Prerequisiti:
- Operazioni con i numeri reali e con i polinomi.
- Conoscere alcune funzioni elementari (lineare, quadratica, omografica) e disegnarne i grafici.

L'unità riguarda il 2° biennio di tutte le scuole superiori

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *determinare il dominio di una funzione*
- *rappresentare funzioni servendosi di strumenti di calcolo automatico*
- *riconoscere, attraverso la lettura del grafico di una funzione, la positività della funzione e la sua crescenza e decrescenza*
- *fornire una definizione di funzione crescente o decrescente*
- *stabilire la monotonia di qualche semplice funzione*
- *riconoscere una funzione invertibile e determinare la funzione inversa*
- *comporre due funzioni e riconoscere semplici funzioni composte individuando le funzioni componenti*
- *costruire modelli di crescita o decrescita lineare*
- *riconoscere fenomeni diversi riconducibili a uno stesso modello matematico*
- *avere consapevolezza del concetto di pendenza media di una curva e di velocità media di variabilità di un processo*
- *proporre un'idea intuitiva di derivata di una funzione e interpretarne il significato sia geometrico sia fisico*

Generalità sulle Funzioni

Unità 51

51.1 FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

51.1.1 Sono parecchie le funzioni che dovresti conoscere assieme ai loro grafici. Le elenchiamo.

- La funzione:
$$\mathbf{y = ax + b}$$
dove a, b sono parametri reali. È nota come ***funzione lineare*** e il suo grafico, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è una ***retta* non parallela all'asse delle y**.
- La funzione:
$$\mathbf{y = a\,x^2 + b\,x + c}$$
dove a, b, c sono parametri reali ($a\neq0$). È nota come ***funzione quadratica*** e il suo grafico è una ***parabola* con asse parallelo all'asse delle y**.
- La funzione:
$$\mathbf{y = \frac{a\,x + b}{x + c}}$$
dove a, b, c sono parametri reali ($ac\neq b$). È nota come ***funzione omografica*** e il suo grafico è una ***iperbole equilatera* con asintoti paralleli agli assi di riferimento** (sono esattamente le rette $x=-c$ e $y=a$).
- La funzione:
$$\mathbf{y = \sqrt{r^2 - x^2}}$$
dove r è un parametro reale positivo. Il suo grafico è la semicirconferenza situata nel semipiano $y\geq0$, avente il centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio r.
Analoghe sono le funzioni che danno luogo a semi-ellissi o semi-iperboli.
- La funzione:
$$\mathbf{y=\begin{cases} 1 & \text{se } x\leq1 \\ 2 & \text{se } x>1 \end{cases}}$$
e simili. È una particolare ***funzione costante a tratti***. Il suo grafico, nel caso specifico, è costituito da due semirette parallele all'asse x. In altre situazioni può essere formato da due o più semirette e/o segmenti, sempre paralleli all'asse x.
- La funzione:
$$\mathbf{y=\begin{cases} x-1 & \text{se } x\leq1 \\ 2-x & \text{se } x>1 \end{cases}}$$
e simili. È una particolare ***funzione lineare a tratti***. Il suo grafico, nel caso specifico, è costituito da due semirette. In altre circostanze può essere formato da due o più segmenti e/o semirette. La "funzione costante a tratti" è una particolare "funzione lineare a tratti".

Imparerai a conoscere altre funzioni ed i rispettivi grafici. Ma prima dobbiamo soffermarci su alcune considerazioni d'ordine generale.

51.1.2 Precisiamo subito che le funzioni delle quali ci occupiamo sono le **funzioni reali di variabile reale** ed è a queste che ci riferiremo senza specificarlo di volta in volta.
Queste funzioni si suddividono in *algebriche* e *trascendenti*.
Una funzione f(x) si dice **algebrica** se, dato x, il valore f(x) si può ottenere applicando un numero finito di volte le sole operazioni addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza con esponente in $\mathbb{N}$. Questo comporta che la relazione $y=f(x)$ può essere trasformata in un polinomio (nelle indeterminate

x, y) uguagliato a zero, dopo un numero finito di addizioni, moltiplicazioni ed elevamenti a potenza con esponente in $\mathbb{N}$.
Una funzione f(x) non algebrica si dice **trascendente**. In altre parole, una funzione trascendente è una funzione f(x) tale che, dato x, il valore f(x) non si può ottenere mediante le sole operazioni addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza con esponente in $\mathbb{N}$, applicate un numero finito di volte.
Sono esempi di funzioni algebriche le seguenti:

$$(1)\ \ y=x^2-2x, \qquad (2)\ \ y=\frac{1}{x-1}, \qquad (3)\ \ y=\sqrt{1-x^2}.$$

Prova da solo a trasformarle in polinomi in x, y uguagliati a 0.
Per esempi di funzioni trascendenti rinviamo alle due unità successive.
Le funzioni algebriche si suddividono poi in *razionali* e *irrazionali*.
Sono **funzioni razionali** i polinomi in x (che si dicono anche ***funzioni polinomiali*** o ***funzioni razionali intere***) e le frazioni algebriche in x (che si dicono anche ***funzioni razionali fratte***).
Sono **funzioni irrazionali** quelle funzioni in cui la variabile indipendente figura sotto il segno di radice di indice qualsiasi (in particolare: radice quadrata, radice cubica).
Per esempio, le precedenti funzioni (1) e (2) sono razionali: in particolare la (1) è razionale intera e la (2) è razionale fratta; la funzione (3) è invece irrazionale.

51.1.3 La prima cosa da fare, quando si studia una funzione f(x), è la determinazione del suo ***dominio*** (o ***campo di definizione*** o ***di esistenza***), che come sai indichiamo con la scrittura:

$$\mathbf{dom\ f(x)}.$$

Se questo non è immediato, in genere lo si trova risolvendo equazioni e/o disequazioni in x.
In particolare:

- se f(x) è un polinomio in x: dom f(x)$=\mathbb{R}$;
- se f(x) è una frazione algebrica $\frac{A(x)}{B(x)}$: dom f(x)$=\{x\,|\,B(x)\neq 0\}$;
- se f(x) è la funzione irrazionale $\sqrt{A(x)}$: dom f(x)$=\{x\,|\,A(x)\geq 0\}$.

In secondo luogo, se è possibile e necessario, si studia il segno della funzione, cioè si trovano i valori eventuali in cui la funzione è *nulla* (il grafico interseca l'asse x; questi valori sono detti *zeri* della funzione) e gli intervalli eventuali in cui è *positiva* (grafico "al di sopra" dell'asse x) o *negativa* (grafico "al di sotto" dell'asse x). L'operazione è praticabile se è ricondotta allo studio del segno di polinomi di 1° e 2° grado.

ESERCIZIO. Determinare il dominio di ciascuna delle seguenti funzioni e inoltre gli intervalli in cui la funzione considerata è positiva, negativa o nulla:

$$a)\ \ y=\frac{x}{x^2+1}; \qquad b)\ \ y=\frac{x^2+1}{x}; \qquad c)\ \ y=x(x^2-1); \qquad d)\ \ y=\frac{2x-1}{x+2}.$$

L'insieme dei valori che una funzione f(x) può assumere, quando x varia in dom f(x), si chiama ***immagine*** della funzione e si indica con $\mathbf{im\ f(x)}$.
La determinazione dell'insieme im f(x) può essere abbastanza complicata. Avremo occasione e modo di occuparcene, soprattutto nel prosieguo degli studi.
Per il momento, magari aiutati dalla rappresentazione grafica, possiamo dire, ad esempio, che:

- l'immagine della funzione f(x)=2x+1 è l'insieme dei reali;
- l'immagine della funzione costante f(x)=2 è l'insieme {2};

- l'immagine della funzione $f(x)=x^2$ è l'insieme dei reali non negativi;
- l'immagine della funzione $f(x)=1-x^2$ è l'intervallo $]-\infty,1]$ [1].

Ti proponiamo di disegnare il grafico della funzione E(x), parte intera di x, con $x\in[-2,2]$, e di indicarne, oltre al dominio, anche l'immagine.

