Prerequisiti:
- Operare con i numeri reali
- Rappresentare punti e curve elementari in un piano cartesiano

L'unità riguarda tutte le scuole superiori. Il Liceo Scientifico, compresa l'opzione scienze applicate, gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei non scientifici nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire una successione di numeri reali*
- *definire una progressione aritmetica e una progressione geometrica e indicarne le proprietà principali*
- *risolvere semplici problemi riguardanti le progressioni*
- *calcolare la somma di n numeri in progressione aritmetica e in progressione geometrica*
- *definire in modo intuitivo il numero "e"*

Successioni e progressioni.

Unità 59

59.1 SUCCESSIONI

59.1.1 Le successioni di numeri reali sono particolari funzioni reali di variabile reale. Precisamente:

Si chiama **successione** di numeri reali ogni funzione da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$.

Se a è la funzione che definisce una successione, i valori di questa in $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ dovrebbero indicarsi con $a(0), a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots$, come si fa solitamente con una qualsiasi funzione. Si preferisce invece indicarli in quest'altro modo:

$$\mathbf{a_0},\ \mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \dots,\ \mathbf{a_n},\ \dots\ .$$

I numeri a_i (dove i=0,1,2,3,...) sono detti i ***termini*** della successione. I numeri naturali "i" sono chiamati ***indici***. In particolare, a_{n+1} si dice *termine successivo* di a_n che, a sua volta, si dice *termine precedente* di a_{n+1}. La successione è poi indicata con la scrittura:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

la quale evidenzia l'insieme ordinato dei suoi termini, vale a dire l'insieme dei valori della successione in $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Per questa ragione, in alternativa alla precedente, è fornita a volte quest'altra definizione:

Una **successione** di numeri reali è un insieme ordinato di numeri reali.

Oltre alla modalità suddetta, una successione è anche indicata sinteticamente con:

$$(\mathbf{a_n})$$

evidenziando quello che si chiama il suo ***termine generale*** a_n.

Due esempi di successione:

- La successione di termine generale:
$$a_n = n^2 - 1,$$
che si esplicita nel seguente insieme ordinato:
$$(-1,\ 0,\ 3,\ 8,\ 15,\ \dots,\ n^2-1,\ \dots).$$
- La successione di termine generale:
$$a_n = \frac{n\,(n+1)}{2},$$
che si esplicita nel seguente insieme ordinato:
$$\left(0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \dots,\ \frac{n(n+1)}{2},\ \dots\right).$$

Si parla ancora di successione di numeri reali se la funzione che la determina non è definita in qualche valore naturale attribuito alla variabile indipendente.
Così, per esempio, sono successioni le funzioni seguenti:

$$n \to \frac{n-1}{n}, \quad n \to \frac{1}{(n-2)(n-1)}.$$

la prima delle quali non è definita per n=0, mentre la seconda non è definita per n=2 e per n=1.

59.1.2 Delle successioni, in quanto particolari funzioni, si può fornire una rappresentazione grafica. Essa è costituita da un insieme di punti isolati, disposti però secondo un determinato criterio, quello espresso dalla funzione che la determina.

- A titolo di esempio consideriamo la successione di termine generale $a_n=n^2-1$. È evidente che i punti del suo grafico, benché isolati, sono disposti sulla parabola di equazione $y=x^2-1$ (Fig. 1).

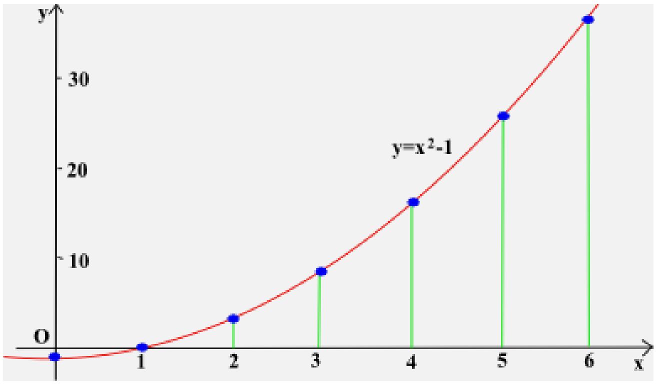

FIG. 1

- Altro esempio: consideriamo la successione di termine generale $a_n = \frac{n-1}{n}$. Anche adesso il suo grafico è costituito da un insieme di punti isolati, i quali sono disposti però lungo l'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{x-1}{x}$ (Fig. 2).

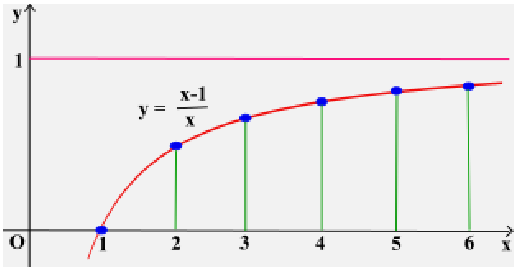

FIG. 2

59.1.3 Le successioni si classificano in base ad alcune proprietà delle funzioni in genere. In particolare, una successione di numeri reali si dice:

- ***crescente*** (o, preferibilmente**, *strettamente crescente***) se ogni termine è minore del successivo;
- ***decrescente*** (o, preferibilmente**, *strettamente decrescente***) se ogni termine è maggiore del successivo;
- ***non decrescente*** (o, anche**, *debolmente crescente***) se ogni termine è non maggiore del successivo;
- ***non crescente*** (o, anche**, *debolmente decrescente***) se ogni termine è non minore del successivo.
- ***monotona*** se si presenta una delle situazioni precedenti.

Se, poi, ogni termine della successione si mantiene uguale al successivo allora la successione si dice ***costante***.

Se, infine, i termini della successione sono alternativamente positivi e negativi, la successione si dice per l'appunto ***alternata***.

Ecco alcuni esempi di successioni, di ognuna delle quali sei invitato a disegnare il grafico.

- La successione $(-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \ldots)$, il cui termine generale è $a_n = (-1)^n \cdot n$, è proprio alternata.
- La successione $(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots)$, il cui termine generale si può ritenere che sia $a_n = 2 \cdot 1^n$, è costante.
- La successione $\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, 3,\ \frac{7}{2}, \ldots\right)$, il cui termine generale è $a_n = \frac{n}{2} + 1$, è strettamente crescente.
- È invece debolmente crescente la successione $(-1, 0, 3, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots)$, il cui termine ge-

nerale è:

$$a_n=\begin{cases} n^2-1 \text{ per } 0\le n<4 \\ 8 \text{ per } 4\le n<7 \\ n+2 \text{ per } n\ge 7 \end{cases}$$

- È pure debolmente crescente la celebre ***successione di Fibonacci*** $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$, il cui termine generale è:

$$a_n=\begin{cases} 1 \text{ se } n=1 \text{ oppure } n=2 \\ a_{n-2}+a_{n-1} \text{ se } n>2 \end{cases}$$

Sei invitato a fornire un esempio di successione strettamente decrescente ed uno di successione debolmente decrescente.

59.1.4 Sono frequenti – nei giochi a quiz, nelle riviste di enigmistica, purtroppo anche nelle prove di selezione del personale – quesiti come questo:

Con quale numero prosegue la successione 2-3-5-8?

Chi ha proposto il quesito si attende come risposta 12, come da lui stesso dichiarato, in seguito al ragionamento implicito nel seguente schema (Fig. 3):

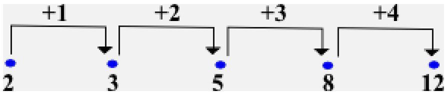

FIG. 3

Ora, sfortunatamente per lui, succede che le cose stiano diversamente, dal momento che di ragionamenti possibili non c’è solo quello e addirittura ogni numero può essere fornito come soluzione, nel senso che:

Assegnati n numeri, per ogni numero pensato (e non necessariamente intero), esiste almeno una legge matematica che permette di determinarlo.

