Prerequisiti:

- Saper operare con addizione e moltiplicazione di polinomi, anche al fine di semplificare un'espressione letterale
- Conoscere e calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di due o più numeri

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dividere un polinomio* P(x) *per un polinomio* Q(x)
- *enunciare il teorema di Ruffini e applicare la regola di Ruffini*
- *fattorizzare semplici polinomi*
- *operare con le frazioni algebriche*
- *analizzare semplici sviluppi algebrici, individuando eventuali errori di ragionamento*
- *utilizzare un idoneo software matematico per semplificare un'espressione algebrica o per fattorizzare un polinomio*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

6.1 Divisione dei polinomi.

6.2 Frazioni algebriche. Fattorizzazione di un polinomio.

6.3 M.C.D. e m.c.m. di polinomi. Operazioni con le frazioni algebriche.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Divisione dei polinomi. Fattorizzazione

Unità 6

6.1 DIVISIONE DEI POLINOMI

6.1.1 La divisione non è un'operazione ovunque definita nell'insieme dei polinomi. In effetti, il rapporto di due polinomi qualunque non è un polinomio, pur potendolo essere in qualche caso particolare. Tuttavia, come per la divisione di due numeri naturali, si può anche parlare di divisione tra due polinomi.
Alla base di tutto c'è il seguente teorema, di cui omettiamo però la dimostrazione, che ne ricorda uno simile sulla divisione dei numeri.

♦ TEOREMA. Quali che siano i due polinomi A, B in una stessa indeterminata, purché $B\neq 0$, esistono e sono unici i polinomi C e D, nella medesima indeterminata, tali che:

$$A = B\,C + D\,,$$

con $g_D<g_B$, dove g_D e g_B sono i gradi dei polinomi D e B.

I polinomi C e D si dicono rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di A per B, detti a loro volta, nell'ordine, *dividendo* e *divisore*.
Quando D=0 il polinomio A si dice *divisibile* per B.
I coefficienti dei polinomi coinvolti potrebbero appartenere all'insieme ℝ dei numeri reali, ma ci limitiamo a considerarli nell'insieme ℚ dei razionali. Almeno di norma, poiché non si escludono situazioni particolari.

Prima di procedere ti proponiamo per esercizio di determinare il polinomio dividendo A, noti il polinomio divisore B, il polinomio quoziente C ed il polinomio resto D, sapendo in particolare che:

1) $B=x^2-1,\ C=x+2,\ D=3.$ 2) $B=a^3+2a-2,\ C=a-2,\ D=a^2-1.$

6.1.2 L'operazione che permette di trovare C e D dati A e B, si chiama *divisione euclidea*.
Per la ricerca dei polinomi quoziente e resto della divisione di un polinomio A per un polinomio B assegnati, si può procedere in due modi. Uno di essi risulterà chiaro dopo il seguente esempio.

- ESERCIZIO. Trovare il quoziente C ed il resto D della divisione del polinomio A per il polinomio B, sapendo che:

$$A = 3\,x^2-2\,x+1,\quad B = x^2-3\,x\,.$$

RISOLUZIONE. Siccome A=BC+D e siccome il grado di A è 2 e così pure quello di B, allora il grado del polinomio C è 0. Come dire che C è un numero razionale: chiamiamolo a.
D'altronde il polinomio D ha al più grado 1: indichiamolo con bx+c, dove b, c sono numeri razionali che per il momento sono sconosciuti. Deve risultare ovviamente:

$$3\,x^2-2\,x+1=(x^2-3\,x)\,a+(b\,x+c)\,;$$

ossia, sviluppando il 2° membro e ordinando secondo le potenze decrescenti di x:

$$3\,x^2-2\,x+1=a\,x^2+(-3\,a+b)\,x+c\,.$$

Affinché i due membri siano identicamente uguali, vale a dire uguali per ogni x, devono avere gli stessi coefficienti, per cui deve risultare contemporaneamente:

$$a=3,\ \ -3\,a+b=-2,\ \ c=1.$$

Da qui, dopo aver sostituito nella seconda relazione il valore 3 alla variabile a, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$-9+b=-2\,,$$

la quale risulta vera solo se $b = 7$. Pertanto i polinomi cercati sono:

$$C=3\,,\ \ D=7\,x+1\,.$$

A riprova di ciò, verifica che, di fatto, risulta: $3\,(x^2 - 3\,x) + (7\,x + 1) = 3\,x^2 - 2\,x + 1$.

6.1.3 Il procedimento precedente è già lungo in un caso semplice; lo è ancora di più in casi appena più complessi. Al suo posto se ne preferisce un altro, forse meno convincente perché meccanico, ma certamente più rapido. Lo illustriamo ancora con un esempio.

- ESERCIZIO. Trovare il quoziente C ed il resto D della divisione del polinomio A per il polinomio B, sapendo che:

$$A = 2\,x^4 + x^3 - 6, \quad B = x^2 - 2.$$

RISOLUZIONE. Si dispone anzitutto il calcolo secondo il seguente schema, nel quale il polinomio dividendo è ordinato secondo le potenze decrescenti dell'indeterminata, completando con monomi di coefficiente 0 gli eventuali termini mancanti:

$$\begin{array}{r|l} 2\,x^4 + x^3 + 0\,x^2 + 0\,x - 6 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Si divide poi il primo termine del dividendo, cioè $2x^4$, per il primo termine del divisore, vale a dire x^2, ottenendo così $2x^2$; questo è il primo termine del quoziente:

$$\begin{array}{r|l} 2\,x^4 + x^3 + 0\,x^2 + 0\,x - 6 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} & 2\,x^2 \end{array}$$

Questo termine, $2x^2$, si moltiplica per il polinomio divisore e il prodotto ottenuto viene scritto al di sotto del dividendo, incolonnando i termini simili:

$$\begin{array}{lcccc|l} 2\,x^4 & + x^3 & + 0\,x^2 & + 0\,x & - 6 & x^2 - 2 \\ \cline{6-6} 2\,x^4 & & - 4\,x^2 & & & 2\,x^2 \end{array}$$

Si effettua quindi la differenza tra il polinomio dividendo e il prodotto suddetto, ottenendo il cosiddetto *primo resto parziale*:

$$\begin{array}{lcccc|l} 2\,x^4 & + x^3 & + 0\,x^2 & + 0\,x & - 6 & x^2 - 2 \\ \cline{6-6} 2\,x^4 & & - 4\,x^2 & & & 2\,x^2 \\ \cline{1-5} & x^3 & + 4\,x^2 & + 0\,x & - 6 & \end{array}$$

Se, come avviene nel caso in esame, questo resto parziale è un polinomio di grado non inferiore a quello del divisore, il procedimento va continuato come sopra. Solo che adesso il resto suddetto assume il ruolo di polinomio dividendo:

$$\begin{array}{lcccc|l} 2\,x^4 & + x^3 & + 0\,x^2 & + 0\,x & - 6 & x^2 - 2 \\ \cline{6-6} 2\,x^4 & & - 4\,x^2 & & & 2\,x^2 + x \\ \cline{1-5} & x^3 & + 4\,x^2 & + 0\,x & - 6 & \\ & x^3 & & - 2\,x & & \\ \cline{1-5} & & 4\,x^2 & + 2\,x & - 6 & \end{array}$$

Si ottiene il secondo termine del polinomio quoziente, cioè x, e, dopo aver effettuato il prodotto di questo termine per il polinomio divisore ed aver sottratto tale prodotto dal primo resto parziale, si ottiene il *secondo resto parziale*.