51.2 FUNZIONI MONOTONE. MODELLI DI CRESCITA O DECRESCITA LINEARE

51.2.1 In un intervallo $J=]a,b[$ una funzione f(x) si dice:

- **crescente** (o, preferibilmente, **strettamente crescente**) se, per ogni $x', x'' \in J$:
  $$x'<x'' \rightarrow f(x')<f(x'') \text{ (Fig. 1);}$$
- **decrescente** (o, preferibilmente, **strettamente decrescente**) se, per ogni $x', x'' \in J$:
  $$x'<x'' \rightarrow f(x')>f(x'') \text{ (Fig. 2);}$$
- **non decrescente** (o, anche, **debolmente crescente**) se, per ogni $x', x'' \in J$:
  $$x'<x'' \rightarrow f(x')\le f(x'') \text{ (Fig. 3);}$$
- **non crescente** (o, anche, **debolmente decrescente**) se, per ogni $x', x'' \in J$:
  $$x'<x'' \rightarrow f(x')\ge f(x'') \text{ (Fig. 4);}$$
- **monotona** se si presenta una delle situazioni precedenti.

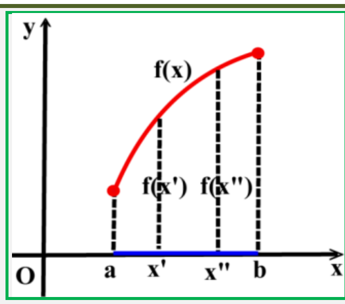

FIG. 1

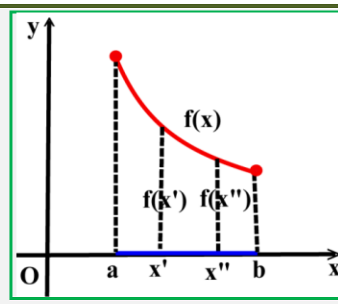

FIG. 2

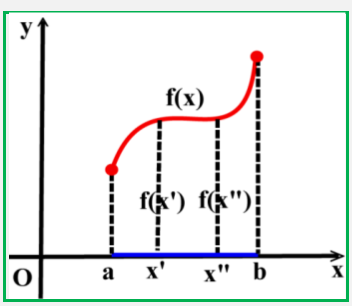

FIG. 3

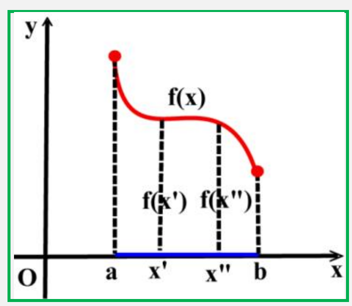

FIG. 4

È evidente che, una volta disegnato il grafico di una funzione, dal grafico stesso si possono intuire gli intervalli di monotonia, oltre agli eventuali intervalli in cui la funzione è positiva o negativa.
Per esempio, con riferimento alla funzione:

[1] I simboli $+\infty$ (*più infinito*) e $-\infty$ (*meno infinito*) non rappresentano numeri, ma hanno la proprietà di essere, il primo maggiore di ogni numero reale ed il secondo minore di ogni numero reale.

$$y = \frac{x^3 - 1}{x},$$

definita negli x reali in cui $x \neq 0$ e disegnata in figura 5, si può concludere che:

- è nulla per $x=1$, positiva per $x<0$ ed $x>1$, negativa per $0<x<1$.
- è strettamente crescente per $x_B<x<0$ e per $x>0$ ed è strettamente decrescente per $x<x_B$.

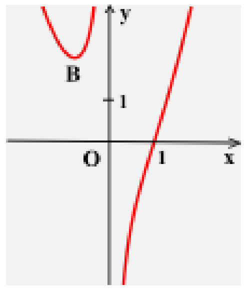

FIG. 5

Talvolta, tuttavia, bisogna determinare gli intervalli di monotonia di una funzione senza conoscerne il grafico. Addirittura, in certe situazioni il grafico si può disegnare solamente dopo aver determinato gli intervalli di monotonia. Tutto questo era certamente necessario prima dell'avvento del computer.
Si capisce allora come sia utile un qualche criterio per la ricerca di questi intervalli. Effettivamente un tale criterio esiste, ma per il momento non possiamo occuparcene e dobbiamo rifarci alla definizione, anche se il procedimento può sembrare troppo dispendioso.
Naturalmente, tutto questo vale se si cerca di pervenire al grafico della funzione usufruendo solo di "carta e penna", oltre che della propria testa, ma se si ricorre ad uno strumento di calcolo automatico, fornito di idoneo software, come abbiamo fatto per la funzione disegnata in figura 5, non ci sono problemi per nessun tipo di funzioni: esse infatti sono immediatamente visualizzabili sullo schermo di tale strumento.

Ti proponiamo qualche semplice esercizio.

1. Dimostra, ricorrendo alla definizione, che le seguenti funzioni sono strettamente crescenti negli intervalli indicati a fianco. Utilizzando poi un idoneo software matematico, rappresenta sullo schermo del computer i loro grafici e verifica i risultati ottenuti.

   a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $]-\infty, 0[$; b) $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$; c) $f(x) = -\frac{1}{x}$ in $\mathbb{R}_0$.

2. Delle seguenti funzioni determina il dominio e gli eventuali intervalli in cui crescono o decrescono. Utilizzando poi un idoneo software matematico, rappresenta sullo schermo del computer i loro grafici e verifica i risultati ottenuti.

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^3 - 1$; c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

51.2.2 Avrai modo di approfondire questo argomento nel prosieguo degli studi. Per il momento ci soffermiamo su alcuni *modelli di crescita* e *decrescita lineare*.

- Consideriamo un punto materiale che si muove di moto uniforme con velocità costante v su una retta, sulla quale è stato fissato un riferimento cartesiano (O,U) (Fig. 6).

Sia P la posizione del punto materiale in un generico istante t e sia P_0 quella nell'istante 0. Ebbene, indicate con x e con x_0 rispettivamente le ascisse dei punti P e P_0, la legge che esprime il modo di variare di x rispetto al tempo t (detta *legge del moto* o *legge oraria*) è la seguente:

$$x = vt + x_0.$$

Si tratta evidentemente di una funzione lineare e la retta che la rappresenta in un piano cartesiano (Otx) (Fig. 7), definita per $t \geq 0$, ha come pendenza proprio la velocità v del punto materiale.

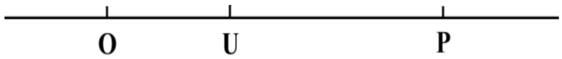

FIG. 6

FIG. 7

Esercizi.

1. Un corpo si muove su una retta, sulla quale è stato stabilito un riferimento cartesiano (O,U), in base alla seguente legge del moto: $x = -20t + 5$, con $t \geq 0$.
   Sapendo che i tempi sono misurati in secondi e le distanze in metri, determina:
   a) la posizione del corpo all'istante 0;
   b) l'istante e la posizione del corpo quando inverte il moto;
   c) gli istanti in cui passa per i punti O ed U.
2. Un camionista copre, a pieno carico, un certo percorso in un dato tempo. Nel viaggio di ritorno, essendo più leggero, aumenta la velocità media del 20%. In quale percentuale diminuisce il tempo di percorrenza? [**R.** ≈16,67%]

• Prendiamo una sbarra metallica lunga L_0 alla temperatura di 0°C e riscaldiamola fino a portarla alla temperatura t. Per effetto del riscaldamento la sbarra si allunga fino alla lunghezza L. Fatti sperimentali comprovano che l'allungamento della sbarra, vale a dire la quantità $L-L_0$, è direttamente proporzionale alla lunghezza iniziale, supposta a 0°C, ed alla temperatura t. Dunque: $L-L_0=\lambda L_0 t$, dove la costante di proporzionalità λ – chiamata *coefficiente di dilatazione lineare* – dipende dalla sostanza con cui è fatta la sbarra; è misurata in $°C^{-1}$. In definitiva l'espressione che fornisce la nuova lunghezza della sbarra è data dalla seguente formula:

$$L = L_0(1+\lambda t).$$

Si tratta di una funzione lineare e la retta che la rappresenta in un piano (OtL) ha pendenza λL_0.

Tenendo presente che i coefficienti di dilatazione lineare delle sostanze metalliche hanno grandezze di ordine $10^{-6}\ °C^{-1}$, sapresti spiegare perché la legge di dilatazione superficiale e quella di dilatazione cubica di una sostanza metallica possono essere ritenute con buona approssimazione le seguenti:

$$S = S_0(1+\sigma t), \quad V = V_0(1+\alpha t),$$

dove σ ed α sono uguali rispettivamente a 2λ ed a 3λ?

Facciamo notare che anche le leggi di dilatazione superficiale e cubica sono funzioni lineari.