A titolo di esempio, proprio con riferimento ai 4 numeri su indicati, la legge potrebbe essere la seguente:

$$y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e.$$

Si tratta di conoscere i valori dei coefficienti a, b, c, d, e. Per questo basta imporre la condizione che il grafico del polinomio, supposto disegnato in un riferimento cartesiano (Oxy), passi per i punti (1,2), (2,3), (3,5), (4,8). Si ottengono in questo modo 4 equazioni nelle 5 incognite a, b, c, d, e. Si possono esprimere 4 di queste incognite in funzione della quinta (per esempio a): cosa che ti invitiamo a fare. Trovati i corrispettivi valori delle 4 incognite (b, c, d, e) e sostituiti nell’espressione del polinomio, si ottiene la seguente legge:

$$(*)\qquad y = ax^4 - 10ax^3 + \frac{70a+1}{2}x^2 - \frac{100a+1}{2}x + 2(12a+1).$$

Non ci vuol molto a capire che al parametro a si può attribuire un qualunque valore e, in conseguenza, ottenere una legge che – mentre riproduce ai primi 4 posti $(x = 1, 2, 3, 4)$ i numeri 2, 3, 5, 8 – al quinto posto $(x=5)$ non dà sempre e soltanto 12. Anzi, il numero 12 si ottiene solo per $a=0$, quando la legge di formazione diventa:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \qquad (x \ge 1),$$

o, se si preferisce:

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2 \qquad (n \ge 1),$$

che è esattamente la legge proposta nello schema di figura 3, anche se scritta in maniera diversa. Questa legge infatti fornisce direttamente il valore del termine di posto n, mentre quella proposta dall'esperto è una definizione ricorsiva della successione [(1)] e precisamente:

$$a_n = \begin{cases} 2 \ \text{ se } \ n = 1 \\ a_{n-1} + (n-1) \ \text{ se } \ n > 1 \end{cases}$$

Prova a vedere cosa succede dei primi 5 numeri:

a) se ad a si sostituisce 1;

b) se ad a si sostituisce −1.

Prova a vedere inoltre quale valore di a si ottiene se al 5° posto si mette il numero 13 e quali sono, in tal caso, i primi 4 numeri.

È interessante osservare un grafico (Fig. 4) che mostra l'andamento di tre leggi ottenute dalla (*) e perciò generanti tutte i numeri 2, 3, 5, 8 ai primi 4 posti:

- la legge $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$, ottenuta per a=0, la quale al 5° posto genera il numero 12 (curva a);
- la legge $y=\frac{1}{24}x^4-\frac{5}{12}x^3+\frac{47}{24}x^2-\frac{31}{12}x+3$, ottenuta per $a=\frac{1}{24}$, la quale al 5° posto genera il numero 13 (curva b);
- la legge $y=\frac{11}{3}x^4-\frac{110}{3}x^3+\frac{773}{6}x^2-\frac{1103}{6}x+90$, ottenuta per $a=\frac{11}{3}$, la quale al 5° posto genera il numero 100 (curva c). Il punto (5, 100) finisce fuori "schermo".

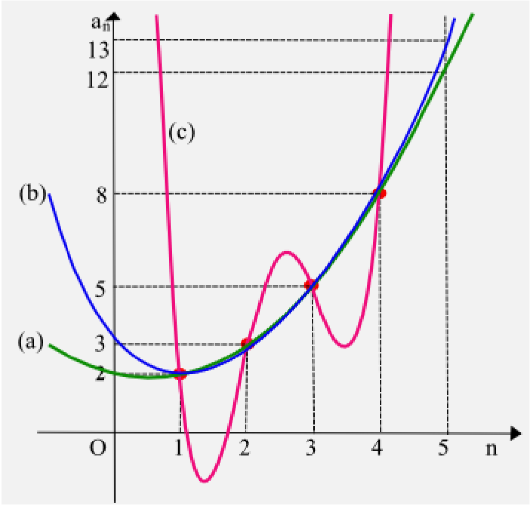

FIG. 4

Si può costatare che i punti (1,2), (2,3), (3,5), (4,8) sono comuni a tutti e tre i grafici (a), (b), (c), mentre i punti di ascissa 5 e ordinate rispettivamente 12, 13 e 100 ovviamente non lo sono.

Considerato che il ragionamento esposto per 4 numeri può essere ripetuto pari pari per n numeri, qualunque sia n, la conclusione, purtroppo ignorata da molti, è la seguente:

Non solo 4 numeri non determinano una successione,
ma non la determinano neppure n numeri, qualunque sia il numero naturale n.

Se poi qualcuno ritenesse, tanto per fare un altro esempio, che 5 sia l'unica alternativa possibile dopo i numeri 1-2-3-4, provi a prendere in considerazione la successione di termine generale a_n tale che:

---

[1] Cfr. unità successiva N. 60: Successioni ricorsive.

$$a_n = \begin{cases} 1 \ \text{per} \ n = 4k \\ 2 \ \text{per} \ n = 4k+1 \\ 3 \ \text{per} \ n = 4k+2 \\ 4 \ \text{per} \ n = 4k+3 \end{cases}$$

dove k è un numero naturale. Disegnarne anche il grafico, ancorché limitato ai valori di k tali che $0 \le k \le 11$.

59.2 PROGRESSIONI ARITMETICA E GEOMETRICA

59.2.1 Quando la successione di numeri reali è una funzione del tipo y=ax+b, dove $a,b \in \mathbb{R}$ ed $x \in \mathbb{N}$, allora si chiama più comunemente ***progressione aritmetica***.

Per esempio, è una progressione aritmetica la funzione y=2x–1, definita da ℕ verso ℝ. I suoi valori sono nell'ordine:

$$-1,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ \ldots,\ \ 2n-1,\ \ \ldots\ .$$

Come puoi constatare, questi numeri, considerati nell'ordine scritto, sono tali che la DIFFERENZA tra ciascuno di essi (tranne il primo) e il precedente è costante e precisamente, in questo caso, vale 2.

La circostanza non è straordinaria. Controlla, per esercizio, che si verifica anche per le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ ,\ \ y=-\frac{2}{3}x+5\ .$$

entrambe supposte definite da ℕ verso ℝ e perciò entrambe progressioni aritmetiche.

In generale, data la **progressione aritmetica**:

$$\mathbf{y = ax + b}, \text{ dove } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R} \text{ ed } \mathbf{x} \in \mathbb{N},$$

i suoi valori ordinati:

$$\mathbf{b},\ \ \mathbf{a+b},\ \ \mathbf{2a+b},\ \ \mathbf{3a+b},\ \ \mathbf{4a+b},\ \ \ldots,\ \ \mathbf{na+b}, \ldots$$

sono tali che la **differenza** tra ogni termine (tranne il primo) e il precedente è costante e precisamente è uguale al numero **a**, detto ***ragione***.

Una progressione aritmetica è evidentemente:

- *costante* se la sua ragione è *nulla*;
- *strettamente crescente* se la sua ragione è *positiva*;
- *strettamente decrescente* se è *negativa*.

Per esempio, delle seguenti progressioni aritmetiche:

$$y=\frac{3}{2}x-1, \forall x \in \mathbb{N};\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{N};\quad y=-2, \forall x \in \mathbb{N},$$

di ragioni rispettivamente:

$$\frac{3}{2},\ \ -\frac{1}{2},\ \ 0,$$

la prima è strettamente crescente, la seconda strettamente decrescente, la terza costante.

Fornisci altri esempi di progressioni aritmetiche crescenti, decrescenti e costanti.

NOTA BENE. Per ragioni di opportunità, pur essendo consapevoli che i termini di una generica progressione aritmetica a(n) hanno come primo termine a_0, preferiamo indicare con a_1 tale termine, ottenuto comunque per n=0. Cosicché una generica progressione aritmetica, diversamente da una generica successione, è indicata nel modo seguente:

$$\mathbf{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots\ .}$$

Questa annotazione vale pure per una progressione geometrica, di cui ci occuperemo fra breve (n. 59.2.5 e seguenti).

59.2.2 È interessante, e spesso anche utile, saper calcolare la somma di n numeri in progressione aritmetica. Vale, al riguardo, il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **La somma $\mathbf{S_n}$ dei primi n termini di una progressione aritmetica è:**

[1] $$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n.}$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome:

$$S_n = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n \text{ ed } S_n = a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1,$$

sommando membro a membro le due uguaglianze si ottiene:

$$2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1)\ ;$$

da qui, tenendo presente che $a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = \ldots = a_{n-1}+a_2 = a_n+a_1$, segue:

$$2\,S_n = (a_1+a_n)\cdot n$$

e quindi la [1].