Poiché il grado di questo resto non è inferiore a quello del divisore, il procedimento continua ancora:

$2x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x - 6$	$x^2 - 2$
$2x^4 \qquad - 4x^2$	$2x^2 + x + 4$
$x^3 + 4x^2 + 0x - 6$	
$x^3 \qquad - 2x$	
$4x^2 + 2x - 6$	
$4x^2 \qquad - 8$	
$2x + 2$	

Alla fine abbiamo ottenuto come resto il polinomio 2x+2, il cui grado è minore di quello del polinomio divisore: il procedimento ha termine. Il quoziente e il resto cercati sono allora:

$$C = 2x^2 + x + 4, \quad D = 2x + 2.$$

A conferma di questo fatto, verifica che risulta: $(x^2 - 2)(2x^2 + x + 4) + (2x + 2) = 2x^4 + x^3 - 6$.

Come applicazione del procedimento descritto sopra, vogliamo ritrovare il quoziente C ed il resto D della divisione di $3x^2-2x+1$ per x^2-3x. Si ha:

$3x^2 - 2x + 1$	$x^2 - 3x$
$3x^2 - 9x$	3
$7x + 1$	

Ossia, esattamente come prima, ma molto più rapidamente:

$$C = 3, \quad D = 7x + 1.$$

6.1.4 Esercizi da risolvere.

Determina il quoziente C e il resto D della divisione del polinomio A per il polinomio B dove:

1. $A = 4x^3 - 2x^2 - x + 1,\quad B = x^2 - x - 1.\quad [C = 4x + 2,\ D = 5x + 3]$
2. $A = 3x^4 - 2x^2 + x,\quad B = x^2 - 2x + 1.\quad [C = 3x^2 + 6x + 7,\ D = 9x - 7]$
3. $A = -6x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 3\quad B = -3x^2 + 1.\quad [C = 2x^2 - x + 1,\ D = 2]$
4. $A = 6x^2 + x - 1,\quad B = 3x + 2.\quad [C = 2x - 1,\ D = 1]$
5. $A = x^2 + x - 2,\quad B = x^2 - x + 1.\quad [C = 1,\ D = 2x - 3]$
6. $A = 2x^3 - 4x^2 + x - 5,\quad B = x - 2.\quad [C = 2x^2 + 1,\ D = -3]$
7. $A = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},\quad B = \frac{1}{2}x + 1.\quad \left[C = 2x^2 - 1,\ D = -\frac{1}{2}\right]$
8. $A = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2,\quad B = \frac{1}{2}x^2 - 1.\quad \left[C = \frac{1}{2}x^2 + 2,\ D = \frac{1}{2}x\right]$
9. $A = x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2},\quad B = x^2 + \frac{1}{2}x + 1.\quad \left[C = x^2 - \frac{1}{2}x,\ D = -x + \frac{1}{2}\right]$
10. $A = 3x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2},\quad B = 2x - \frac{3}{2}.\quad \left[C = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3},\ D = 1\right]$
11. $A = 3x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2},\quad B = 3x^2 - \frac{1}{2}.$
12. $A = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1,\quad B = \frac{1}{4}x^2 - x + 1.$
13. $A = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4,\quad B = \frac{1}{2}x^2 - 2.$

6.1.5 La relazione A=BC+D, nel caso particolare in cui sia B=x+α, dove α è un numero razionale assegnato, diventa:

$$A = (x + \alpha)\,C + D.$$

Per cui, dovendo essere $g_D<1$, è certamente $g_D=0$. Come dire che D è un numero razionale.
È poi facile capire che, se nella precedente relazione si mette $-\alpha$ al posto di x, risulta D=A. Sicché si ha la seguente proprietà, nota come regola del resto.

♦ **REGOLA DEL RESTO**
Il resto della divisione di un polinomio A nell'indeterminata x per il binomio $x+\alpha$ è uguale al valore $A(-\alpha)$ che assume A quando al posto di x si sostituisce il valore $-\alpha$ (valore che annulla $x+\alpha$).

È allora evidente che se $A(-\alpha)=0$, per cui D=0, risulta:

$$A = (x + \alpha)\, C\,.$$

Dunque:

♦ **Quando $A(-\alpha)=0$, il polinomio A nell'indeterminata x è divisibile per $x+\alpha$..**

Questa proprietà va sotto il nome di **TEOREMA DI RUFFINI** [(1)].
Per la determinazione del polinomio C, il cui grado è evidentemente g_A-1, dove g_A è il grado di A, si può seguire ovviamente uno dei due procedimenti esposti prima.
Ma in questo caso è preferibile ricorrere ad un nuovo schema, noto come ***schema di Ruffini***, che semplifica ulteriormente il procedimento. Naturalmente con questo schema si trova anche il resto D della divisione. Ancora una volta illustriamo lo schema con un esempio.

- ESERCIZIO. Trovare il quoziente C e il resto D della divisione del polinomio A per il binomio B, sapendo che:

$$A = 3\,x^5 - 4\,x^4 + 6\,x^2 - 5\,, \quad B = x + 2\,.$$

RISOLUZIONE. Il resto si potrebbe trovare subito. Basta sostituire -2 al posto di x nel polinomio dividendo:

$$D = 3(-2)^5 - 4(-2)^4 + 6(-2)^2 - 5 = -141\,.$$

Lo ritroveremo comunque con lo schema di Ruffini, che andiamo a descrivere.
Anzitutto si dispone il calcolo secondo il seguente schema:

	3	**-4**	**0**	**6**	**0**	**-5**
-2						

dove, nella prima riga sono riportati i coefficienti del polinomio dividendo supposto ordinato secondo le potenze decrescenti dell'indeterminata, dopo aver completato con uno 0 ogni eventuale termine mancante; mentre il numero scritto a sinistra, nella seconda riga, è il valore per cui si annulla il binomio divisore x+2, per l'appunto il valore –2.
Dopo di ciò, come primo passo si riscrive il primo coefficiente, cioè 3, in colonna sotto la linea orizzontale e si moltiplica –2 per questo numero, riportando il prodotto ottenuto, cioè –6, sopra la linea orizzontale incolonnato col secondo coefficiente:

	3	**-4**	**0**	**6**	**0**	**-5**
-2		**-6**				
	3					

Dopo aver sommato –4 e –6 e dopo aver riportato in colonna, sotto la linea orizzontale, la somma ottenuta,

[1] **Ruffini**, Paolo, matematico italiano, 1765-1822.

cioè -10, si ripete con questo numero quanto fatto prima con 3; vale a dire: si moltiplica -2 per -10, il prodotto ottenuto, cioè 20, si scrive incolonnato sotto il secondo coefficiente, eccetera. Si procede così fino all'ultimo coefficiente del polinomio dividendo, collocato alla destra della seconda linea verticale, cioè, nel caso in esame, -5.
Lo schema completo è il seguente:

	3	-4	0	6	0	-5
-2		-6	20	-40	68	-136
	3	-10	20	-34	68	-141

I numeri all'interno delle due linee verticali e al di sotto della linea orizzontale, sono i coefficienti del polinomio quoziente ordinato secondo le potenze decrescenti dell'indeterminata. Il numero esterno è il resto. Pertanto:

$$C = 3\,x^4 - 10\,x^3 + 20\,x^2 - 34\,x + 68\,, \quad D = -141\,.$$

A riprova di ciò, puoi verificare che, di fatto, risulta:

$$(x+2)(3\,x^4 - 10\,x^3 + 20\,x^2 - 34\,x + 68) + (-141) = 3\,x^5 - 4\,x^4 + 6\,x^2 - 5\,.$$

6.1.6 ESERCIZI DA RISOLVERE.

Esegui le seguenti divisioni utilizzando lo schema di Ruffini (nn. 1-10):

1. $(2x^3 - 3x^2 + x - 2):(x-1)$. $\quad [C = 2x^2 - x,\ \ D = -2]$
2. $(x^4 - 2x^2 - x + 3):(x+2)$. $\quad [C = x^3 - 2x^2 + 2x - 5,\ \ D = 13]$
3. $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right):\left(x + \frac{1}{2}\right)$. $\quad \left[C = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3},\ \ D = -\frac{1}{3}\right]$
4. $\left(\frac{2}{3}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}\right):(x-2)$. $\quad \left[C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3},\ \ D = \frac{19}{6}\right]$
5. $(x^3 - 2x^2 + 3):\left(x - \frac{1}{2}\right)$. $\quad \left[C = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4},\ \ D = \frac{21}{8}\right]$
6. $(3x^4 + x^3 - x^2 - 1):(x+1)$.
7. $(x^3 - x^2 + 3x - 6):(x-2)$.
8. $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2\right):\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
9. $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right):(x+2)$.
10. $(x^4 - x^2 + 2):\left(x + \frac{2}{3}\right)$.
11. Esprimi con una formula algebrica la seguente proposizione:
    a) Il quoziente ed il resto della divisione del polinomio $4x^3-2x^2-x+1$ per il polinomio x^2-x-1 sono rispettivamente $4x+2$ e $5x+3$.
    b) Se si divide il polinomio $x^3-2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ per il polinomio $\frac{1}{2}x+1$ si ottiene il quoziente $2x^2-1$ ed il resto $-\frac{1}{2}$.
    c) Il numero 1 ed il binomio $2x-3$ sono rispettivamente il quoziente e il resto della divisione di x^2+x-2 per x^2-x+1.
12. Trova un polinomio di 2° grado ed uno di 3° grado nell'indeterminata x divisibili per:
    a) $x-1$; b) $x+1$; c) $x-1/2$.

6.2 FRAZIONI ALGEBRICHE. FATTORIZZAZIONE DI UN POLINOMIO

6.2.1 Assieme ai polinomi è utile considerare una nuova categoria di espressioni letterali, dette **frazioni algebriche**. Si tratta di espressioni come queste:

$$\frac{x+1}{x-1},\quad \frac{a+b}{2a},\quad \frac{a^3-1}{a-1},\quad \frac{1}{x^2+1},$$

ottenute effettuando il rapporto di due polinomi.

Per esse, affinché non perdano di significato, bisogna escludere gli eventuali valori numerici che, sostituiti alle lettere, rendono nullo il denominatore.

Così, per esempio, per la prima frazione algebrica considerata bisogna escludere il valore $x=1$, per la seconda il valore $a=0$, per la terza il valore $a=1$. La quarta espressione è invece valida per ogni x reale, dal momento che il polinomio x^2+1 non si annulla per alcun x reale.

Questo fatto nel seguito sarà sottinteso ma resterà ugualmente valido.

Anche un polinomio P può essere considerato come una particolare frazione algebrica; quella di questo tipo: $\frac{P}{1}$. Per cui, per esempio:

$$x+1=\frac{x+1}{1},\quad a^3-ab^2+b^3=\frac{a^3-ab^2+b^3}{1}.$$

6.2.2 Con le frazioni algebriche si opera allo stesso modo che con le frazioni numeriche:

- una frazione può essere ridotta ai minimi termini;
- due frazioni si possono addizionare, moltiplicare, sottrarre, dividere;
- una frazione può essere elevata a potenza.

L'unica differenza è che adesso i termini delle frazioni (che continuiamo a chiamare *numeratore* e *denominatore*) non sono numeri determinati ma polinomi.

Questo, purtroppo, crea una complicazione. Siccome, infatti, per le operazioni suddette si ha spesso a che fare con il M.C.D. (*massimo comune divisore*) e con il m.c.m. (*minimo comune multiplo*), occorre saper calcolare questi con riferimento a polinomi anziché a numeri naturali.

Ora, ricorderai certamente dai tuoi studi precedenti che, a proposito dei numeri naturali, la ricerca del M.C.D. e del m.c.m. è stata fatta ricorrendo al cosiddetto metodo della "fattorizzazione". Ebbene, riguardo ai polinomi, è proprio al *metodo della fattorizzazione* che faremo ricorso.

Esso presuppone, chiaramente, che si sappia fattorizzare (cioè scomporre in prodotto di fattori) un polinomio. Di modo che ci vediamo costretti ad abbandonare per un momento le frazioni algebriche per occuparci di questa nuova questione, indispensabile per operare appunto con le frazioni algebriche.

6.2.3 La **fattorizzazione di un polinomio** consiste nel determinare altri polinomi il cui prodotto sia uguale identicamente al polinomio assegnato.

Precisiamo anzitutto un concetto che in verità abbiamo già utilizzato nelle pagine precedenti:

Due polinomi si dicono ***identicamente uguali*** se assumono gli stessi valori per tutti i valori che si possono attribuire alle lettere che figurano in essi.

Per esempio, sono identicamente uguali i polinomi $(a+b)^2$ ed $a^2+2ab+b^2$: del resto il secondo si ottiene sviluppando il primo. Non lo sono invece i polinomi $a+b$ ed $a+2b$: infatti, per $a=1$ e $b=1$, il primo assume valore 2 ed il secondo valore 3.

Ribadiamo che i polinomi coinvolti possono avere valori in ℝ. Noi, tuttavia, continueremo a supporre che essi assumano valori in ℚ quando alle lettere che compaiono si attribuiscono valori comunque scelti in ℚ. In qualche circostanza, tuttavia, prenderemo in considerazione anche valori presi in ℝ.
Allo scopo di fissare meglio questo concetto, consideriamo il polinomio x^2-2. Esso si può mettere in questa forma: $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ se si ammettono polinomi con valori in ℝ. Non si può, invece, ulteriormente fattorizzare se si accettano solo polinomi con valori in ℚ.