51.3 FUNZIONI COMPOSTE E FUNZIONI INVERTIBILI

51.3.1 Dati tre insiemi – X, Y, Z – siano definite due funzioni – f, g – la prima da X verso Y e la seconda da Y verso Z (Fig. 8). Si può prendere in considerazione la funzione che ad ogni $x \in X$ associa uno ed un solo $z \in Z$: precisamente quell'elemento z che è l'immagine nella g di quell'elemento $y \in Y$ che, a sua volta, è l'immagine di x nella f. Questa nuova funzione si chiama **funzione composta** di f con g. La indichiamo con la scrittura $\mathbf{f \circ g}$ **,** che si legge "*f composto con g*".

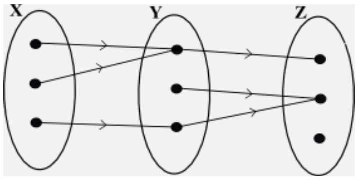

FIG. 8

Osserviamo che se ad x la f associa y e ad y la g associa z allora, essendo: $y=f(x)$ e $z=g(y)$, si ha [(2)]:

$$\mathbf{z = g[f(x)]}.$$

Un esempio. Siano le seguenti funzioni: $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2$.
Per ottenere la funzione composta di f con g – vale a dire la funzione $f \circ g$ – è sufficiente che nella g venga sostituito, al posto di x, il valore $2x+1$ fornito dalla f. Per cui si ha: $g[f(x)]=(2x+1)^2$.
Si può constatare che risulta, invece: $f[g(x)]=2x^2+1$.
E non ci vuol molto a capire che le due funzioni, $f \circ g$ e $g \circ f$, sono diverse.
Un alto esempio: la funzione $y=\sqrt{x^2+1}$ può essere pensata composta dalle funzioni $y=\sqrt{t}$ e $t=x^2+1$.
Se in una funzione composta le funzioni componenti sono semplici da studiare e pertanto è facile disegnarne l'andamento, allora sarebbe possibile anche la rappresentazione grafica della funzione composta, anche se il procedimento non è semplicissimo.
In ogni caso, come al solito, è possibile aiutarsi con uno strumento di calcolo automatico.

Ti proponiamo, per esercizio, di individuare le funzioni componenti delle seguenti funzioni composte:

$$y = \frac{1}{x^2+1}\ ; \qquad y = (2x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

51.3.2 Riprendiamo adesso, per un approfondimento, un argomento di cui hai fatto un primo studio nel 1° biennio: si tratta delle "*funzioni invertibili*".
Sai che di una qualunque relazione tra due insiemi X ed Y è possibile definire la relazione inversa. E sai pure che, se la relazione è una funzione f da X verso Y, la relazione inversa f^{-1} può essere ancora una funzione, ovviamente da Y verso X, ma può non esserlo.
Solo se f è una funzione biiettiva [(3)], la relazione f^{-1} è ancora una funzione: basta associare ad $y \in Y$ quell'unico $x \in X$ al quale la f associava per l'appunto y (Fig. 9).
In questo caso la funzione f si dice **invertibile** e la funzione f^{-1} si dice **funzione inversa** di f.
Se $y=g(x)$ è una funzione invertibile, la funzione inversa si indica solitamente con $x=g^{-1}(y)$.
Per esempio, la funzione:

$$g:\ x \to y = \frac{1}{2}x + 1,$$

definita da $\mathbb{R}$ verso $\mathbb{R}$, è invertibile e la sua inversa è la funzione:

$$g^{-1}: y \to x = 2y - 2,$$

[2] È questa la ragione per cui altri autori preferiscono la scrittura $g \circ f$ per indicare la funzione composta di f con g,
[3] Ricordiamo che ogni funzione biiettiva, definita da un insieme A verso un insieme B, realizza una corrispondenza biunivoca fra A e B.

essa pure definita da ℝ verso ℝ.
Non ci vuol molto a capire che le scritture:

$$y=\frac{1}{2}x+1 \quad \text{e} \quad x=2y-2$$

sono due modi diversi, ma equivalenti, di scrivere l'equazione.

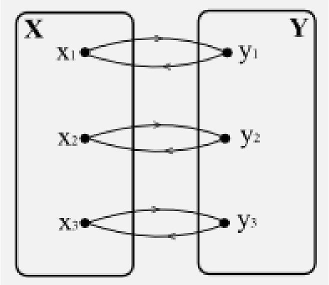

FIG. 9

In generale, le scritture $y=g(x)$ e $x=g^{-1}(y)$ sono due modi equivalenti di scrivere la stessa equazione. Questo ha un significato geometrico importante: in uno stesso piano cartesiano ortogonale (Oxy) il grafico che rappresenta la funzione $y=g(x)$ rappresenta pure la funzione $x=g^{-1}(y)$. Esso ha pure una conseguenza importante: se $y=g(x)$ è una funzione invertibile e se $x=g^{-1}(y)$ è la funzione inversa, allora anche $x=g^{-1}(y)$ è invertibile ed $y=g(x)$ è la sua inversa.
Di solito, in una funzione generica si preferisce indicare con x la variabile indipendente e con y la variabile dipendente. Ciò implica che la funzione inversa di $y=g(x)$ è scritta nella forma $y=g^{-1}(x)$ e non nella forma $x=g^{-1}(y)$. In questo modo, però, le due scritture $y=g(x)$ ed $y=g^{-1}(x)$ non sono più equivalenti, ma soprattutto lo scambio delle variabili x ed y fa sì che nel grafico di g^{-1} ogni punto (a,b) sia trasformato nel punto (b,a). E siccome questi due punti sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$ (bisettrice del 1° e 3° quadrante degli assi – Fig. 10) dobbiamo concludere che:
Se la funzione $y=g(x)$ è invertibile, il suo grafico è simmetrico di quello della funzione inversa $y=g^{-1}(x)$ rispetto alla retta di equazione $y=x$.
Si desume che se i due grafici hanno punti in comune, questi devono trovarsi sulla retta $y=x$.

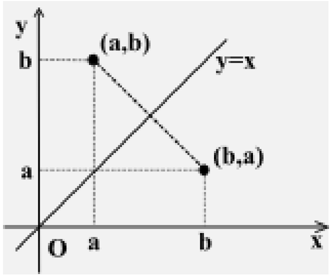

FIG. 10

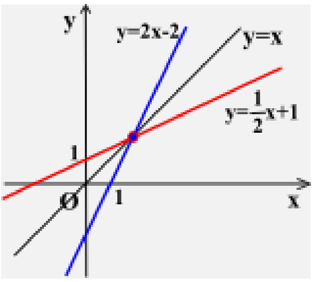

FIG. 11

Ritornando all'esempio della funzione: $y=\frac{1}{2}x+1$, la sua inversa, scritta con lo scambio di variabili, è la funzione: $y=2x-2$.
La figura (Fig. 11) evidenzia che i grafici delle due funzioni sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla retta $y=x$ ed il loro punto comune appartiene a questa retta.

Prima di procedere, ti proponiamo di rappresentare, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy):

a) il punto A e il suo simmetrico A' rispetto alla retta y=x, dopo aver trovato le coordinate di A', sapendo che:

$$1)\ A\left(1,-\frac{1}{2}\right),\quad 2)\ A\left(-2,-\frac{3}{2}\right),\quad 3)\ A\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right);$$

b) la retta r e la sua simmetrica r' rispetto alla retta y=x, dopo aver trovato l'equazione di r', sapendo che r ha la seguente equazione:

$$1)\ y=\frac{1}{3}x-2,\quad 2)\ y=-2x+\frac{1}{2},\quad 3)\ y=-x-2.$$

51.3.4 Prendiamo ora in esame la funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ verso $\mathbb{R}^+$. Si tratta evidentemente di una funzione non invertibile, dal momento che ad ogni numero reale y positivo corrispondono due valori opposti di x. Se, però, restringiamo il campo di esistenza della funzione assegnata all'intervallo $\mathbb{R}^+$, la funzione diventa invertibile. Dunque la funzione (Fig. 12):

$$y=x^2,\ \text{con } x\in\mathbb{R}^+,$$

è invertibile. La sua inversa è la funzione $x=\sqrt{y}$, che, dopo aver scambiato x con y, diventa:

$$y=\sqrt{x}\,.$$

Il grafico di questa funzione si ottiene da quello della prima con un ribaltamento intorno alla retta di equazione y=x (Fig. 12).

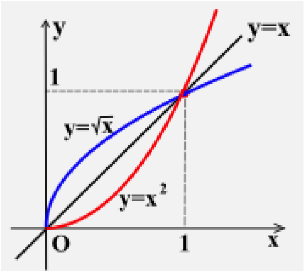

FIG. 12

Detto per curiosità, saremmo potuti partire dalla funzione $y=x^2$, con $x\in\mathbb{R}^-$. In tal caso la funzione inversa sarebbe stata $y=-\sqrt{x}$. Anche il suo grafico sarebbe stato diverso. Prova a disegnare i grafici delle due funzioni.