Applicando la formula [1] si può ritrovare la formula che esprime la somma S_n dei primi n numeri naturali a partire da 1, vale a dire:

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Utilizzandola puoi inoltre affrontare e risolvere i seguenti esercizi:

1. Per quale valore di n la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1 vale 2080?
2. Posto che a, b siano elementi dell'insieme {1, 2, ..., n}, dove n è un numero naturale, considera tutti i possibili prodotti ab e trova una formula che ne esprima la somma S, facendo vedere per la precisione che si tratta della formula seguente:
   $$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\ .$$
   Ad esempio, per n=2 si ha: $1\times1 + 1\times2 + 2\times1 + 2\times2 = 9$
3. È data la seguente progressione aritmetica, costituita tutta da termini positivi:
   $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n.$$
   Dimostrare che esiste uno ed un solo numero $n\geq1$ tale che:
   $$a_n \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} < a_{n+1}\ .$$

Riportiamo un aneddoto interessante. Il calcolo dei primi 100 numeri naturali a partire da 1 fu proposto ad un bambino di 10 anni dal suo maestro. Pare che questo bambino abbia disposto (o addirittura immaginato di disporre) i 100 numeri in riga e, sotto di essi su una riga parallela, gli stessi numeri ma in ordine decrescente, in questo modo:

1	2	3	4	…	97	98	99	100
100	99	98	97	…	4	3	2	1

Constatato che ciascuna delle 100 coppie di numeri in colonna dà per somma sempre 101 e che la somma di tutti i numeri delle due righe è il doppio della somma dei 100 numeri da 1 a 100, il bambino concluse che la somma cercata era 101×50, cioè 5050.
Bisogna aggiungere che questo bambino era un tedesco e si chiamava **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855): diventò uno dei più grandi matematici della storia ed al suo tempo fu definito "il principe dei matematici".

59.2.3 Vediamo adesso un paio di esercizi sulle progressioni aritmetiche.

- ESERCIZIO 1. Il 3° e il 6° termine di una progressione aritmetica sono rispettivamente 1 e 10. Calcolare la somma dei primi 8 termini della progressione.

RISOLUZIONE. La questione può essere risolta considerando 1 e 10 come il 1° ed il (6–2)°=4° termine di una progressione di ragione d. Per cui, dopo un breve ragionamento (che condurrai da solo, per esercizio), si trova: $d=3$.
A questo punto, consideriamo gli 8 termini della progressione aritmetica proposta dalla traccia:

$$a_1,\ a_2,\ a_3=1,\ a_4,\ a_5,\ a_6=10,\ a_7,\ a_8,$$

si ha: $a_3 = a_1 + 2d$, da cui segue:

$$a_1 = a_3 - 2d = 1-2\cdot 3 = -5,\quad a_8 = a_1 + 7d = -5+7\cdot 3 = 16;$$

e infine:

$$S_8=\frac{(a_1+a_8)\cdot 8}{2}=\frac{(-5+16)\cdot 8}{2}=44.$$

- ESERCIZIO 2. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = 2+5+8+\cdots+(3n-1).$$

Quanto vale a_{100}?
RISOLUZIONE. Siccome a_n è la somma di n numeri in progressione aritmetica di ragione 3 e primo termine 2, si ha:

$$a_n=\frac{2+(3n-1)}{2}\,n=\frac{n(3n+1)}{2}\ .$$

In particolare:

$$a_{100}=\frac{100\times 301}{2}=15050.$$

59.2.4 Qualche esercizio da risolvere.

1) Dimostrare che l'n-esimo termine a_n di una progressione aritmetica di primo temine a_1 e ragione d è dato dalla seguente formula: $a_n=a_1+(n-1)d$.
2) Il primo e l'ultimo termine di una progressione aritmetica di ragione 3 sono rispettivamente 2 e 32. Calcolare quanti sono i termini della progressione.
3) Considerata una progressione aritmetica, calcola:
   – S_5 sapendo che $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $a_5 = \frac{3\sqrt{2}}{5}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
   – S_6 sapendo che $a_1 = \frac{5}{2}$ e $d = -\frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{15}{2}\right]$
   – S_7 sapendo che $a_2 = 1$ e $a_5 = -\frac{1}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{7}{9}\right]$

– S_8 sapendo che $a_3 = -\frac{3}{5}$ e $a_6 = \frac{1}{4}$. $\left[\mathbf{R}.\ -\frac{7}{5}\right]$

4) 55 monete da 2 euro sono distribuite su file sovrapposte l'una all'altra in modo che, a partire dalla fila base, il loro numero diminuisca di una unità mentre si sale, finché nella fila più alta vi sia una sola moneta. Quante monete formano la fila base?
5) Quanto vale la somma dei numeri interi che vanno da 91 a 150?
6) Quanto vale la somma dei numeri pari compresi fra 1 e 100?
7) Un esercizio un po' più impegnativo. Probabilmente hai avuto occasione di dimostrare che:
   - la somma di 3 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 3;
   - la somma di 4 qualsiasi numeri naturali consecutivi NON è divisibile per 4;
   - la somma di 5 qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 5.

   Se però non l'avessi già fatto in passato, ti suggeriamo di farlo adesso.
   Dopo di che, ti chiediamo come si può generalizzare. In altri termini:
   Quando la somma di n numeri naturali consecutivi qualsiasi è divisibile per n? Quando non lo è?

59.2.5 Quando la successione di numeri reali è una funzione del tipo $y=ba^x$, dove $a,b\in\mathbb{R}_0$ ed $x\in\mathbb{N}$, allora si chiama più comunemente ***progressione geometrica***.

Per esempio, è una progressione geometrica la funzione $y=2^x$, definita da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$. I suoi valori sono ordinatamente:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\quad \ldots,\ 2^n,\ \ldots\ .$$

Come puoi constatare, questi numeri, considerati nell'ordine scritto, sono tali che il RAPPORTO tra ciascuno di essi (eccetto il primo) e il precedente è costante e precisamente, in questo caso, vale 2.

Controlla, per esercizio, che la stessa situazione si verifica anche per le seguenti funzioni:

$$y=2\cdot 3^x,\quad y=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

entrambe supposte definite da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$ e perciò entrambe progressioni geometriche.

In generale, data la **progressione geometrica**:

$$\mathbf{y = b\ a^x},\ \text{dove } \mathbf{a}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}_0 \text{ ed } \mathbf{x}\in\mathbb{N},$$

i suoi valori ordinati:

$$\mathbf{b},\ \ \mathbf{b\ a},\ \ \mathbf{b\ a^2},\ \ \mathbf{b\ a^3},\ \ \mathbf{b\ a^4},\ \ \ldots,\ \ \mathbf{b\ a^n}, \ldots$$

sono tali che il **rapporto** tra ogni termine (tranne il primo) e quello che lo precede è costante e precisamente è uguale al numero **a**, detto ***ragione***.

Una progressione geometrica è evidentemente:
- *costante* se la sua ragione è *uguale ad 1*;
- *strettamente crescente* se la sua ragione è *maggiore di 1*;
- *strettamente decrescente* se è *minore di 1 ma positiva*.

Se, infine, la ragione è *negativa*, allora la progressione geometrica è *alternata*, poiché i suoi termini si susseguono a segni alterni.

Sei invitato a fornire esempi dei vari tipi di progressioni geometriche.

59.2.6 Anche di n numeri in progressione geometrica è interessante, e spesso utile, saper calcolare la somma. Per questo si dimostra un'idonea formula. Per tale dimostrazione è però necessaria la premessa di un lemma. Il seguente [2], la cui dimostrazione è lasciata a te per esercizio:

LEMMA. L'ennesimo termine a_n di una progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q è:

$$a_n = a_1\, q^{n-1}\,.$$

Passiamo adesso al teorema che ci fornisce la formula cercata.

♦ TEOREMA. **La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q è:**

[2] $$\mathbf{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, allora, moltiplicando entrambi i membri per q, si ha: $q\,S_n = q\,a_1 + q\,a_2 + q\,a_3 + \ldots + q\,a_{n-1} + q\,a_n$.

Da qui, osservando che $a_k = q\,a_{k-1}$, segue: $q\,S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Pertanto: $q\,S_n = (S_n - a_1) + q\,a_n$, o anche, siccome $a_n=a_1q^{n-1}$:

$$q\,S_n = S_n - a_1 + q\,a_1q^{n-1},$$

da cui, dopo qualche altro passaggio elementare, segue la [2].

Ti proponiamo per esercizio di calcolare:

1) a_6 sapendo che $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \ \frac{1}{81}\right]$

2) a_1 sapendo che $a_5 = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{2}$. [**R.** 4]

3) S_4 sapendo che $a_1 = 1$ e $q = -1$. [**R.** 0]

4) S_5 sapendo che $a_4 = -\frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \ -\frac{31}{4}\right]$

Nel caso particolare in cui q sia minore di 1 (ma positivo) ed n "infinitamente grande", il numero q^n è "molto prossimo a 0", per cui $1-q^n$ è "praticamente" uguale ad 1.