6.2.4 Per la fattorizzazione di un polinomio ci tornano utili quelle formule che riassumono la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e i prodotti notevoli, lette però scambiando reciprocamente i due membri di ciascuna di esse.
Per comodità riportiamo qui queste formule, scritte dopo aver effettuato lo scambio precisato:

- ♦ $\mathbf{AM+BM = (A+B)M}$. [RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE]
- ♦ $\mathbf{A^2-B^2 = (A+B)(A-B)}$. [DIFFERENZA DI DUE QUADRATI]
- ♦ $\mathbf{A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2}$. [QUADRATO DI UN BINOMIO]
- ♦ $\mathbf{A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC = (A+B+C)^2}$. [QUADRATO DI UN TRINOMIO]
- ♦ $\mathbf{A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = (A+B)^3}$. [CUBO DI UN BINOMIO]
- ♦ $\mathbf{A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)}$. [SOMMA DI DUE CUBI]

Qualche considerazione su queste formule fondamentali.

- La prima di esse non è altro che un modo diverso di leggere la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, ma spesso è citata come la **REGOLA DEL RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE** (o **DELLA MESSA IN EVIDENZA**).
  Si estende al caso in cui si ha la somma di più di due addendi. Così per esempio risulta:
  $$am+bm+cm+dm = (a+b+c+d)m\,.$$
  Altri esempi:
  $6x^2-3xy-3x = 3x(2x-y-1)$; $3a^4-2a^3+6a^2 = a^2(3a^2-2a+6)$;
  $8x^2y^2-4x^2y+6xy^2 = 2xy(4xy-2x+3y)$.
- La seconda formula permette di calcolare rapidamente e soprattutto mentalmente espressioni numeriche come le seguenti:
  $$39^2-38^2,\quad 40^2-38^2.$$
  Si ha infatti:
  $39^2-38^2=(39+38)(39-38)=77\cdot 1=77$;
  $40^2-38^2=(40+38)(40-38)=78\cdot 2=156$.
- Le quantità A, B, C, ... possono essere a loro volta dei polinomi. Per esempio:
  $$(a+b)(x+y)-(a-2b)(x+y) = [(a+b)-(a-2b)](x+y) = 3b(x+y).$$
  Altri esempi:
  $2a(3x-y)-2b(3x-y) = 2(3x-y)(a-b)$.
  $(x+2y)(2a-3b)-(x+2y)(a+3b) = (x+2y)[(2a-3b)-(a+3b)] = a(x+2y)$.
  $(2a-3b)(x+y)-(2a-3b)(2x+y-1)+(2a-3b)(-2x-3y+2) =$
  $= (2a-3b)[(x+y)-(2x+y-1)+(-2x-3y+2)] = (2a-3b)(x+y-2x-y+1-2x-3y+2) =$
  $= (2a-3b)(-3x-3y+3) = 3(2a-3b)(-x-y+1)$.

- La terza delle formule considerate, se al posto di B si mette –B, risulta scritta in questo modo:

$$A^2 - 2\,A\,B + B^2 = (A - B)^2\,.$$

Analogo discorso si può fare per le altre formule, in particolare per le ultime due, che sei invitato a scrivere ponendo per l'appunto –B al posto di B.

Alcuni esempi:

$$4a^2-4a+1 = (2a-1)^2,\ \ x^2+4y^2+1-2x+4xy-4y = (x+2y-1)^2,$$
$$27a^3-27a^2+9a-1 = (3a-1)^3,\ \ x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)\,.$$

Purtroppo le formule suddette, da sole, non sono sufficienti a fattorizzare un qualsiasi polinomio. E ciò perché, in realtà, non esistono regole o schemi fissi da seguire in generale. Ma volta per volta bisogna saper riconoscere a quale delle formule è opportuno ricorrere e con quali artifici di calcolo. Inoltre, non è detto che un qualunque polinomio si debba poter fattorizzare o quantomeno non è detto che vi si debba riuscire ricorrendo alle formule considerate.
Diciamo tutto questo per far comprendere quali difficoltà presenti l'operazione di scomposizione di un polinomio in fattori. L'esercizio e l'esperienza che da quello derivano sono il miglior rimedio per riuscire a superarle. Oltre, naturalmente, alle capacità intuitive e logico-deduttive.
Gli esempi che seguono non esauriscono certamente la casistica possibile. Essi hanno soltanto lo scopo di fornirti qualche elemento in più per orientarti.
Anche per la fattorizzazione dei polinomi, comunque, tornano comode le calcolatrici simboliche.

ESEMPI.

- Il polinomio a^2-3b^2 non si può scomporre in prodotto di polinomi con valori in $\mathbb{Q}$. È invece:

$$a^2-4b^2 = (a+2b)(a-2b)\,.$$

Lo stesso polinomio a^2-3b^2 si può però scomporre in prodotto di polinomi con valori in $\mathbb{R}$. Si ha infatti:

$$a^2-3b^2 = \left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right).$$

- Il polinomio x^2-3x+9 non si può scomporre in prodotto di polinomi con valori in $\mathbb{Q}$. È invece:

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2\,.$$

- Il polinomio a^4+b^4 non si può scomporre in prodotto di polinomi con valori in $\mathbb{Q}$. È invece:

$$a^4+4b^4 = a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)\,.$$

Lo stesso polinomio a^4+b^4 si può scomporre in prodotto di polinomi con valori in $\mathbb{R}$. Si ha infatti:

$$a^4+b^4 = a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2-\left(ab\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2+b^2+ab\sqrt{2}\right)\left(a^2+b^2-ab\sqrt{2}\right).$$

- Si ha:

$$am+an+bm+bn = (a+b)m+(a+b)n = (a+b)(m+n)\,.$$

Questo procedimento è chiamato **CRITERIO DEL DOPPIO RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE**.

Qualche altro esempio in proposito:

$$x^3-x^2y-a^2x+a^2y = x^2(x-y) - a^2(x-y) = (x^2-a^2)(x-y) = (x+a)(x-a)(x-y)\,.$$
$$(2x-y)^3+4x^2(2x-y) - y^2(2x-y) = (2x-y)[(2x-y)^2+4x^2-y^2] =$$
$$= (2x-y)^2(4x^2-4xy+y^2+4x^2-y^2) = (2x-y)^2(8x^2-4xy) = (2x-y)\cdot 4x(2x-y) = 4x(2x-y)\}\,.$$

- Si ha:

$$a^2-b^2-4b-4 = a^2 - (b^2+4b+4) = a^2 - (b+2)^2 = (a+b+2)(a-b-2)\,.$$

Sullo stesso genere:

$$4x^2-4y^2+4y-1 = 4x^2 - (4y^2-4y+1) = 4x^2 - (2y-1)^2 = (2x+2y-1)(2x-2y+1)\,.$$

$9a^2-9b^2-12a+4 = (9a^2-12a+4) - 9b^2 = (3a-2)^2 - 9b^2 = (3a+3b-2)(3a-3b-2)$.
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-8 = (a+b)^3 - 2^3 = [(a+b)-2][(a+b)^2+2(a+b)+4] =$
$= (a+b-2)(a^2+2ab+b^2+2a+2b+4)$.