Vedremo nelle prossime due unità altri interessanti esempi di funzioni invertibili.

51.4 FUNZIONI SIMMETRICHE

51.4.1 Quando si considera una funzione f(x), di solito risulta: $f(-x)\neq f(x)$ ed $f(-x)\neq -f(x)$ per gli x appartenenti a $\text{dom}\,f(x)$. Se invece, per ogni $x\in\text{dom}\,f(x)$, avviene che:

- $f(-x)=f(x)$, allora la funzione si dice **pari**,
- $f(-x)=-f(x)$, allora la funzione si dice **dispari**.

Indicato con G il grafico della funzione f(x), cioè la curva di equazione y=f(x), avviene quanto segue:

- **Se f(x) è una funzione pari il suo grafico G è simmetrico rispetto all'asse y** (Fig. 13).
  Infatti appartengono contemporaneamente a G i punti A(a,f(a)) ed A'(−a,f(−a)), qualunque sia $a\in\text{dom}\,f(x)$, e questi punti sono simmetrici rispetto all'asse y, essendo $f(-a)=f(a)$.
- **Se f(x) è una funzione dispari il suo grafico G è simmetrico rispetto all'origine O degli**

assi (Fig. 14).
Infatti appartengono contemporaneamente a G i punti $A(a,f(a))$ ed $A'(-a,f(-a))$, qualunque sia $a \in \text{dom}\, f(x)$, e questi punti sono simmetrici rispetto all'origine, essendo $f(-a)=-f(a)$.

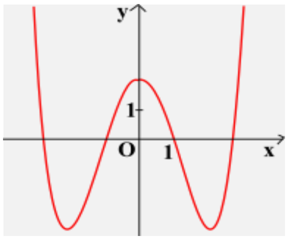

FIG. 13

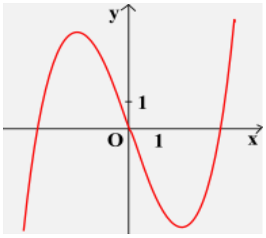

FIG. 14

In figura 13 ed in figura 14 sono rappresentate rispettivamente:

$$\text{la funzione pari } y=\frac{1}{5}x^4-2x^2+2 \text{ e la funzione dispari } y=\frac{1}{4}x^3-3x\,.$$

51.4.2 Le precedenti denominazioni di funzione pari e funzione dispari sono dovute al fatto che in ogni funzione algebrica $f(x)$ in cui la x figura <u>solo</u> con esponente pari risulta $f(-x)=f(x)$; mentre in ogni funzione algebrica $f(x)$ in cui la x figura <u>solo</u> con esponente dispari risulta $f(-x)=-f(x)$.
Questo però, ribadiamo, solo se la funzione è algebrica. Se invece essa è trascendente bisogna valutare di volta in volta. Su questo secondo aspetto ritorneremo in seguito [(4)].

51.5 FUNZIONI PERIODICHE

51.5.1 Considerata una funzione $f(x)$, il cui dominio sia un insieme illimitato sia inferiormente che superiomente, ammettiamo che T sia il più piccolo valore positivo per cui risulta:

$$f(x+kT) = f(x),$$

dove k è un intero relativo: la funzione $f(x)$ si dice **periodica** e T si chiama il suo ***periodo***.
Avremo occasione in futuro di occuparci di importanti funzioni periodiche, ma per il momento ci dobbiamo accontentare di qualche esempio particolare, come le seguenti funzioni:

$$f(x)=h(x-a),\ \text{con } a\le x<1+a,\ \forall a\in\mathbb{Z},$$

dove h è un parametro reale. Sono funzioni periodiche con periodo 1.
Un caso particolare, ottenuto per $h=1$, è costituito dalla funzione (Fig. 15):

$$f(x) = x-a,\ \text{con } a\le x<1+a,\ \forall a\in\mathbb{Z},$$

che è un modo diverso di scrivere la funzione:

$$f(x) = x-[x],$$

dove [x] indica la parte intera di x: è detta ***funzione mantissa***.

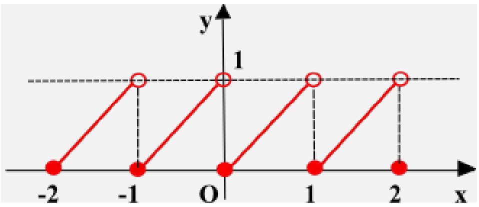

FIG. 15

[4] Cfr.: Unità 68 – Studio di una funzione, N° 68.1.

Anche le seguenti sono funzioni periodiche. Sei invitato a rappresentarle in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed a determinare il rispettivo periodo.

1. $f(x) = \frac{1}{2}(2x-a)$, con $a \leq 2x < 1+a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi);
2. $f(x) = \frac{1}{2}(x-a)$, con $a \leq x < 2+a$, $\forall a \in 2\mathbb{Z}$, ($2\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi pari);
3. $f(x) = \frac{1}{2}(2x-a)$, con $a \leq 2x < 2+a$, $\forall a \in 2\mathbb{Z}$, ($2\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi pari);
4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2a \leq x < 2a+1 \\ 1 & \text{se } 2a+1 \leq x < 2(a+1) \end{cases}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.
5. $f(x) = \begin{cases} 2(x-a) & \text{se } a \leq x < a+\frac{1}{2} \\ -2(x-1-a) & \text{se } a+\frac{1}{2} \leq x < a+1 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

51.5.2 Il fatto che una funzione f(x) sia periodica con periodo T ha un notevole significato geometrico, che la funzione rappresentata sopra (Fig. 15) ben evidenzia:

Il grafico di f(x) si ripete con le stesse caratteristiche dopo ogni intervallo di ampiezza T.

Le funzioni periodiche godono di alcune proprietà che ci limitiamo ad enunciare:

1) Se f(x) è una funzione periodica con periodo T, la funzione m f(kx), dove m è un numero reale e k un intero positivo, è ancora una funzione periodica, ma con periodo T/k.
2) Se $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono funzioni periodiche con periodi T_1 e T_2 nell'ordine e se esiste un intero positivo n tale che $T_1=nT_2$, allora la funzione a $f_1(x)$+b $f_2(x)$+c, dove a, b, c sono numeri reali con $a \neq 0$, è una funzione periodica con periodo T_1.

ESEMPI.

1. La funzione f(x)=x–[x] è una funzione periodica con periodo 1. La funzione f(2x)=2x–[2x] è funzione periodica con periodo1/2 (Fig. 16).
2. Per quanto detto testé, la funzione g(x)=f(x)+f(2x)=3x–[x]–[2x] è funzione periodica con periodo 1 (Fig. 17).

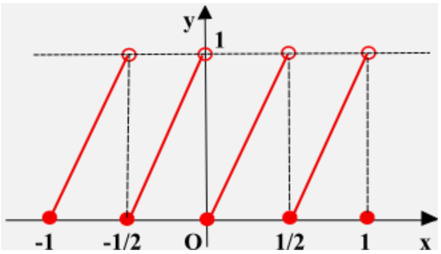

FIG. 16

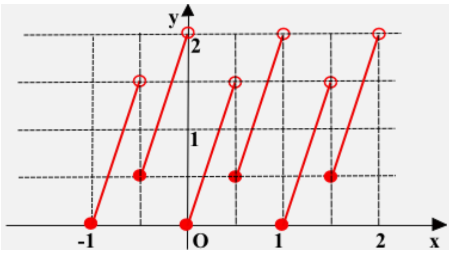

FIG. 17

51.5.3 Vi è un'altra proprietà delle funzioni periodiche, collegata alle funzioni composte ed è la seguente:

Se g è una funzione periodica, qualunque sia la funzione f, allora la funzione composta f∘g è funzione periodica. La funzione g∘f invece non è periodica.

Anche di questa proprietà tralasciamo la dimostrazione e ci accontentiamo di evidenziarla con un esempio.

Consideriamo allora la funzione $y = (x-a)^2$, con $a \leq x < 1+a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Ovvero, esplicitando:

$$y=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots \\ (x+2)^2 \quad \text{per} \quad -2\le x<-1 \\ (x+1)^2 \quad \text{per} \quad -1\le x<0 \\ x^2 \quad \text{per} \quad 0\le x<1 \\ (x-1)^2 \quad \text{per} \quad 1\le x<2 \\ (x-2)^2 \quad \text{per} \quad 2\le x<3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si tratta di una funzione composta dalla funzione f che a t associa $y=t^2$ e dalla funzione g che ad x associa $t=x-a$, sempre con $a\le x<1+a$, $\forall a\in\mathbb{Z}$. La funzione g è periodica, la f non lo è.