Pertanto, in questo caso, la formula [2] diventa:

[3] $$\mathbf{S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}}.$$

Alcuni esercizi da risolvere.

1) Il primo e l'ultimo termine di una progressione geometrica di ragione $1/2$ sono rispettivamente 2 e $1/16$. Calcolare quanti sono i termini della progressione.
2) Scrivi i termini di una progressione geometrica:

   a) di primo termine 1 e ragione $\frac{1}{2}$, b) di primo termine 2 e ragione $\frac{1}{3}$,

   e calcola la loro somma.
3) Una progressione geometrica crescente è formata da 5 termini. La somma dei primi 3 termini è 91, mentre la somma dei quadrati di questi 3 termini è 4459. Calcolare la somma dei 5 termini della progressione. [**R.** Bisogna osservare che $1+q^2+q^4=(1+2q^2+q^4)-q^2=\ldots$; 847]
4) Trovare una formula che fornisca la somma delle prime n potenze di 2 a partire da 2^0.
5) In base ad una definizione attribuita alla scuola pitagorica:

   *un numero si dice **perfetto** se la somma dei suoi divisori propri è uguale ad esso.*

   Sui numeri perfetti si sofferma **Euclide**. L'ultima proposizione del IX libro degli ***Elementi***, la 36, forni-

[2] Si tenga presente la nota posta in chiusura del paragrafo n. 59.2.1

sce precisamente una regola per trovare un numero perfetto, la seguente:

Se, partendo dall'unità, si prendono quanti si voglia numeri raddoppiando successivamente sino a che la loro somma venga ad essere un numero primo, e se la somma stessa viene moltiplicata per l'ultimo dei numeri considerati, il prodotto sarà un numero perfetto.

Dimostra questa regola di Euclide.

6) Nella figura sottostante (Fig. 5) è rappresentata una successione di quadrati, disegnati in base ad un determinato criterio. Seguendo lo stesso criterio, si può immaginare che la successione si sviluppi all'infinito verso destra. Calcolare la somma dei perimetri e delle aree degli infiniti quadrati della successione.

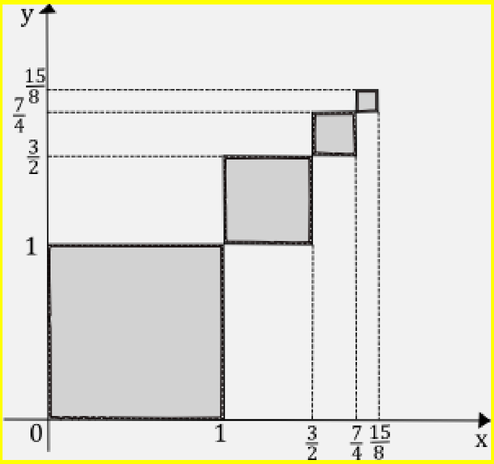

FIG. 5

59.2.7 Uno sguardo al passato. Ricorderai certamente che, a suo tempo, abbiamo dimostrato che **non esiste alcuna frazione che dia luogo ad un numero decimale periodico con periodo 9** e tuttavia, ammettendo che un numero decimale siffatto potesse esistere, abbiamo ammesso la convenzione che sia, per esempio: $0,\overline{9}=1$. E abbiamo dato anche delle giustificazioni di questa convenzione.

Ebbene, questa convenzione trova un'altra giustificazione proprio nella precedente formula [3].

In effetti, si ha:

$$0,\overline{9}=0,9+0,09+0,009+\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}=1.$$

59.2.8 Vogliamo evidenziare un interessante legame tra una progressione geometrica ad una progressione aritmetica. Sia allora la progressione geometrica di termine generale $a_n = a\,q^n$. Supponiamo che ogni suo termine a_n sia positivo. Consideriamo il suo logaritmo in una qualsiasi base b. Si ha:

$$\log_b a_n = a + n\ \log_b q\ ,$$

ottenendo così una progressione aritmetica di ragione $\log_b q$. Pertanto:

Se n numeri positivi sono in progressione geometrica di ragione q allora i loro logaritmi in una qualunque base b formano una progressione aritmetica di ragione $\log_b q$.

Gli storici attribuiscono alla scuola pitagorica, e segnatamente ad **Archita** di Taranto (V sec. a.C.), un primo studio delle progressioni aritmetiche e geometriche. La testimonianza più importante per tale attribuzione è costituita dall'opera *Introduzione all'aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I sec. d.C.). Opera che ebbe nell'antichità molti commentatori e costituì un punto di riferimento per tutti gli studiosi di matematica. Per saperne di più su questo argomento, quantunque limitato alle progressioni aritmetiche, si può vedere la lettura sui numeri figurati che chiude questa unità.
Lo studio delle progressioni si ritrova poi negli *Elementi* di **Euclide**, in particolare nei libri VIII e IX, ma solo per le progressioni geometriche, che Euclide chiama *proporzioni continue*. Non c'è invece negli *Elementi* uno studio delle progressioni aritmetiche.
Studio che invece avrebbe fatto il matematico alessandrino **Ipsicle** (II sec. A.C.), il quale avrebbe collegato tali progressioni ai numeri figurati. A questo studioso si attribuisce anche la paternità di un XIV libro degli *Elementi* di Euclide, nel quale egli fornisce un procedimento per la costruzione del dodecaedro e dell'icosaedro regolari.

59.3 IL NUMERO *e*

59.3.1 Un'importante successione è quella di termine generale:

$$\mathbf{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

È evidentemente definita per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Sei invitato a disegnarne il grafico, magari limitato a valori di n non maggiori di 10.
Si può spiegare intuitivamente con uno strumento di calcolo automatico che la successione cresce al crescere di n, approssimandosi ad un valore particolare compreso fra 2 e 3. Una tabella (Tab. 1) fornisce l'idea di ciò che stiamo dicendo.
Questo numero, come già sai, è chiamato ***numero di Nepero*** [3] perché è usato come base dei logaritmi neperiani e fu indicato da Eulero [4] col simbolo:

$$\boldsymbol{e}$$

tant'è che alcuni lo chiamano ***numero di Eulero***. È un numero irrazionale, anzi trascendente. Il suo valore, spinto fino alla 9ª cifra decimale, è il seguente:

$$\boldsymbol{e \approx 2{,}718\ 281\ 828}.$$

n	1	3	5	10	20	50	100	1000	10000	100000	1000000	2000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,3	2,4	2,5	2,65	2,69	2,70	2,716	2,71814	2,71826	2,718280	2,7182811

TAB. 1

I calcoli sintetizzati nella precedente tabella, una volta estesi a tutti i numeri naturali, senza salti, mostrano che:
- la parte intera del numero *e* si ottiene subito per $n=1$;
- la 1ª cifra decimale si stabilizza per $n \geq 74$;

[3] **Napier**, John (**Nepero** in italiano); matematico scozzese, 1550-1617
[4] **Euler**, Leonhard (**Eulero** in italiano), matematico svizzero, 1707-1783.

- la 2ª per n≥164;
- la 3ª per n≥4.822;
- la 4ª cifra decimale si stabilizza per n≥16.609;

eccetera.

Negli studi condotti fino a questo punto hai avuto modo di imbatterti in alcuni numeri particolarmente interessanti. Li elenchiamo qui appresso in ordine crescente e, di seguito, li rappresentiamo sulla retta dei numeri (Fig. 6):

$$0,\ \alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618,\ 1,\ \sqrt{2}\approx 1{,}41,\ \varphi=\frac{1}{\alpha}\approx 1{,}618,\ \sqrt{3}\approx 1{,}73,\ 2,\ \sqrt{5}\approx 2{,}24,\ e\approx 2{,}71,\ \pi\approx 3{,}14.$$

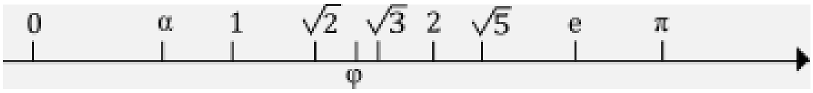

FIG. 6

59.3.2 Ad **Eulero**, uno dei matematici più prolifici della storia, si devono molte cose. Fra le quali si deve, come caso particolare di una formula da lui scoperta, un'altra formula (che forse egli però non ha mai scritto), considerata dalla maggior parte dei matematici come **la più bella formula matematica** [5]. Si tratta della formula seguente:

$$\mathbf{e^{\pi\, i} + 1 = 0}$$

Essa lega i 5 numeri fondamentali della matematica, vale a dire:

- il numero **1**, che gli antichi Pitagorici non consideravano un numero vero e proprio, ma che era la base per la formazione di tutti i numeri (V sec. a.C.);
- il numero **0**, la cui scoperta risale agli Indiani, anche se fu l'uso che ne fecero gli Arabi che lo rese familiare (VIII sec. d.C.);
- il numero **i**, cioè $\sqrt{-1}$, indicato così da Eulero, anche se introdotto e utilizzato da R. Bombelli (1526 ca. – 1573) per spiegare la risoluzione delle equazioni algebriche di 3° grado;
- il numero **π**, cioè il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro, i cui primi valori approssimati corretti si devono ad Archimede (III sec. a.C.), indicato con quel simbolo da W. Jones (1675-1749), ma affermatosi per il largo uso che ne fece Eulero;
- il numero **e**, di cui ci siamo occupati poco sopra.