- Si ha:
$$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) .$$
Dello stesso tipo:
$256-a^8b^8 = (16-a^4b^4)(16+a^4b^4) = (4-a^2b^2)(4+a^2b^2)(16+a^4b^4) =$
$= (2-ab)(2+ab)(4+a^2b^2)(16+a^4b^4)$.
Questo se la fattorizzazione è fatta in $\mathbb{Q}$. Se invece fosse fatta in $\mathbb{R}$, si potrebbe ulteriormente fattorizzare l'ultimo fattore, essendo:
$$16+a^4b^4 = (4+a^2b^2)^2-\left(2ab\sqrt{2}\right)^2 = \left(4+a^2b^2+2ab\sqrt{2}\right)\left(4+a^2b^2-2ab\sqrt{2}\right) .$$
- Consideriamo la seguente espressione algebrica:
$$(x+2)^3 + x^2(x+2) - 4(x+2).$$
Facciamo vedere come si possa giungere ad una sua fattorizzazione seguendo due vie diverse. Col primo procedimento la fattorizzazione sarà seguita da una elaborazione interna ai vari fattori; col secondo ad una elaborazione dell'espressione seguirà la fattorizzazione.
1) $(x+2)^3 + x^2(x+2) - 4(x+2) = (x+2)[(x+2)^2+x^2-4] = (x+2)(x^2+4x+4+x^2-4) =$
$= (x+2)(2x^2+4x) = 2x(x+2)(x+2) = 2x(x+2)^2$.
2) $(x+2)^3 + x^2(x+2) - 4(x+2) = x^3+6x^2+12x+8+x^3+2x^2-4x-8 = 2x^3+8x^2+8x =$
$= 2x(x^2+4x+4) = 2x(x+2)^2$.
In queste situazioni di norma non c'è una preferenza di un metodo sull'altro e bisogna valutare caso per caso.
- Si ha:
$$a^4-8a^2+16 = (a^2-4)^2 = [(a+2)(a-2)]^2 = (a+2)^2\,(a-2)^2 .$$
Dello stesso genere:
$$x^6-2x^3y^3+y^6 = (x^3-y^3)^2 = [(x-y)(x^2+xy+y^2)]^2 = (x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2 .$$

6.2.5 Qualche volta può risultare utile saper fattorizzare un trinomio di questo particolare tipo:
$$x^2 + (a + b)\,x + a\,b .$$
Si ha:
$$x^2+(a+b)x+ab = x^2+ax+bx+ab = x(x+a)+b(x+a) = (x+a)(x+b) .$$
Si tratta quindi **di trovare due numeri che hanno per somma il coefficiente di x e per prodotto il termine noto**. Ecco alcuni esempi limitati a casi semplici:
$$x^2+5x+6 = x^2 + (2+3)x + 2\cdot 3 = (x+2)(x+3) .$$
$$x^2-x-6 = x^2 + (2-3)x + 2\cdot(-3) = (x+2)(x-3) .$$
$$x^2+2x-3 = x^2 + (3-1)x + 3\cdot(-1) = (x+3)(x-1) .$$
$$x^2-4x+3 = x^2 + (-3-1)x +(-3)(-1) = (x-3)(x-1) .$$
Ci sembra, tuttavia, interessante far rilevare come questi stessi trinomi si possano fattorizzare in altro modo mediante un semplice artificio. Andiamo a vedere in che modo, limitandoci ai primi due trinomi e lasciando a chi legge gli altri due:
$$x^2+5x+6=x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)=(x+2)(x+3).$$

$$x^2-x-6=x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)=(x-3)(x+2).$$

6.2.6 ESERCIZI DA RISOLVERE.

A) Stabilisci quali dei seguenti polinomi si possono scomporre in prodotti di polinomi con coefficienti in $\mathbb{Q}$:

1. a^2+b^2; $\quad 4a^2-1$; $\quad a^2-3$.
2. a^2-ab+b^2; $\quad a^2+2ab+b^2$; $\quad a^2-4b^2$.
3. $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$; $\quad \frac{1}{9}a^2-b^2$; $\quad \frac{1}{4}a^4+b^4$.

B) Scomponi in prodotti di polinomi con coefficienti in $\mathbb{Q}$ i seguenti polinomi:

1. $ax+ay$; $\quad ax+bx+cx$; $\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x$.
2. $2x^3+4x^2+2x$; $\quad x^3y^2-\frac{1}{2}x^2y^3$; $\quad x^3-x^2y+xy^2$.
3. $a(x+y)-b(x+y)$; $\quad (a+b)^2-2(a+b)$.
4. $(+x+y)^3+x(x+y)^2+(x+y)^2$; $\quad (a+b)^2(x-y)-(a+b)(x-y)^2$.
5. $\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{2}{3}a+b\right)-\left(\frac{1}{2}b-a\right)\left(a+\frac{2}{3}b\right)$; $\quad (a-2b)(a+b)^2-(a-2b)^2(a+b)$.
6. $am+bn+an+bm$; $\quad ax+2a+2b+bx$.
7. ax^2+bx^2+a+b; $\quad a^3+a^2+a+1$.
8. $2ax+2ay-bx-by$; $\quad x^2-\frac{1}{2}xy+2xy-y^2$.
9. $x^2+ax+bx+ab$; $\quad x^2+(a+b)x+ab$.
10. $x^2+(2+3)x+2\cdot 3$; $\quad x^2+(-1+2)x+(-1)\cdot 2$.
11. x^2+5x+6; $\quad x^2+x-2$.
12. x^2+3x+2; $\quad x^2-x-2$.
13. x^2+x-6; $\quad x^2-3x-4$.
14. $x^2-7x+10$; $\quad x^2-3x-10$.
15. x^2-5x-4; $\quad x^2+5x+4$.
16. a^2-1; $\quad x^2-y^2$; $\quad 4x^2-\frac{1}{9}$; $\quad \frac{1}{4}x^2-1$.
17. $(a+b)^2-c^2$. [**R.** $(a+b+c)(a+b-c)$]
18. $x^2-(a-1)^2$. [**R.** $(x+a-1)(x-a+1)$]
19. $4a^2-(2x-y)^2$. [**R.** $(2a+2x-y)(2a-2x+y)$]
20. $2(x-y)^2-8z^2$. [**R.** $2(x-y+2z)(x-y-2z)$]
21. a^4-1. [**R.** $(a-1)(a+1)(a^2+1)$]
22. a^4-16b^4. [**R.** $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$]
23. a^2-b^2+a-b. [**R.** $(a-b)(a+b+1)$]
24. $2x^2-\frac{1}{2}y^2$. [**R.** $\frac{1}{2}(2x+y)(2x-y)$]
25. x^3-x^2-x+1. [**R.** $(x+1)(x-1)^2$]
26. $\frac{1}{2}a^2-8b^2$. [**R.** $\frac{1}{2}(a-4b)(a+4b)$]