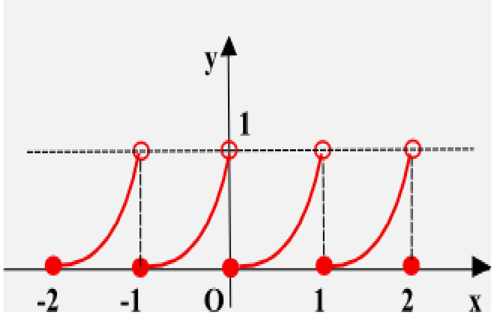

FIG. 18

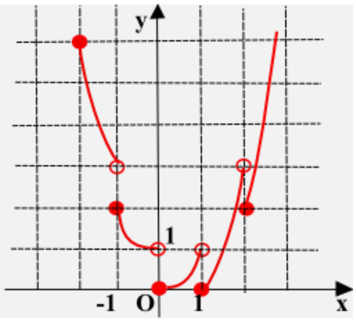

FIG. 19

Si può osservare che la funzione descritta sopra, vale a dire la funzione f∘g, è una funzione periodica (Fig. 18), mentre la funzione g∘f , vale a dire la funzione $y=x^2-a$, sempre con $a\le x<1+a$, $\forall a\in\mathbb{Z}$, non è una funzione periodica (Fig. 19 – limitata al semipiano $y\ge 0$). Anche quest'ultima funzione può essere esplicitata:

$$y=\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots \\ x^2+2 \quad \text{per} \quad -2\le x<-1 \\ x^2+1 \quad \text{per} \quad -1\le x<0 \\ x^2 \quad \text{per} \quad 0\le x<1 \\ x^2-1 \quad \text{per} \quad 1\le x<2 \\ x^2-2 \quad \text{per} \quad 2\le x<3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

51.6 FUNZIONE MODULO

Richiamiamo ora la tua attenzione su una particolare tipologia di funzioni. Si tratta di quelle funzioni in cui uno o più dei termini che le compongono compaiono sotto il segno di valore assoluto. Abbiamo già avuto qualche occasione per occuparcene. Adesso vogliamo fare un discorso più approfondito. La prima cosa che conviene fare, a meno di non ricorrere ad uno strumento di calcolo automatico, è "sciogliere" il valore assoluto. Dopodiché lo studio è possibile se è possibile quello dei singoli "pezzi" di cui la funzione si compone.
Ma vediamo di chiarire meglio con alcuni esempi. Sarà utile la tua collaborazione per spiegare qualche semplice passaggio, che dovesse rimanere eventualmente poco chiaro.

- ESEMPIO 1. Consideriamo la funzione $y=|x^2-1|$. Il suo grafico può essere ottenuto disegnando dapprima il grafico della funzione $f(x)=x^2-1$, posta sotto il segno di valore assoluto, e poi ribaltando rispetto all'asse x i tratti situati al di sotto del medesimo asse (Fig. 20). Si capisce subito che l'immagine della funzione è l'insieme dei numeri reali non negativi.

Questo procedimento è percorribile solo se l'intera funzione è sotto il segno di valore assoluto. Insomma se si tratta di una funzione del tipo $y=|f(x)|$, nota come ***funzione modulo***.

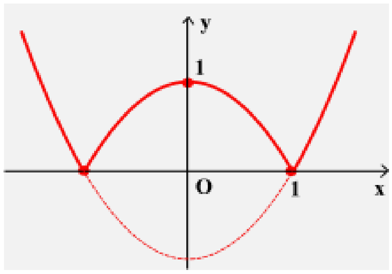

FIG. 20

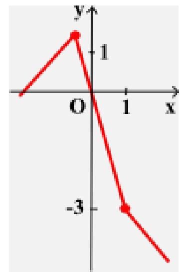

FIG. 21

Quando sotto il segno di valore assoluto non c'è l'intera funzione, bisogna necessariamente procedere allo "scioglimento" del valore assoluto, cosa che comunque è possibile fare anche nel caso della funzione modulo. Questo naturalmente se si opera con carta e penna. Se invece si fa ricorso ad un idoneo software matematico, quest'operazione non è necessaria. Ad ogni buon conto vediamo un esercizio esemplificativo.

- ESEMPIO 2. Per tracciare il grafico della funzione: $y=|x-1|-|2x+1|$ osserviamo anzitutto che risulta:

$|x-1|-|2x+1|=(x-1)-(2x+1)=-x-2$ se $x-1>0$ e $2x+1>0$ cioè se $x>1$;

$|x-1|-|2x+1|=-(x-1)-(2x-1)=-3x$ se $x-1<0$ e $2x+1>0$ cioè se $-\frac{1}{2}<x<1$;

$|x-1|-|2x+1|=(x-1)+(2x+1)=3x$ se $x-1>0$ e $2x+1<0$ cioè mai;

$|x-1|-|2x+1|=-(x-1)+(2x+1)=x+2$ se $x-1<0$ e $2x+1<0$ cioè se $x<-\frac{1}{2}$.

La funzione può essere scritta nel seguente modo:

$$y=\begin{cases} x+2 \text{ se } x\leq-\frac{1}{2} \\ -3x \text{ se } -\frac{1}{2}<x\leq 1 \\ -x-2 \text{ se } x>1 \end{cases}$$

Siccome siamo in grado di rappresentare i "pezzi" di cui si compone la funzione siamo anche in grado di rappresentare l'intera funzione (Fig. 21). Qual è l'insieme immagine della funzione?

51.7 PENDENZA DI UNA CURVA E VELOCITÀ DI VARIAZIONE DI UN PROCESSO

51.7.1 Hai imparato che una retta si dice tangente ad una conica se ha in comune con essa due punti coincidenti. Ora, per le coniche questa definizione funziona, giacché una qualunque retta non può avere più di due punti in comune con una conica. La definizione, invece, non regge più se al posto della conica abbiamo una curva algebrica di grado maggiore di 2 o addirittura una curva trascendente. Come mostra, benché a livello intuitivo, la figura 22, nella quale la retta t è tangente alla curva k nel punto A ma è secante nel punto B.

Bisogna allora pensare ad una nuova definizione di retta tangente ad una curva.

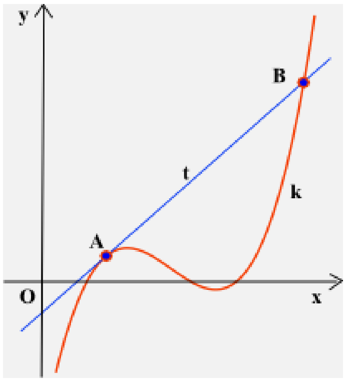

FIG. 22

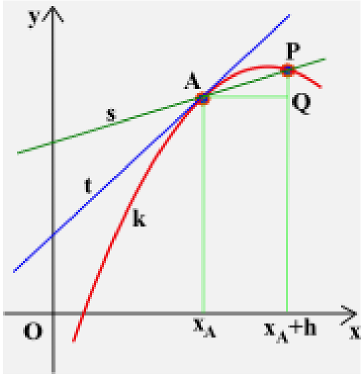

FIG. 23

51.7.2 Considerata una curva k, grafico della funzione y=f(x), sia $A(x_A,f(x_A))$ un suo punto (Fig. 23). Preso su k un punto $P(x_A+h, f(x_A+h))$, calcoliamo la pendenza m(h) della retta secante AP:

$$m(h)=\frac{QP}{AQ}=\frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h}.$$

Essa si chiama **pendenza media** della funzione f(x) relativa all'intervallo [x, x+h]. In genere m(h) varia al variare di h, fermo restando il valore di x. In particolare, se m(h) è positivo nell'intervallo [x, x+h] si parla di ***crescita media***, se è negativo si parla di ***decrescita media***.

Approfondiamo con qualche esempio.

- Consideriamo la funzione lineare: y=ax , rappresentata in un piano cartesiano (Oxy) da una retta r passante per l'origine O ma distinta dall'asse y (Fig. 24).