I numeri **0** e **1** costituiscono la base fondamentale di ogni sistema di numerazione posizionale; il numero **i**, cioè l'unità immaginaria, è la base per la costruzione dei numeri complessi; i numeri **π** ed **e** sono numeri irrazionali, anzi addirittura numeri trascendenti poiché non sono soluzioni di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali.

Ad onor del vero e giusto per dare a Cesare quel che è di Cesare, bisogna dire che qualche tempo prima di Eulero il matematico senigalliese **Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano** (1682-1766), suo contemporaneo, aveva scoperto una formula equivalente, la seguente:

$$\pi = 2\,i\ln\frac{1-i}{1+i}\,.$$

E la dimostrazione che sia possibile trasformarla nella forma di Eulero è un interessante esercizio che la-

[5] Così l'ha definita comunque il fisico statunitense Richard Phillips Feynman (1918-1988), premio Nobel per la Fisica nel 1965.

sciamo volentieri a te. In realtà ci sono dei problemi legati al fatto che si ha a che fare con una funzione di variabile complessa: non ce ne possiamo occupare. Tu opera ad ogni modo come se si trattasse di funzione di variabile reale. Come d'altronde operò lo stesso Fagnano.

VERIFICHE [6]

Successioni (nn. 1-9).

1. Scrivi i primi 10 termini della successione avente come termine generale l'espressione a_n tale che:

a) $a_n = \frac{n}{3} - 3$. b) $a_n = -\frac{2}{5}n + \frac{1}{5}$. c) $a_n = (-1)^n\,(n^2-1)$.

d) $a_n = \frac{n\,(1-2n)}{2}$. e) $a_n = |n-1| - |2-n|$. f) $a_n = \begin{cases} n-1 \text{ per } 0 \le n < 7 \\ 12-n \text{ per } n \ge 7 \end{cases}$.

g) $a_n = \frac{n-2}{n}$. h) $a_n = \frac{n^2-1}{4-n^2}$. i) $a_n = (-1)^n\,n$.

2. Suddividi le successioni esaminate sopra mettendo nello stesso raggruppamento quelle che sono dello stesso tipo in base alla seguente classificazione: costante, crescente, decrescente, non decrescente, non crescente, di nessuno di questi tipi. Se qualcuno dei 6 raggruppamenti fosse vuoto, sei invitato a includervi come elemento almeno una successione fornita da te medesimo.

3. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 3\,n^2 - 3\,n + 1\,,$$

calcola: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$.

[**R**. Per un procedimento immediato bisogna intuire che è: $3\,n^2-3\,n+1=n^3-(n-1)^3$]

4. Dimostrare la seguente identità:

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1\,,$$

dove n è un qualsiasi numero reale.

Considerata poi la seguente successione di numeri naturali:

$$a_n=4n^3+6n^2+4n+1\,,$$

calcolare: $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$.

5. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Si sa che a_0 ed a_1 sono numeri non nulli. Inoltre per $n>1$ è:

$$a_n=\frac{2n}{a_{n-2}}.$$

Considerato il prodotto $P=a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3$, delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

[A] $P = 24$. [B] $P = 48$. [C] $P = 96$. [D] I dati non sono sufficienti per calcolare P.

6. LABORATORIO DI MATEMATICA. Si sa che a_0 è un numero non nullo. Inoltre, per $n>0$, è:

$$a_n=\frac{3+n}{a_{n-1}}.$$

Considerato il prodotto $P=a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5$, delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

[A] $P = 105$. [B] $P = 192$. [C] $P = 297$. [D] I dati non sono sufficienti per calcolare P.

---

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

7. Considera la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{n}{2^n} \text{ (con } n > 0).$$

Dimostra, utilizzando il principio d'induzione, che la somma dei suoi primi n termini vale:

$$S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

8. Considera la successione di termine generale:

$$a_n = n(n+1) \text{ (con } n > 0).$$

Dimostra, utilizzando il principio d'induzione, che la somma dei suoi primi n termini vale:

$$S_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

9. Considera la successione di termine generale:

$$a_n = n(n+1)(n+2) \text{ (con } n > 0).$$

Dimostra, utilizzando il principio d'induzione, che la somma dei suoi primi n termini vale:

$$S_n = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Progressioni aritmetica e geometrica.

10. Considerata una progressione aritmetica, con evidente significato per i simboli, calcola:

a) a_1 sapendo che $S_5 = \frac{7}{3}$ e $a_5 = \frac{2}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4}{15}\right]$

b) a_1 sapendo che $S_6 = -\frac{11}{2}$ e $d = -\frac{3}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{17}{6}\right]$

11. Trova una formula idonea a calcolare la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1.

12. Trova una formula idonea a calcolare la somma dei primi n numeri naturali dispari. $[\mathbf{R.}\ n^2]$

13. Trova una formula idonea a calcolare la somma dei primi n naturali pari a partire da 2. $[\mathbf{R.}\ n(n+1)]$

14. Determina un numero naturale sapendo che le sue tre cifre, considerate nell'ordine in cui è scritto il numero, formano una progressione aritmetica e che scambiando la cifra delle unità con quella delle decine si ottiene un numero che supera di 36 quello cercato. [R. 159]

15. Calcola per quale valore del parametro reale a la seguente espressione:

$$a^2 - 3a + 1$$

costituisce il 4° termine della progressione aritmetica avente per ragione 2 e 7° termine il numero 23/4. $[\mathbf{R.}\ 2 \text{ sol.}: 1/2, 5/2]$

16. Un orologio a pendolo batte solo le ore. Calcola il numero dei suoi rintocchi nell'arco delle 12 ore. [**R.** 78]

17. Calcola per quali valori dei parametri reali m ed n le seguenti espressioni:

$$m - n, \quad 2m + n - 1, \quad m + 2n + 1$$

formano, nell'ordine scritto, una progressione aritmetica di ragione 3. $[\mathbf{R.}\ m = 2/3,\ n = 5/3]$

18. Calcola per quale valore del parametro reale a le seguenti espressioni:

$$a - 1, \quad \frac{a}{2} + 2, \quad a + \frac{3}{4}$$

formano, nell'ordine scritto, una progressione aritmetica. Successivamente, per il valore di a trovato, calcola la somma dei primi 8 termini della progressione aritmetica di cui quelli assegnati costituiscono i primi 3. $[\mathbf{R}\ .17/4, 101/2]$

19. Calcola le ampiezze degli angoli interni di un triangolo sapendo che sono in progressione aritmetica e che il maggiore è il doppio del minore. [**R.** $40°, 60°, 80°$]

20. Giustifica che il quadrilatero convesso ABCD, tale che le ampiezze degli angoli interni di vertici A, B, D, C formano, nell'ordine scritto, una progressione aritmetica, è inscrivibile in un cerchio. Calcola quindi le ampiezze di detti angoli sapendo che quello di vertice D supera quello di vertice A di un angolo retto. [**R.** $22°30', 67°30', 157°30', 112°30'$]

21. Giustifica che il quadrilatero convesso ABCD, tale che le lunghezze dei lati AB, BC, DA, CD formano una progressione aritmetica nell'ordine indicato, è circoscrivibile ad un cerchio. Determina quindi le lunghezze di detti lati sapendo che il perimetro del quadrilatero è 7a, dove a è una lunghezza assegnata, e che DA è lungo il doppio di AB. [**R.** $a, 3a/2, 5a/2, 2a$]

