supponiamo, per fissare le idee, che questo numero sia $q+6$. Lascia questo numero e cancella tutti gli altri numeri della riga e della colonna che s'incrociano nella casella di tale numero (Fig. 4).
4. Ripeti quest'ultima operazione altre due volte, facendo scegliere numeri diversi da quelli scelti in precedenza. Supponiamo che le scelte cadano sui numeri $q+1$ e $q+12$. Rimangono nel quadrato (Fig. 5) i soli numeri $q+1$, $q+6$, $q+11$, $q+12$. La loro somma è evidentemente: $30+4q$. Vale a dire proprio il numero N segnalato in origine.

[3] È mutuato da Ennio Peres, *L'elmo della mente*, RBA Italia, Milano, 2008, pag. 32 e segg.

	q+1		
		q+6	
			q+11
q+12			

FIG. 5

Il gioco diventa più interessante se, invece dei numeri sopraddetti, si fa scegliere ad una persona del pubblico un qualsiasi numero N maggiore di 30. In tal caso però può capitare facilmente che $N-30$ non sia multiplo di 4 e pertanto, dividendo $N-30$ per 4 si otterrà un quoziente q ed un resto r che non necessariamente è 0. Ebbene, in tal caso, essendo $N-30=4q+r$ e perciò $N=30+4q+r$, basta apportare alla procedura precedente un lieve correttivo: nell'ultima riga del quadro di figura 3, si aumenterà di r ciascuno dei 4 numeri, che così diventano: $q+12+r, q+13+r, q+14+r, q+15+r$. Nella fattispecie dell'esempio che ha portato alla figura 15, la somma dei 4 numeri è allora $30+4q+r$, vale a dire proprio il numero N.