A partire da $x_0=0$, cui corrisponde $y_0=0$, facciamo aumentare x di una quantità costante h, ottenendo così i valori:

$$x_1=h,\ x_2=2h,\ x_3=3h\ , \dots ,\ x_n=nh;$$

in corrispondenza y varia assumendo i valori:

$$y_1=ah,\ y_2=2ah,\ y_3=3ah,\ \dots ,\ y_n=nah\ ;$$

ragion per cui gli incrementi subiti dalla y, quando si passa da un punto al successivo, risultano avere tutti il seguente valore: $\Delta y=ah$.

Cosicché il rapporto $\Delta y/h$ risulta essere costante man mano che ci si sposta lungo la retta r. Anzi, essendo $\Delta y/h=a$, questo rapporto è esattamente la ***pendenza*** della retta r, che è ovviamente una "crescita" se a>0 ed una "decrescita" se a<0.

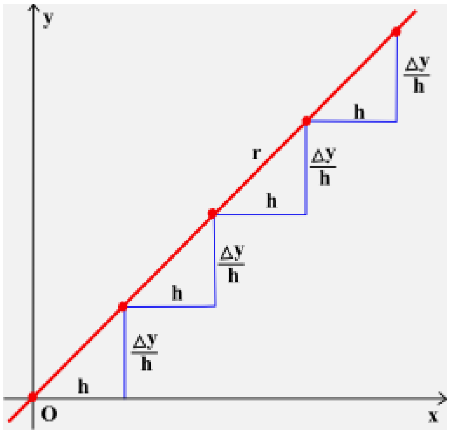

FIG. 24

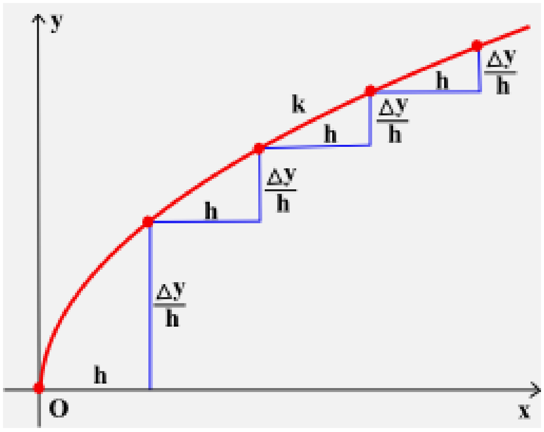

FIG. 25

- Consideriamo invece una funzione non lineare, per esempio la funzione: $y=a\sqrt{x}$.

Il suo grafico k non è una retta, anzi nel caso specifico è un arco di parabola situato nel 1° quadrante, avente il vertice nel punto O e la concavità rivolta verso le x positive (Fig. 25).

Come abbiamo fatto prima, a partire da $x_0=0$ incrementiamo x della quantità costante h. Anche adesso otteniamo i seguenti valori di x:

$$x_1=h,\ x_2=2h,\ x_3=3h\ ,\quad \dots .$$

I corrispondenti valori di y sono:

$$y_1=a\sqrt{h},\ y_2=a\sqrt{2h},\ y_3=a\sqrt{3h},\ \dots ;$$

per cui gli incrementi subiti da y risultano essere i seguenti:

$$\Delta y_1=y_1-y_0=a\sqrt{h},\ \Delta y_2=y_2-y_1=a\sqrt{h}\left(\sqrt{2}-1\right),\ \Delta y_3=y_3-y_2=a\sqrt{h}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),\ \dots .$$

Cosicché, diversamente da caso precedente, questa volta il rapporto $\Delta y/h$ non è costante ma varia da punto a punto. Pertanto una funzione non lineare cambia pendenza (e quindi la sua crescita o decrescita media) man mano che ci sposta lungo il grafico che la rappresenta.

51.7.3 Riprendiamo adesso in esame la pendenza media $m(h)$ di una generica funzione $f(x)$ relativa ad un generico intervallo $[x, x+h]$:

$$m(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Diciamo X il generico punto del grafico di f(x), di ascissa x. Attribuendo ad h valori sempre più prossimi a 0, può accadere che la funzione $m(h)$ si avvicini sempre più ad un valore finito m_t. In tal caso la retta t – passante per X – di pendenza m_t si dice **tangente** in X alla curva k. Questo valore m_t si chiama *pendenza (locale) della funzione* f(x).

Per esprimere che h assume valori sempre più prossimi a 0 scriviamo sinteticamente: $h\to 0$ e leggiamo: “h tende a 0”.

Per esprimere invece che $m(h)$, vale a dire $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si approssima a m_t scriviamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m_t$$

e leggiamo: “il limite di $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per h tendente a 0 è uguale a m_t”.

Sorge naturalmente un interrogativo: Come si fa concretamente a calcolare m_t?

Cercheremo di fornire una risposta ragionando su un esempio particolare, quello della curva k di equazione $y=x^4-2x^3+3$, rappresentata in figura 26.

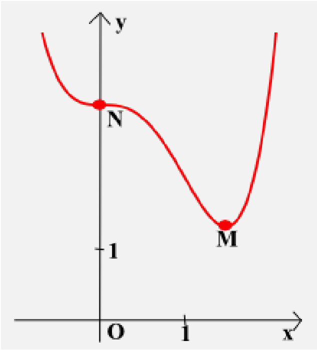

FIG. 26

Indicato con $X(x, f(x))$ un suo generico punto, incominciamo a calcolare la pendenza media $m(h)$ della curva relativa ad un generico intervallo $[x, x+h]$. Si ha:

$$m(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[(x+h)^4-2(x+h)^2+3]-[x^4-2x^3+3]}{h}=$$

$$=\frac{(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-2x^3-6x^2h-6xh^2-2h^3+3)-(x^4-2x^3+3)}{h}=$$

$$=\frac{h(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3-6x^2-2h^2)}{h};$$

da qui, dividendo numeratore e denominatore per h, segue:

$$m(h) = 4x^3 - 6x^2 + h\,(6x^2+4xh+h^2-6x-2h).$$

Ora, quando $h\to 0$, s'intuisce che anche la quantità $h(6x^2+4xh+h^2-6x-2h)$ tende a 0, per cui si ha:

$$\lim_{h\to 0} m(h) = 4x^3 - 6x^2.$$

Pertanto, il coefficiente angolare m_t della tangente a k nel suo generico punto di ascissa x è:

$$m_t = 4\,x^3 - 6\,x^2.$$

Una proposta per te. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione:

(A) $y = x^3 - 3\,x + 1$; (B) $y = x^4 - 2\,x^2 - 1$.

- Calcola la sua pendenza nel punto di ascissa 0.
- Calcola la sua pendenza nel punto di ascissa generica x.
- Spiega se la curva ha punti con tangente orizzontale (cioè parallela all'asse x) e, in caso affermativo, trova le loro coordinate.

51.7.4 Il procedimento seguito per calcolare la pendenza (media in un intervallo e locale in un punto) di una curva è del tutto simile a quello che bisogna seguire per calcolare la velocità (media in un dato intervallo e istantanea in un determinato istante) di un punto materiale che si muove su una retta, nota la legge oraria. Precisamente, supposto che un punto materiale si muova su una retta con la legge oraria $x=x(t)$ e ammesso per comodità che dall'istante t all'istante $t+\Delta t$ il moto del corpo non subisca inversioni, sappiamo dalla fisica che il rapporto:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

rappresenta la velocità media relativa all'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$.

Di conseguenza il limite:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

rappresenta la ***velocità*** $v(t)$ del punto materiale nell'istante t.

Una proposta per te. Ammesso che un punto materiale si muova su una retta – sulla quale si suppone fissato un riferimento cartesiano (O,U) – con la seguente legge oraria:

$$x = 2\,t^2 - 3\,t + 2, \quad \text{con } t\geq 0,$$

dove t è misurato in secondi ed x in metri, calcolare:
- la velocità del punto materiale nell'istante $t = 0$ s,
- l'istante in cui il punto materiale ha una velocità di $5\ m/s$.

51.7.5 Lo stesso discorso si può fare per calcolare la ***velocità di variazione di un qualsiasi processo*** che sia rappresentato per mezzo di una funzione.

Affrontiamo allora la questione da un punto di vista generale, senza il riferimento specifico ad aspetti geometrici o fisici o di altro genere. Consideriamo al riguardo una funzione f(x).