22. Calcola le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo sapendo che sono in progressione aritmetica e sapendo che il perimetro del triangolo è 4 m. [**R.** $1\text{ m},\ 4/3\text{ m},\ 5/3\text{ m}$]

23. Calcola il perimetro di un trapezio rettangolo sapendo che la sua base maggiore misura $2a\left(3+2\sqrt{3}\right)$, dove a è una misura nota, e sapendo inoltre che le misure dell'altezza, della base minore e del lato obliquo formano, nell'ordine indicato, una progressione aritmetica di ragione 2a. [**R.** $4a\left(6+\sqrt{3}\right)$]

24. Sono dati due triangoli, ABC e DEF, il primo rettangolo in B, il secondo con l'angolo in E ampio 60°. Le misure dei segmenti AB, BC, DE, EF formano, in quest'ordine, una progressione aritmetica di ragione nota d positiva; inoltre la somma dei quadrati delle misure di AC e DF è uguale a $14\,d^2$. Calcola la misura del lato AB. [**R.** $2d/3$]

25. Sono assegnati tre numeri naturali consecutivi a, b, c. Indicati con p un numero primo e con n un numero naturale dispari, si sa che i tre numeri a, $b+n$, $c+p$ sono in progressione aritmetica. Determina la ragione di tale progressione. [**R.** 2]

26. Si considerino i numeri interi da 4 a 9 compresi. Quante sono le possibili terne di valori crescenti che si possono formare con essi? Quante di queste terne sono in progressione aritmetica? Quante in progressione geometrica? [**R.** 20; 6; 1]

27. Guido decide di mettere da parte, sulla paghetta settimanale che gli passa papà, € 0,1 la prima settimana, € 0,2 la seconda, € 0,3 la terza e così via aumentando di $1/10$ di euro ogni settimana fino ad accantonare € 82. Per quante settimane Guido ha dovuto risparmiare e quanto ha dovuto mettere da parte nell'ultima settimana? [**R.** 40 settimane; € 4]

28. Calcola la somma di tutte le potenze di $1/2$ con esponente in $\mathbb{N}$. [**R.** 2]

29. Calcola la somma di tutte le potenze di $1/10$ con esponente in $\mathbb{N}_0$. [**R.** $1/9$]

30. Calcola per quale valore del parametro reale a le seguenti espressioni:

$$a-1,\ \ a,\ \ a+2$$

formano, in quest'ordine, una progressione geometrica. Successivamente, per il valore di a trovato, calcola la somma dei primi 6 termini della progressione geometrica di cui quelli assegnati sono i primi 3. [**R.** 2; 63]

31. Calcola per quali valori dei parametri reali m ed n le seguenti espressioni:

$$m-n,\ \ m,\ \ m+2n+1$$

formano, in quest'ordine, una progressione geometrica di ragione $q=-1/2$.
[**R.** $m=-2/15,\ \ n=-2/5$]

32. Un maratoneta corre 8 ore al giorno per 5 giorni, aumentando ogni giorno la sua velocità di $1/10$ rispetto al giorno precedente. Sapendo che nel 5° giorno ha percorso 70 km, quanti ne ha percorsi nel 1°? [**R.** ≈47,8 km]

33. Si supponga che Paolo abbia tante monete da poterle disporre su una scacchiera nel seguente modo: €

0,01 sul 1° quadratino, € 0,02 sul 2°, € 0,04 sul 3°, € 0,08 sul 4° e così raddoppiando fino al 64° quadratino. Calcola quanti euro ha disposto Paolo sulla scacchiera.

[**R.** oltre € $1{,}8 \times 10^{17}$ cioè oltre 180 milioni di miliardi di euro]

34. Tuo zio ti ha lasciato una grossa eredità. Il notaio incaricato di dare esecuzione al testamento ti propone due alternative:

1) € 300.000 al giorno, ogni giorno, per 30 giorni;
2) € 0,01 il 1° giorno, € 0,02 il 2° giorno, € 0,04 il 3° giorno, € 0,08 il 4° giorno e così raddoppiando fino al 30° giorno.

Quale delle due alternative è più favorevole a te?

35. Considerato il triangolo equilatero ABC di lato lungo L, si dicano AA_1 un'altezza del triangolo ABC, A_1A_2 un'altezza del triangolo AA_1B, A_2A_3 un'altezza del triangolo A_1A_2B, A_3A_4 un'altezza del triangolo $A_2A_3A_1$, e così via indefinitamente. Calcola la somma delle misure delle infinite altezze AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... [**R.** $L\sqrt{3}$]

36. Considerato un triangolo equilatero T_1 di lato lungo L, costruisci il triangolo T_2 avente per vertici i punti medi dei lati di T_1; costruisci quindi il triangolo T_3 avente per vertici i punti medi dei lati di T_2; e, così via, immagina di ripetere indefinitamente la costruzione. Calcola la somma dei perimetri e quella delle aree degli infiniti triangoli ottenuti. [**R.** $6\,L$; $\frac{\sqrt{3}}{3}L^2$]

37. Considerato un quadrato Q_1 di lato lungo L, costruisci il quadrato Q_2 avente per vertici i punti medi dei lati di Q_1; costruisci quindi il quadrato Q_3 avente per vertici i punti medi dei lati di Q_2; e, così via, immagina di ripetere la costruzione all'infinito. Calcola la somma dei perimetri e quella delle aree degli infiniti quadrati ottenuti. [**R.** $4\,L\left(2+\sqrt{2}\right)$; $2\,L^2$]

38. Si supponga che ogni anno il consumo di energia elettrica in Italia aumenti del 2,9%. Fra quanti anni tale consumo sarà il doppio di quello attuale? [**R.** fra poco più di 25 anni]

39. Una pallina elastica è lasciata cadere da una certa altezza e, ad ogni rimbalzo, risale ai $2/3$ dell'altezza precedente. Teoricamente la pallina si ferma dopo un numero infinito di rimbalzi. Quanti metri ha percorso complessivamente dall'istante in cui è lasciata cadere a quello in cui si ferma, se è lasciata cadere dall'altezza di 2 metri? [**R.** 10 m]

40. ® Sono assegnati tre numeri naturali consecutivi a, b, c. Indicato con n un altro numero naturale, si sa che i tre numeri a, $b+4$, $c+n$ sono in progressione geometrica. Determina i numeri a, b, c.

41. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n? [**R.** $n=7$]

[Tratto dall'Esame di Stato, indirizzo scientifico, sessione ordinaria, 2008]

42. Una progressione geometrica decrescente è formata da infiniti termini. La somma dei suoi primi 4 termini è 15, mentre la somma dei quadrati di tali 4 termini è 85. Calcola la somma degli infiniti termini della progressione. [Esercizio ad alto coefficiente di difficoltà. **R.** 16]

43. Sono assegnati tre numeri naturali consecutivi. Lasciando invariato il minore, si sommi 2 al numero intermedio ed un altro numero intero positivo al maggiore in modo che i tre numeri ottenuti in tal modo siano in progressione geometrica. Quali sono queste progressioni?

[**R.** 3 sol.: 1-4-16, 3-6-12, 9-12-16]

44. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1-4n}{1+2n} .$$

Dopo aver dimostrato che per nessun valore di n è $a_n = -2$, dimostra che la successione di termine generale:

$$b_n = \frac{2a_n+1}{a_n+2}$$

è una progressione aritmetica di primo termine 1 e calcola la somma dei suoi primi 100 termini.

[**R.** ... ; S_{100}=−9.800]

45. ® Si consideri la seguente equazione nell'incognita x:

$$4x^3-6x^2-13x+k=0,$$

dove k è un parametro reale. Si sa che le sue soluzioni sono numeri reali in progressione aritmetica. Determinare tali soluzioni ed il valore di k. [Esercizo ad alto coefficiente di difficoltà]

46. ® I numeri a, b+2, c+p sono in progressione geometrica. Sapendo che a, b, c sono numeri naturali consecutivi e che p è un numero primo, determinare i numeri a, b, c, p.

[Esercizio ad alto coefficiente di difficoltà]

47. Dividere il numero 63 in tre parti disuguali, che siano numeri interi e termini successivi di una progressione geometrica. [**R.** 2 sol.: (3, 12, 48); (9, 18, 36)]

48. I numeri interi positivi a, b, c sono in progressione geometrica, mentre i numeri a+2, b+3, c+2 sono in progressione aritmetica di ragione positiva. Trovare tutte le terne ordinate (a,b,c) che soddisfano alle condizioni suddette. [**R.** $(2k^2, 2k(k+1), 2(k+1)^2), \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$]

49. Sono dati i numeri 5, 7, 11.

a) Trovare tutte le progressioni aritmetiche di ragione un numero intero positivo, che li contiene come termini.

b) Dimostrare che non esiste alcuna progressione geometrica di cui i tre numeri assegnati sono termini.