27. $ax^2 - ay^2 + ax - ay$; $x^3 - xy^2 - x + xy$.
28. $(x+y)^4 - x + y^2$; $(2a+b)^3 - 2a - b$.
29. $x^6 + x^5 - x^2 - x$; $a^5 + a^4 - a - 1$.
30. $a^2 + 2a + 1$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 + x + \frac{1}{4}$.
31. $x^2 - x + \frac{1}{4}$; $4x^2 - 4x + 1$; $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$.
32. $-x^2 - x - 1$; $-\frac{1}{9}a^4 + \frac{2}{3}a^2 - 1$; $-x^4 - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{9}y^2$.
33. $x^3 - 2x^2y + xy^2$. [**R.** $x(x-y)^2$]
34. $x^2 - y^2 - 2y - 1$. [**R.** $(x+y+1)(x-y-1)$]
35. $x^2 - \frac{1}{4}y^2 + y - 1$. [**R.** $\frac{1}{4}(2x+y-2)(2x-y+2)$]
36. $a^4 - 2a^2 + 1$. [**R.** $(a-1)^2(a+1)^2$]
37. $x^2 + 2x + 1 - xy - y$. [**R.** $(x+1)(x-y+1)$]
38. $\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^2 - x^2y^2 - xy^2 - \frac{1}{4}y^2$. [**R.** $\frac{1}{16}(2x+1)^2(2x+2y+1)(2x-2y+1)$]
39. $x^2 + 4y^2 + 4xy - 4$. [**R.** $(x+2y+2)(x+2y-2)$]
40. $4a^2x - 4abx + b^2x - 8a^2y + 8aby - 2b^2y$. [**R.** $(x-2y)(2a-b)^2$]
41. $a^2 + b^2 + 2ab - 1$; $5a^2b^2 - 20b^4 + ab^2 + 2b^3$.
42. $a^6 + 3a^4 + a^2 + 1$; $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$.
43. $x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{64}$. [**R.** $\frac{1}{64}(2x-1)^3(2x+1)^3$]
44. $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3$. [**R.** $x^3(x-1)^3(x+1)^3$]
45. $a^6b^3 + 3a^5b^2 + 3a^4b + a^3$. [**R.** $a^3(ab+1)^3$]
46. $27a^3x^3 - 9a^2x^3 + ax^2 - \frac{1}{27}x^3$. [**R.** $\frac{1}{27}x^3(9a-1)^3$]
47. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$; $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.
48. $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2xy - 8x + 2y + 4$; $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - xy + 2x - y + 1$.
49. $a^3 + 1$; $a^3 - 1$; $\frac{1}{27} + x^3$; $\frac{1}{27} - x^3$.
50. $\frac{27}{8} + \frac{8}{27}x^3$; $\frac{27}{8} - \frac{8}{27}x^3$; $\frac{1}{8}x^3a^6 + 1$; $\frac{1}{8}x^3a^6 - 1$.
51. $a^6 - b^6$. [**R.** $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$]
52. $a^3 - b^3 + a^2 - b^2$. [**R.** $(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b)$]
53. $x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3$. [**R.** $(x+y)(x^2-3xy+y^2)$]
54. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 1$. [**R.** $(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$]
55. $ax^2 - ay^2 + x^3 - y^3$. [**R.** $(x+y-1)(ax+ay+x^2+xy+y^2)$]

C) Laboratorio di matematica.

Sai fattorizzare i polinomi x^2-y^2 e x^3-y^3. Sai precisamente che si ha:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Ti invitiamo a verificare che si ha inoltre:

$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3).$$

Prova a generalizzare, fino a fattorizzare il polinomio $x^n - y^n$, qualunque sia l'intero positivo n. Discutine con i tuoi compagni e, se del caso, chiedete suggerimenti al professore.

D) ESERCIZIO RISOLTO. Dimostrare che se al numero naturale N si somma un numero naturale divisibile per il numero naturale a, ottenendo così il numero M, i numeri N ed M, divisi per a, danno lo stesso resto.

RISOLUZIONE. Un numero naturale divisibile per a è del tipo ka, dove k è un numero naturale. Quindi: M=N+ka. Ora, se indichiamo con r il resto della divisione di N per a, deve essere: N=pa+r, dove p è un numero naturale. Pertanto: M=(pa+r)+ka=(p+k)a+r. Essendo certamente p+k un numero naturale, si desume che il resto della divisione di M per a è ancora r. [c.v.d.]

6.3 M.C.D. e m.c.m. di polinomi. Operazioni con le frazioni algebriche.

6.3.1 Per la ricerca del M.C.D. e del m.c.m. di due o più polinomi, una volta che questi siano stati scomposti in prodotti di fattori, si opera come nel caso dei numeri naturali. Con l'aggiunta delle seguenti convenzioni:

- il fattore numerico del M.C.D. e del m.c.m. dei polinomi si considera positivo;
- se nella scomposizione tutti i fattori numerici sono interi, si assume come fattore numerico del M.C.D. e del m.c.m. dei polinomi il M.C.D. e il m.c.m. rispettivamente dei fattori numerici dei polinomi scomposti; altrimenti tale fattore numerico si assume uguale ad 1.

♦ ESERCIZIO. Calcolare il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di polinomi:

$$1)\ -2a^2 - 4ab - 2b^2,\quad 8a^2 - 8b^2,\quad 12a^3 + 12b^3; \qquad 2)\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b,\ \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b,\ a^2 - b^2.$$

RISOLUZIONE.

1) Anzitutto fattorizziamo i polinomi assegnati:

$$-2a^2 - 4ab - 2b^2 = -2(a^2 + 2ab + b^2) = -2(a+b)^2\ ;$$
$$8a^2 - 8b^2 = 8(a^2 - b^2) = 8(a+b)(a-b)\ ;$$
$$12a^3 + 12b^3 = 12(a^3 + b^3) = 12(a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Adesso, tenendo presente quanto detto prima, si ha:

$$\text{M.C.D.} = 2(a+b)\ ; \qquad \text{m.c.m.} = 24\,(a+b)^2\,(a-b)\,(a^2 - ab + b^2)\ .$$

2) Come sopra, dapprima fattorizziamo i polinomi assegnati:

$$\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b) = \frac{3}{2}(a-b);\ \ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}(a+b);\ \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b.)$$

Dunque:

$$\text{M.C.D.} = 1\ ; \qquad \text{m.c.m.} = (a+b)(a-b)\ .$$

6.3.2 ESERCIZI DA RISOLVERE. Trova il **M.C.D.** e il **m.c.m.** dei seguenti gruppi di polinomi:

1. $\frac{1}{2}x^3y^2x, \quad -3xy, \quad -\frac{2}{3}xy^2z, \quad -\frac{2}{3}x^2yz^2.$ [**R.** $xy;\ \ x^3y^3z^2$]
2. $4a^2bx, \quad -2ax^2y, \ \ 2by^2, \quad -6abx^2.$ [**R.** $2;\ \ 12a^2b\,x^2y^2$]
3. $x^2 + x, \ \ x^3y, \ \ xy^2 - x.$ [**R.** $x;\ \ x^3y(x+1)(y+1)(y-1)$]