- La variazione h (che per comodità può essere supposta positiva) che fa passare da un generico punto x ad x+h si chiama ***incremento della variabile indipendente***.
- La differenza:

  $$\Delta y = f(x+h) - f(x),$$

  cioè la quantità di cui varia f(x) nel passaggio da x ad x+h, si dice ***incremento della variabile dipendente***: può essere positivo, negativo o nullo.
- Il rapporto fra i due incrementi, f(x+h)–f(x) ed h, si chiama **rapporto incrementale** (o **saggio medio di variazione** o **pendenza media** o **inclinazione media**) della funzione, relativo all'intervallo [x, x+h]. Esso è quindi l'espressione:

  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  ed è indicato pure in questo modo, mettendo Δx al posto di h:

  $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

  o anche, in forma sintetica, con una delle scritture seguenti:

  $$\frac{\Delta f}{h},\ \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
- Il limite del rapporto incrementale:

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  <u>se è un valore finito</u>, si chiama **derivata** di f(x) rispetto ad x. Si chiama pure **saggio di variazione istantaneo** o **pendenza (locale)** della funzione e si indica indifferentemente con una delle seguenti scritture:

  $$\mathbf{f'(x)},\ \ \mathbf{D_x f(x)}.$$

51.7.6 Un invito a riflettere sul procedimento esposto nel precedente paragrafo N° 51.7.3 per calcolare

$m(h)$. Procedimento che poi è stato generalizzato per giungere al concetto di derivata di una funzione. In quel procedimento, ad un dato momento, si dividono per h i termini di una certa frazione, per cui si presuppone che sia $h\neq 0$. Subito dopo però si pone $h=0$. C'è una palese contraddizione. È sanabile? Certo che sì, ma non adesso. Lo faremo invece nel prosieguo degli studi [5], quando riprenderemo questo argomento per un approfondimento e un ampliamento.

51.7.7 Esistono procedimenti idonei a calcolare la derivata di una qualsiasi funzione, ma non ce ne possiamo occupare adesso. Segnaliamo tuttavia che ci sono appositi software matematici che permettono, una volta inserita una qualsiasi funzione reale di variabile reale, di trovarne la derivata. Negli esercizi in cui serve conoscere la derivata di una funzione, è a quegli strumenti che puoi fare ricorso.
In particolare, puoi facilmente controllare che:
- la derivata della funzione x^2+3x-1 è la funzione $2x+3$;
- la derivata della funzione x^3+3x^2-1 è la funzione $3x^2+6x$;
- la derivata della funzione $\frac{1}{x}$ è la funzione $-\frac{1}{x^2}$;
- la derivata della funzione $\sqrt{x}$ è la funzione $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

51.7.8 Il primo dei due problemi con i quali abbiamo introdotto l'argomento fornisce il **significato geometrico** della derivata di una funzione in punto: è la pendenza del grafico della funzione nel punto corrispondente, vale a dire la pendenza della tangente al grafico nel punto.
Questo significato spiega anche la seguente regola, atta a determinare l'equazione della retta tangente ad una curva, di equazione assegnata, in un suo punto:
La **retta tangente** alla curva di equazione $y=f(x)$ nel suo punto $P\big(x_P, f(x_P)\big)$, supposto che $f(x)$ ammetta derivata in x_P, ha quest'equazione:

$$\mathbf{y - f(x_P) = f'(x_P)(x - x_P)}.$$

Ti proponiamo per esercizio di calcolare l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y=2x^2+x+1$ nel punto di ascissa 1 ricorrendo alla formula precedente e di verificare l'esattezza del risultato calcolando la stessa equazione con il procedimento che ti era familiare già da prima.
Ripeti l'esercizio prendendo però questa volta il punto di ascissa -1.
Più in generale, ritrova [6] col metodo della derivata la formula che esprime la pendenza m della retta tangente alla parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ nel suo punto di ascissa x_0: $\mathbf{m=2ax_0+b}$.

Un **significato fisico** della derivata di una funzione in un punto è costituito dalla velocità del punto materiale di cui la funzione costituisce la legge oraria.
In altri termini, se un punto materiale si muova su una retta con la legge oraria $x=x(t)$, la derivata di $x(t)$ rispetto a t rappresenta la ***velocità*** $v(t)$ del punto materiale nell'istante t. Quindi:

$$v(t) = x'(t).$$

51.7.9 Ti proponiamo adesso alcuni esercizi.

1. Della funzione $g(x)$ si conosce il grafico: è la spezzata disegnata in figura 27. Traccia il grafico della derivata $g'(x)$. Trova, inoltre, l'espressione analitica sia di $g(x)$ sia di $g'(x)$.

---
[5] Cfr.: Unità 64: Limiti; Unità 66: Derivate.
[6] Cfr.: Unità 41: Parabola, N° 41.5.3.

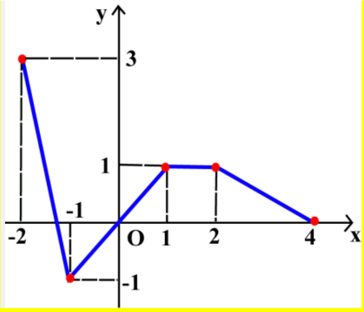

FIG. 27

2. Della funzione, il cui grafico è disegnato nella figura 25, indica il dominio e l'immagine. Indica inoltre i suoi zeri e gli intervalli in cui la funzione è positiva o negativa.
3. Traccia sullo stesso piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il grafico della funzione f(x) e quello della sua derivata sapendo che:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; b) $f(x)=|x-2|-|1-x|$; c) $f(x)=x^2+|x|$.

VERIFICHE

Quando non è detto esplicitamente in questo blocco di esercizi, il piano della figura si suppone comunque riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy)

1. Disegna i grafici delle seguenti funzioni, di cui hai già fatto uno studio negli anni passati, e descrivi le loro immagini:

a) $y=\frac{1}{2}x-1$; $y=-\frac{1}{2}x-1$; $y=2$

b) $y=\frac{2}{x}$; $y=\frac{x-1}{x+1}$; $y=\frac{-2x}{x-\frac{1}{2}}$

c) $y=\sqrt{4-x^2}$; $y=\sqrt{1-4x^2}$

d) $y=\begin{cases}-1 \text{ per } x<-1\\ 1 \text{ per } -1\le x<2\\ 2 \text{ per } x\ge 2\end{cases}$ $\qquad y=\begin{cases}2 \text{ per } x\le 0\\ -1 \text{ per } 0<x<1\\ -\frac{1}{2} \text{ per } x>1\end{cases}$

e) $y=\begin{cases}-1 \text{ per } x<0\\ x-1 \text{ per } 0\le x<2\\ 1 \text{ per } x\ge 2\end{cases}$ $\qquad y=\begin{cases}-x+1 \text{ per } x<-1\\ 1 \text{ per } -1\le x<1\\ 2x \text{ per } x\ge 1\end{cases}$

f) $y=\begin{cases}|x| \text{ per } x\le 1\\ 1 \text{ per } x>1\end{cases}$ $\qquad y=\begin{cases}2 \text{ per } x\le -2\\ |x| \text{ per } x>-2\end{cases}$

2. Delle seguenti funzioni algebriche dire se sono razionali o irrazionali e, nel primo caso, se sono intere o fratte.

a) $y=\frac{1}{3}x^3-2x$; b) $y=\sqrt{2}\,x^4-\frac{1}{3}x+\sqrt{3}$; c) $y=2\sqrt{x}$; d) $y=\frac{x^2-2x}{3}$;

e) $y = \frac{x+2}{2x^2}$; f) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$; g) $y = \frac{2x}{x\sqrt{2}+1}$; h) $y = \sqrt{x-1}$; i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Delle seguenti funzioni determina il dominio, gli zeri e gli intervalli in cui sono positive o negative:
a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x$; b) $y = 2\sqrt{x}$; c) $y = \frac{x+2}{2x^2}$; d) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$; e) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. Delle seguenti funzioni determina il dominio, gli eventuali zeri e intervalli in cui sono positive o negative:
a) $y = \frac{2x^2}{x-1}$; b) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; d) $y = \frac{2(2x-1)}{x^2}$;
e) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2+1}$; f) $y = \frac{x^2+1}{x^2-x+1}$; g) $y = x\sqrt{x}$; h) $y = \sqrt{x^2+1}$.

5. Trova le funzioni componenti delle seguenti funzioni composte:
a) $y = \frac{1}{1+x^2}$; b) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$; c) $y = \sqrt{1-x^2}$; d) $y = (2x-1)^3$.

6. Considerate le seguenti funzioni f, g, trova le funzioni f∘g e g∘f:
a) $f : x \to x^2,\ g : x \to \frac{1}{2}x - 1$; b) $f : x \to x^2 - 1,\ g : x \to \sqrt{x}$;
c) $f : x \to \frac{2}{3}x^2 + 2x,\ g : x \to x + \frac{1}{2}$; d) $f : x \to x + \sqrt{x},\ g : x \to x^2$.