RISOLUZIONE (traccia).

a) Indicata con d la ragione di una progressione aritmetica che contiene come termini i numeri 5, 7, 11, esistono due numeri interi positivi m, n tali che risulti: 7−5=md, 11− 5=nd. Si desume che deve essere:

$$d=\frac{2}{m}, \quad d=\frac{6}{n}, \quad n=3m.$$

Di conseguenza, facendo qualche altra considerazione, si conclude che esistono solamente due progressioni aritmetiche con le caratteristiche richieste: una di ragione 1 ed una di ragione 2.

b) Per la seconda parte ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una progressione geometrica che contenga come termini i numeri 5, 7, 11. Sia q la sua ragione. Allora dovrebbero esistere due interi positivi m, n tali che risulti:

$$7 = 5 \cdot q^m, \quad 11 = 5 \cdot q^n.$$

Da qui, in seguito ad alcune considerazioni, segue la seguente uguaglianza:

$$7^n \cdot 5^m = 5^n \cdot 11^m.$$

Uguaglianza impossibile poiché il primo membro contiene solamente i fattori primi 7 e 5, mentre il secondo membro contiene solamente i fattori primi 5 e 11. Dobbiamo concludere che … .

50. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{n^2+5n+6}.$$

Dopo aver dimostrato che risulta:

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3},$$

calcolare la somma: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

$$\left[\mathbf{R.}\ \ S_n = \frac{n}{3(n+3)}\right]$$

51. Questo esercizio è ispirato ad uno analogo formulato da Archimede [7].
Data una grandezza G, si prendano in successione n grandezze tali che la prima di esse sia $\frac{1}{4}$G e ciascuna delle successive sia $\frac{1}{4}$ di quella che la precede. Sia infine una (n+1)-esima grandezza uguale a $\frac{1}{3}$ dell'ultima grandezza ottenuta. Considerata la somma S della grandezza G con le n+1 grandezze descritte, calcolare il valore di S quando n è "infinitamente grande". $\left[\mathbf{R.}\ \ S = \frac{4}{3}\,G\right]$

52. È dato un triangolo equilatero di area unitaria (Fig. 7). Si congiungono i punti medi dei suoi lati e si colora il triangolo centrale. In ciascuno dei 3 triangoli bianchi, cioè non colorati, si congiungono i punti medi dei lati e si colora il triangolo centrale. Si ripete l'operazione per ciascuno dei 9 triangoli bianchi e si procede allo stesso modo per i 27 triangoli bianchi e, così via, all'infinito. In questo modo, alla fine, tutto il triangolo rimane colorato. Per verificarlo, calcolare l'area della regione del triangolo che risulta colorata alla fine dell'operazione e verificare che è uguale a 1.
Se, invece, la situazione è esattamente quella rappresentata in figura, quale percentuale del triangolo rimane bianca? [**R.** … ; ≈31,64%]

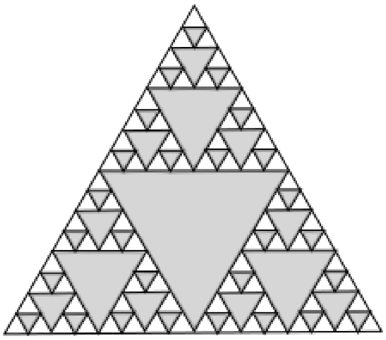

FIG. 7

53. Si supponga che un tessuto tumorale impieghi circa 20 giorni per raddoppiare le sue cellule. Si supponga inoltre che il tumore si manifesti quando le sue cellule sono in numero di $4 \cdot 10^8$. Posto che al momento attuale le cellule tumorali siano in numero di $4 \cdot 10^5$, calcolare tra quanti giorni il tumore si manifesterà. [**R.** circa 180 giorni]

54. Il sig. Giorgio decide di costituire un piccolo fondo per il figlio che ha appena compiuto 18 anni e vorrebbe fare un viaggetto. Lo fa mettendo da parte 2 euro il giorno del 18° compleanno del figliolo e una somma doppia della precedente alla scadenza di ogni mese, dopo quella data, fino a raggiungere la somma complessiva di € 2.046. Dopo quanti mesi dal suo 18° compleanno, Giorgio potrà disporre di tale somma? [**R.** 9 mesi]

55. Un riccone americano, tipo Bill Gates, decise di regalare una considerevole somma (in migliaia di dollari) a 10 suoi collaboratori, ma lo fece in un modo assai bizzarro, dopo averli disposti in ordine in base ad un suo personale criterio di valutazione: al 1°, cioè al collaboratore preferito, regalò la metà della somma messa a disposizione più mezzo migliaio di dollari; al 2° regalò la metà della somma rimasta più mezzo migliaio di dollari; al 3° regalò la metà della somma rimasta (dopo aver gratificato i primi 2 collaboratori) più mezzo migliaio di dollari; e, così via, fino al 10°collaboratore, in ordine di preferenza, al quale regalò tutta la somma rimasta, consistente in mezzo migliaio di dollari più metà della

[7] Archimede, *Sulla quadratura della parabola*, proposizione 23.

somma rimasta (dopo aver gratificato i 9 precedenti collaboratori).
a) Quale somma il riccone stanziò per le su specificate gratifiche? b) Quale somma toccò al 10° collaboratore? [R. a) 1.023 migliaia di dollari; b) 1.000 dollari]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 Cos'è una successione di numeri reali?
2 Cos'è una progressione aritmetica?
3 Qual è la formula che esprime la somma di n numeri in progressione aritmetica?
4 Cos'è una progressione geometrica?
5 Qual è la formula che esprime la somma di n numeri in progressione geometrica?
6 Quanto vale la somma dei numeri dispari compresi fra 1 e 1000?
7 Posto che n numeri positivi formino una progressione geometrica, si può affermare che i loro logaritmi naturali formano una progressione aritmetica?
8 Come si può definire il numero ***e*** di Nepero? Qual è il suo valore?
9 È vero che $e^{\pi i}=e^{-\pi i}$?
10 È vero che un valore semplificato di $e^{\frac{\pi i}{2}}$ è l'unità immaginaria i ?

RISPOSTE.

1. Si definisce successione di numeri reali ogni funzione da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$. Ne consegue che: ogni successione di numeri reali è un insieme ordinato di numeri reali.
2. Si definisce progressione aritmetica ogni funzione da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$, del tipo $y=ax+b$, dove $a,b\in\mathbb{R}$. Ne discende che: ogni progressione aritmetica è un insieme ordinato di numeri reali tali che la differenza fra ogni termine (dopo il primo) ed il precedente è costante.
3. Se a_1 e a_n rappresentano il 1° e l'n-esimo termine di una progressione aritmetica, la somma S degli n termini è data dalla formula seguente:
$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\,.$$
4. Si definisce progressione geometrica ogni funzione da $\mathbb{N}$ verso $\mathbb{R}$, del tipo $y=ba^x$, dove $a,b\in\mathbb{R}_0$. Ne discende che: ogni progressione geometrica è un insieme ordinato di numeri reali tali che il rapporto fra ogni termine (dopo il primo) ed il precedente è costante.
5. Se a_1 e q rappresentano rispettivamente il 1° termine e la ragione di una progressione geometrica, la somma S dei suoi primi n termini a partire da a_1 è data dalla formula seguente:
$$S=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\,.$$
6. Basta ricordare che la somma dei primi n numeri dispari a partire da 1 è n^2. Siccome i numeri dispari compresi fra 1 e 1.000 non sono altro che i primi 500 numeri dispari, la loro somma è 500^2, vale a dire 250.000.
7. Sì. Considerata infatti la progressione geometrica di valori positivi $f(x)=B\,A^x$ e calcolati i logaritmi naturali, si ha $\ln f(x)=\ln B+x\ln A$ e si tratta evidentemente di valori di una progressione aritmetica di ragione $\ln A$.

8. Il numero *e* di Nepero è il valore cui tende la successione: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n assume valori sempre più grandi. Questo valore è un numero irrazionale compreso fra 2 e 3, una cui approssimazione, arrestata al 3° decimale, è 2,718.

9. È vero. Basta sapere che $e^{\pi i}=-1$ e constatare che:

$$e^{-\pi i}=\frac{1}{e^{\pi i}}=\frac{1}{-1}=-1.$$

10. È vero, Basta infatti sapere che $e^{\pi i}=-1$ e constatare che:

$$e^{\frac{\pi i}{2}}=\left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}=i.$$

LETTURA

I numeri figurati

Nicomaco di Gerasa (I sec. d.C.), nella sua *Introduzione all'aritmetica*, attribuisce alla scuola pitagorica lo studio dei "*numeri figurati*". Si chiamano così perché si rappresentano con particolari figure geometriche, come triangoli, quadrati, pentagoni, eccetera. Sono detti anche *numeri poligonali*.
Ad occuparsi in maniera approfondita di tali numeri fu il matematico alessandrino **Diofanto** (II-III sec. d.C.) in un suo testo dal titolo, per l'appunto, *Numeri poligonali*, pervenutoci integralmente.
Noi descriveremo soltanto i numeri triangolari ed i numeri quadrati e faremo solo un cenno agli altri numeri poligonali. S'impone però una precisazione. Comprenderemo fra tali numeri il numero 1, che però i Pitagorici non consideravano tale, anche se costituiva la base per la costruzione dei numeri. Concezione che peraltro sarebbe durata a lungo. Basti ricordare le definizioni di "unità" e di "numero" date da Euclide (*Elementi*, libro VII):
- definizione I: «*Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno*»;
- definizione II: «*Numero è una pluralità composta da unità*».

- Un ***numero triangolare*** è tale perché i punti che nel loro totale lo formano sono disposti a forma di triangolo. In figura 8 sono rappresentati i numeri triangolari 1, 3, 6, 10.

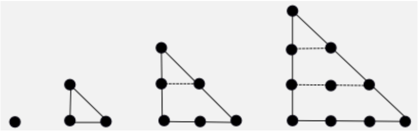

FIG. 8 – Numeri triangolari

Detto per inciso, la struttura triangolare che rappresentava il numero 10 (=1+2+3+4) era detta ***tetractys*** dai Pitagorici: era considerata una figura sacra e non solo era alla base della loro dottrina, ma su di essa prestavano i giuramenti più impegnativi.
Si può constatare come, dopo il numero 1, i numeri triangolari successivi siano i seguenti:

$$3 = 1+2, \quad 6 = 1+2+3, \quad 10 = 1+2+3+4.$$

Vale il seguente criterio generale:
L'n-esimo numero triangolare si ottiene sommando i primi n numeri naturali a partire da 1.

Si può poi dimostrare e ne lasciamo il compito a te che:
La somma del numero triangolare di posto n–1 e del numero triangolare di posto n è un quadrato perfetto e precisamente è uguale ad n^2.

Per esempio: la somma del 5° numero triangolare e del 6° numero triangolare è uguale a 6^2, vale a dire 36.
Inoltre, ed anche questo si può dimostrare e verificare in qualche caso particolare:
La somma dei quadrati del numero triangolare di posto n e del numero triangolare di posto $n-1$ è uguale al numero triangolare di posto n^2.

Concludiamo con i numeri triangolari, proponendo a chi legge di dimostrare la seguente proprietà:
La somma dei reciproci dei primi n numeri triangolari, vale a dire:

$$\mathbf{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}},$$

è: $\mathbf{S_n=\frac{2\,n}{n+1}}$.

- Un ***numero quadrato*** è tale perché i punti che nel loro totale lo formano sono disposti a forma di quadrato. In figura 9 sono rappresentati i numeri quadrati 1, 4, 9, 16.

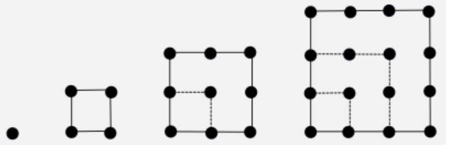

FIG. 9 – Numeri quadrati

Si può costatare come, dopo il numero 1, i numeri quadrati successivi siano i seguenti:

4 = 1+3,   9 = 1+3+5,   16 = 1+3+5+7.

Vale il seguente criterio generale:
L'n-esimo numero quadrato si ottiene sommando i primi n numeri dispari a partire da 1.

- Facciamo adesso osservare un fatto interessante. I due precedenti criteri di formazione di un numero triangolare e di un numero quadrato possono essere letti in questa maniera:

- l'n-esimo numero triangolare si ottiene sommando i primi n numeri in progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 1;
- l'n-esimo numero quadrato si ottiene sommando i primi n numeri in progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 2.

Si può constatare inoltre che nel caso dei numeri triangolari ($h=3$) la ragione è 1, cioè $h-2$, mentre nel caso dei numeri quadrati ($h=4$) essa è 2, cioè ancora $h-2$. Se continuassimo con altri numeri figurati, come numeri pentagonali ($h=5$), numeri esagonali ($h=6$), eccetera, avremmo sempre una progressione aritmetica di ragione $h-2$.
In generale, pertanto, considerando un numero poligonale di lato h, si ha il seguente criterio di formazione di un tale numero:
L'n-esimo numero poligonale di lato h si ottiene sommando i primi n numeri in progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione h–2.

Cosicché i **numeri pentagonali** ($h=5$) sono i seguenti (Fig. 10):

$$1,\ 1+4=5,\ 1+4+7=12,\ 1+4+7+10=22,\ \ldots\,.$$

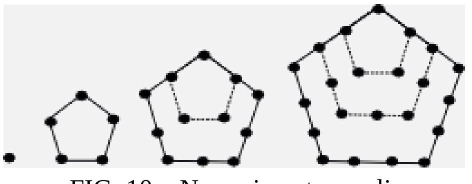

FIG. 10 – Numeri pentagonali.

Questi sono invece **numeri esagonali** ($h=6$):

$$1,\ 1+5=6,\ 1+5+9=15,\ 1+5+9+13=28,\ \dots .$$

Prova a rappresentarli.

Chiediamo adesso la tua collaborazione per la risoluzione del seguente esercizio.

ESERCIZIO. Calcolare in funzione di n l'espressione dell'n-esimo numero poligonale di lato h nei seguenti casi: $h=3$, $h=4$, $h=5$, $h=6$.

RISOLUZIONE. Occorre tener presente anzitutto la proprietà generale enunciata sopra e ricordare la formula che fornisce la somma di n numeri in progressione aritmetica.

Bisogna conoscere poi un'altra proprietà delle progressioni aritmetiche, la seguente: l'n-esimo termine a_n di una progressione aritmetica di primo termine a_1 e ragione d è: $a_n=a_1+(n-1)\,d$.

Ragion per cui, indicato per comodità con $P_{n,h}$ l'n-esimo numero poligonale di lato h, dopo alcune semplici considerazioni si trova:

$$P_{n,3}=1+2+3+4+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$P_{n,4}=1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2;$$

$$P_{n,5}=1+4+7+10+\dots+(3n-2)=\frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n=\frac{n(3n-1)}{2};$$

$$P_{n,6}=1+5+9+13+\dots+(4n-3)=\frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n=n(2n-1);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

$$P_{n,h}=1+(h-1)+(2h-3)+(3h-5)+\dots+\big((n-1)h-(2n-3)\big)=\frac{(n-1)h-2n+4}{2}\cdot n\,.$$

Si capisce, da quanto su esposto, che il numero 1 è contemporaneamente numero triangolare, quadrato, pentagonale, … , poligonale di lato h qualunque purché $h\geq3$. Oltre a questo numero, esistono altri numeri che sono simultaneamente numeri figurati di specie diverse (diverso h). Per esempio, il numero 6 è contemporaneamente numero triangolare ($h=3$) di posto 3 ($n=3$) e numero esagonale ($h=6$) di posto 2 ($n=2$); parimenti il numero 15 è numero triangolare ($h=3$) di posto 5 ($n=5$) e numero esagonale ($h=6$) di posto 3 ($n=3$) ed è anche numero pentadecagonale ($h=15$) [8] di posto 2 ($n=2$). Si può ancora verificare che il numero 210 è numero triangolare di posto 20 ($n=20$) e numero pentagonale di posto 12 ($n=12$), ma è anche numero poligonale di lato 210 di posto 2 ($h=210$, $n=2$).

Chi legge può trovare da sé altri numeri che sono contemporaneamente numeri figurati di specie diverse e di posto diverso (diverso h e diverso n).

[8] Il *pentadecagono* è un poligono di 15 lati.