7. Considerate le seguenti funzioni $y = f(x)$, spiega perché sono invertibili e determina le loro funzioni inverse scritte nella forma $y = f^{-1}(x)$ e disegnale sullo stesso piano:
a) $y = 3x + 2$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; c) $y = \frac{1}{x-1}$; d) $y = \frac{1-x}{x}$;
e) $y = \sqrt{x-1}$; f) $y = -\sqrt{x-1}$; g) $y = \frac{1}{x^2}$, con $x > 0$; h) $y = \frac{1}{x^2}$, con $x < 0$.

8. Disegna i grafici delle seguenti funzioni e descrivi le loro immagini:
a) $y = |x| - |x - 1|$. b) $y = |x^2 - 1| - 2$. c) $y = x^2 - |2x + 1|$.

9. Quale delle seguenti funzioni rappresenta il grafico sottostante (Fig. 28)?
[A] $y = x^2 - 2|x|$ [B] $y = x^2 + 2|x|$
[C] $y = 2x^2 - |x|$ [D] $y = 2x^2 + |x|$

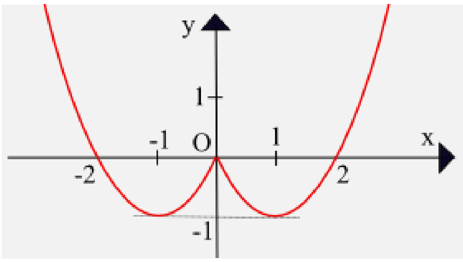

FIG. 28

10. Quale dei grafici sottostanti (Fig. 29) rappresenta la funzione $y = |x-1| + x$?

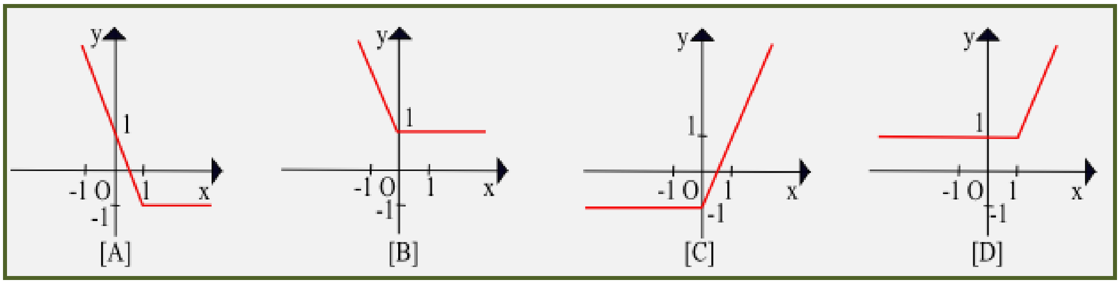

Fig. 29

11. Quale dei grafici sottostanti (Fig. 30) rappresenta la funzione $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$?

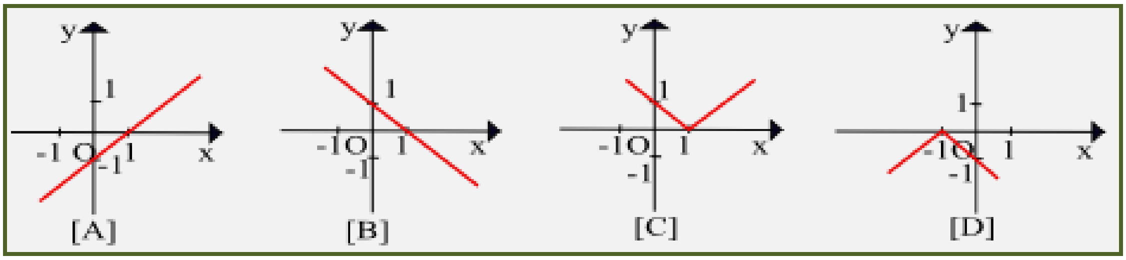

FIG. 30

12. Disegna il grafico delle seguenti funzioni di x, con x variabile nell'intervallo reale $[-2,2]$, tenendo presente che con la scrittura $[x]$ si indica la parte intera del numero reale x:

(A) $y = [x]$, (B) $y = x[x]$, (C) $y = x - [x]$, (D) $y = (-1)^{[x]}\, x$.

13. È assegnata la funzione

$$\text{(A)}\quad y = x^2 - 1; \qquad \text{(B)}\quad y = \frac{1}{x}.$$

Calcola:

a) la pendenza media del suo grafico relativamente all'intervallo $[1,3]$;
b) la pendenza nel punto di ascissa 2;
c) la pendenza nel punto di ascissa generica x.

14. Un punto materiale si muove su una retta con la seguente legge oraria:

$$s = 2\,t^3 - 6\,t^2 + 6\,t, \text{ con } \ t \geq 0.$$

a) Determina la sua velocità nel generico istante t.
b) Dopo aver stabilito che il corpo non inverte mai il suo moto, calcola la sua velocità media nell'intervallo $[0,2]$.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Cosa s'intende per funzione lineare, per funzione quadratica, per funzione omografica? Quali sono i loro grafici?
2. Quando una funzione reale di variabile reale si dice algebrica? Quando trascendente?
3. È vero che le funzioni razionali sono algebriche mentre quelle irrazionali sono trascendenti?
4. Cos'è il dominio di una funzione reale di variabile reale f(x)? Cosa l'immagine?

5. È vero che una funzione si dice crescente in un intervallo se a valori crescenti della variabile indipendente corrispondono valori crescenti della variabile indipendente?
6. Dire di una funzione che è monotona equivale ad affermare che il suo studio genera noia perché banale. È vero?
7. Come di ogni relazione esiste la relazione inversa così di ogni funzione esiste la funzione inversa. È così?
8. Quale caratteristica contraddistingue i grafici della funzione $y=f(x)$ e, posto che esista, quello della funzione inversa $y=f^{-1}(x)$
9. Cos'è la pendenza media di una funzione?
10. Cosa s'intende per derivata della funzione $f(x)$ in a?

RISPOSTE.

1. Una funzione lineare è ogni funzione del tipo $y=ax+b$, dove a, b sono numeri reali qualsiasi. Il suo grafico è una retta non parallela all'asse y.
   Una funzione quadratica è ogni funzione del tipo $y=ax^2+bx+c$, dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi con $a\neq 0$. Il suo grafico è una parabola con asse parallelo all'asse y.
   Una funzione omografica è ogni funzione del tipo $y=\frac{ax+b}{x-c}$, dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi con $b\neq ac$. Il suo grafico è un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi di riferimento.
2. Una funzione $y=f(x)$ si dice algebrica quando può essere elaborata in modo da diventare un polinomio nelle indeterminate x, y uguagliato a zero: $P(x, y)=0$. Altrimenti si dice trascendente.
3. No. Sia le funzioni razionali sia le irrazionali sono funzioni algebriche.
4. Il dominio di una funzione $f(x)$ è l'insieme dei valori reali che, attribuiti alla x, fanno assumere valori reali ad $f(x)$. È detto anche campo di esistenza o di definizione della funzione. L'insieme dei valori assunti dalla funzione si chiama immagine della funzione.
5. È vero. In effetti questa è la modalità di esprimere in forma "retorica" il concetto espresso in forma "simbolica" in questo modo: una funzione si dice crescente nell'intervallo I se, per ogni $x',x''\in I$: $x'<x'' \rightarrow f(x')<f(x'')$.
6. Certamente no. Una funzione si dice monotona (in un intervallo) se è sempre crescente o sempre decrescente (nell'intervallo) (o sempre non decrescente o sempre non crescente).
7. Non è così. O meglio: è vero che di ogni relazione si può definire la funzione inversa. Invece, affinché una funzione sia invertibile, è necessario che nell'intervallo che si considera essa sia biiettiva.
8. I due grafici sono simmetrici rispetto alla retta di equazione $y=x$, bisettrice del 1° e 3° quadrante. Per cui, se si sa disegnare uno di essi, si può disegnare facilmente anche l'altro, appunto per simmetria.
9. La pendenza media di una funzione $f(x)$ relativa ad un determinato intervallo $[a, a+h]$ è la pendenza (o coefficiente angolare) della retta passante per i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$, vale a dire la quantità:
   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
   detta anche rapporto incrementale o saggio medio di variazione dell'inclinazione di $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a, a+h]$.
10. È il limite, posto che esista, del rapporto incrementale quando l'incremento che si attribuisce alla variabile indipendente tende a 0.