4. $\frac{1}{2}x^2y,\ 2xy^2,\ x^2-y^2.$ [**R.** $1;\quad x^2y^2(x+y)(x-y)$]
5. $x^2-1,\ x^2+2x+1,\ x^3+1.$ [**R.** $x+1;\quad (x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$]
6. $x^2+1,\ x^2+x,\ x^3+x^2.$ [**R.** $1;\quad x^2(x^2+1)(x+1)$]
7. $x^2+1,\ x^4-1,\ x^4+2x^2+1.$ [**R.** $x^2+1;\quad (x^2+1)^2(x^2-1)$]
8. $x^3-3x^2+3x-1,\ x^3-1,\ x^2-1.$ [**R.** $x-1;\quad (x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$]
9. $x^3+3x^2+3x+1,\ x^3+x^2+x+1.$ [**R.** $x+1;\quad (x+1)^3(x^2+1)$]
10. $x^2-x-6,\ x^2-6x+9,\ x^2+4x+4.$ [**R.** $1;\quad (x-3)^2(x+2)^2$]
11. $x^2-2x-8,\ x^2+x-2,\ x^2-4.$ [**R.** $x+2;\quad (x+2)(x-1)(x-2)(x-4)$]
12. $\frac{1}{27}+x^3,\ \frac{1}{9}+\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{9}-x^2.$ [**R.** $1+3x;\quad (1+3x)(1-3x)(1-3x+9x^2)$]
13. $x^4-2x^2+1,\ x^4-1,\ x^3+2x^2-x-2.$ [**R.** $(x+1)(x-1);\quad (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)(x+2)$]
14. $x^3-x^2-2x+2,\ x^3-x^2+x-1.$ [**R.** $x-1;\quad (x-1)(x^2-2)(x^2+1)$]
15. $x^3+2x^2-4x-8,\ x^3-2x^2-4x+8.$ [**R.** $(x+2)(x-2);\quad (x+2)^2(x-2)^2$]
16. $a^2-5a+6,\ a^2-3a+2,\ a^2-4a+3.$
17. $ax-2bx-ay+2by,\ ax-2bx,\ a^2-4b^2.$
18. $a^4-4b^4,\ a^3+2ab^2,\ a^4+4a^2b^2+4b^4.$
19. $a^4-2a^2+1,\ a^3+a^2-a-1,\ a^3-a^2-a+1.$

6.3.3 A questo punto abbiamo tutti gli elementi per operare con le frazioni algebriche.
Solo a titolo di esempio presentiamo alcuni esercizi sull'argomento, che riteniamo non abbia bisogno di ulteriori spiegazioni, in quanto tutto si svolge, sul piano concettuale, come con le frazioni numeriche.

- ESERCIZIO 1. Riduci ai minimi termini la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}.$$

RISOLUZIONE.

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

- ESERCIZIO 2. Esegui le seguenti operazioni:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{2x-3}{x};\quad \frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1};\quad \frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{2x+4}{x^3-1};\quad \frac{x^2+4x+4}{3x}:\frac{x^2-4}{x-1};\quad \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-2}.$$

RISOLUZIONE.

$$\frac{x-1}{x}+\frac{2x-3}{x}=\frac{x-1+2x-3}{x}=\frac{3x-4}{x}.$$

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{x(x+1)-2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x^2+x)-(2x^2-2x)}{x^2-1}=\frac{-x^2+3x}{x^2-1}.$$

$$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{2x+4}{x^3-1}=\frac{(x+1)(x-1)\cdot 2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2x+2}{x^2+x+1}.$$

$$\frac{x^2+4x+4}{3x}:\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{(x+2)^2}{3x}\cdot\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+2)(x-1)}{3x(x-2)}=\frac{x^2+x-2}{3x^2-6x}.$$

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-2}=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2=\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1}.$$

- ESERCIZIO 3. Semplifica la seguente espressione algebrica:

$$\frac{ax+ab}{a+b}:\frac{a-b}{x^2}-\frac{ax^3}{a^2-b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}.$$

RISOLUZIONE.

$$\frac{ax+ab}{a+b}:\frac{a-b}{x^2}-\frac{ax^3}{a^2-b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}=\frac{a(x+b)}{a+b}\cdot\frac{x^2}{a-b}-\frac{ax^3}{a^2-b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{ax^2(x+b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{ax^3}{a^2-b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}=\frac{ax^3+ax^2b}{a^2-b^2}-\frac{ax^3}{a^2-b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{ax^2b+a^2x^2}{a^2-b^2}=\frac{ax^2(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{ax^2}{a-b}.$$

- ESERCIZIO 4. Semplifica la seguente espressione algebrica:

$$\left(\frac{2x-y}{x-y}-2\right)\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right)+\frac{x-y}{y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}:\frac{x}{x-y}.$$

RISOLUZIONE.

$$\left(\frac{2x-y}{x-y}-2\right)\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right)+\frac{x-y}{y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}:\frac{x}{x-y}=$$

$$=\frac{2x-y-2x+2y}{x-y}\cdot\frac{x+y-x+y}{x+y}+\frac{x-y}{y}-\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x-y}{y}=$$

$$=\frac{y}{x-y}\cdot\frac{2y}{x+y}+\frac{x-y}{y}-\frac{x^2+y^2}{(x+y)y}=\frac{2y^2}{(x-y)(x+y)}+\frac{x-y}{y}-\frac{x^2+y^2}{(x+y)y}=$$

$$=\frac{2y^3+(x-y)(x-y)(x+y)-(x^2+y^2)(x-y)}{y(x+y)(x-y)}=\frac{-2xy^2+4y^3}{y(x+y)(x-y)}=\frac{-2xy+4y^2}{x^2-y^2}.$$

6.3.4 ESERCIZI DA RISOLVERE.

A) Rendi irriducibili le seguenti frazioni algebriche:

1.	$\frac{2x+4}{3x+6}$;		$\frac{3x+4}{6x+8}$;	$\frac{x^2}{x^2-x}$.
2.	$\frac{2x^2-4x}{2x^2}$;		$\frac{x^2-1}{x-1}$;	$\frac{x+1}{x^2-1}$.
3.	$\frac{x^2-4}{4x+8}$;		$\frac{4x^2-1}{8x+4}$;	$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.
4.	$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$;		$\frac{x^2+1}{x^4-1}$;	$\frac{x^4-1}{x^2+1}$.

5.	$\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-1}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2+1}{x^2-1}\right]$;	$\frac{x^3+1}{x^2+2x+1}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2-x+1}{x+1}\right]$
6.	$\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x-1}{x^2+x+1}\right]$;	$\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x-2}{x+1}\right]$
7.	$\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x+2}{x-3}\right]$;	$\frac{2x^3-x^2}{4x^3-4x^2+x}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x}{2x-1}\right]$
8.	$\frac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x-1}{x+1}\right]$;	$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x+2}$,	$[\mathbf{R.}\ x-1]$
9.	$\frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+x-2}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2-4x}{x-1}\right]$;	$\frac{1-x^2}{x^2-3x+2}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{1+x}{2-x}\right]$
10.	$\frac{x^2-4x+4}{4-x^2}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{2-x}{2+x}\right]$;	$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x}$,	$\left[\mathbf{R.}\ \frac{x+2}{x}\right]$

B) Semplifica le seguenti espressioni:

1. $\frac{x^2-2}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$. $[\mathbf{R.}\ x-1]$
2. $\frac{x^2+4x}{x^2-1}+\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{3x-3}{x^2-1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x+1}{x-1}\right]$
3. $\frac{2}{x}+\frac{x-1}{2x}+\frac{5x-3}{2x}$. $[\mathbf{R.}\ 3]$
4. $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2-x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2x}{x-1}\right]$
5. $x+2+\frac{2-x^2}{x-1}+\frac{2}{x}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2+2x-2}{x^2-x}\right]$
6. $\frac{2-x}{x^2-4x+4}-\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2+x}{2-x}\right]$
7. $\frac{2x+1}{x^2-4}+\frac{2x-1}{x^2+4x+4}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4(x^2+1)}{(x-2)(x+2)^2}\right]$
8. $\frac{2x+1}{x-1}-\frac{1-2x}{x+1}+\frac{2(4x+1)}{x^2-1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4x+4}{x-1}\right]$
9. $\frac{x-1}{x}\cdot\frac{2x^2}{x^2-2x+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2x}{x-1}\right]$
10. $\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x-2}{x+1}\right]$
11. $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right]$
12. $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right]$
13. $\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x+2}{x^2-1}\right)^2\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4x^2}{x^2+1}\right]$
14. $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-\frac{2x-1}{x-x^2}\right)^2:\left(2-\frac{2x-4}{x^2+x-2}\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2x+4}{x-1}\right]$
15. $\left[\left(2+\frac{3}{x-1}\right)^2-\left(2-\frac{1}{x+1}\right)^2\right]:\left(2+\frac{x+2}{x^2-1}\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{8x+4}{x^2-1}\right]$
16. $\left[1-\frac{5(2x-1)}{x^2+4x+4}\right]:\left[\left(1-\frac{6}{x+3}\right):\left(1+\frac{4}{x-2}\right)\right]$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{x^2-9}{x^2-4}\right]$
17. $\left[x+2+\frac{3(x-1)}{(x-1)^2}\right]:\left(x+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^3+1}{x^2+x+1}$. $[\mathbf{R.}\ x+1]$
18. $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2-2x+1}\right)-\left(\frac{x+1}{2}+\frac{x-2}{2x^2-2x}\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1+x}{2-2x}\right]$
19. $\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+4}\right)\cdot\frac{x^3-2x^2+4x-8}{4}-\frac{4}{(x+2)^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2x}{x^2+4x+4}\right]$
20. $\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\frac{2(x-1)}{x^2+2x+1}-\frac{x}{x+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{1}{x+1}\right]$

21. $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}:\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x+1}.$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{x^3}{x+1}\right]$

22. $\left(\dfrac{x}{2x+1}+\dfrac{x}{2x-1}-\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\right):\dfrac{x}{2x^2-x-1}-\dfrac{x-1}{x}.$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{2(x-1)(x^2-x+1)}{x(2x-1)}\right]$

23. $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{x}}:\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x+1}}+\dfrac{2x+1}{x^2-1}.$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{x+1}{x-1}\right]$

24. $\left[\dfrac{x^2+1}{x-1}-(x+1)\right]:\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(x-1)\right]+\left(1+\dfrac{2}{x-3}\right)^{-1}.$ $[\textbf{R.}\ 2]$

25. $\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^2:\left(x-\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2-\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}.$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{3x^2+6x+3}{x^3-3x+2}\right]$

26. $\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-2}:\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right).$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{1}{x+1}\right]$

27. $\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right):\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{2}{x^2+1}.$ $[\textbf{R.}\ 1]$

28. $\left(x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}\right):\left(x-2+\dfrac{3}{x+1}\right)-\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-1}.$ $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{3x+3}{x-1}\right]$

VERIFICHE [2]

1. Senza eseguire la divisione, stabilisci se il polinomio $x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}$ è divisibile o no per i seguenti binomi:

   a) $x-\dfrac{1}{2}$; b) $x+\dfrac{1}{2}$; c) $x-1$; d) $x+1$; e) $x-\dfrac{1}{3}$; f) $x+\dfrac{1}{3}$.

2. Senza eseguire l'operazione, determina il resto delle seguenti divisioni:

   a) $(x^2-2x-2):(x+2)$; b) $(x^3-2x+1):(x-1)$; c) $(2x^3-3x^2+x-1):\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$;

   d) $(3x^2-2x+1):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$; e) $\left(\dfrac{1}{2}x^3-2x-3\right):\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$; f) $\left(3x^2-\dfrac{1}{3}x+2\right):\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

   [**R.** a) 6; b) 0; c) −1; …]

3. Per ciascuna delle seguenti espressioni trovare un monomio che, aggiunto ad essa, la faccia diventare il quadrato di un binomio:

   a) $4x^2+1$; $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}a^2$; $4x^2+2ax$.

   b) $\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x$; $\dfrac{1}{9}a^2-\dfrac{1}{3}ab$; $\dfrac{9}{16}y^2-6ay$.

   c) $\dfrac{1}{4}a^2-2ab^2$; $\dfrac{9}{4}x^2-xy^2$; $\dfrac{1}{9}a^2-2ab$.

4. Nel procedimento seguito per fattorizzare i seguenti polinomi sono stati commessi degli ERRORI. Indi-

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

viduarli e correggerli:

a) $2ax - 4bx + ay - 2by = a(2x+y) - 2b(2x-y) = (2x+y)(a-2b)$.

b) $2ax - bx - 4ay + 2by = x(2a-b) + 2y(2a-b) = (2a-b)x+2y$.

c) $4ax + 2bx + 2ay + by = 2x(2a+b)y(2a+b) = (2a+b)(2x+y)$.

d) $a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab) =$
$= (a+b)^2 (a-b)^2$.

e) $a^4 + 4b^4 = a^4 - 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 =$
$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = (a+b)^2 (a-b)^2$.

f) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1+x)(x^2+1-x) = (x+1)^2 (x-1)^2$.

g) $16x^4 + 4x^2 + 1 = 16x^4 + 8x^2 + 1 - 4x^2 = (4x^2+1)^2 - 4x^2 = (4x^2+1+2x)(4x^2+1-2x) =$
$= (2x+1)^2 (2x-1)^2$.

h) $x^2 - y^2 + 2y - 1 = x^2 - (y^2+2y-1) = x^2 - (y+1)^2 = (x+y+1)(x-y+1)$.

i) $a^4 - a^2 - 2a - 1 = a^4 - (a^2 - 2a + 1) = a^4 - (a+1) = (a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a+1)^2 (a-1)^2$.

5. Nel procedimento seguito per semplificare le seguenti espressioni sono stati commessi degli ERRORI. Individuarli e correggerli:

a) $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+1}$.

b) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{4x}{x^2-4} = \dfrac{x(x+2) - (x-1)(x-2) - 4x}{x^2-4} =$
$= \dfrac{x^2+2x-x^2+2x+x-2-4x}{x^2-4} = \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}$.

c) $\dfrac{x+1}{2x-1} - \dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{(x+1)(2x+1) - x - 1(2x-1)}{4x^2-1} =$
$= \dfrac{2x^2+x+2x+1-x-2x+1}{4x^2-1} = \dfrac{2x^2+2}{4x^2-1} = \dfrac{x^2+2}{2x^2-1}$.

d) $\dfrac{\frac{x+1}{x}}{x-1} = \dfrac{x+1}{x} \cdot (x-1) = \dfrac{x^2-1}{x} = x - 1$.

e) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1} \cdot (x-1)^2 = \dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x^2-1)} \cdot (x^2+1) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

6. Semplificare le seguenti espressioni e controllare l'esattezza del risultato mediante un idoneo software matematico:

1) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} - \dfrac{4ax}{x^2-a^2}$. $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{2x-2a}{x+a}\right]$

2) $\dfrac{2x+a}{a} - \dfrac{2a}{x+a} - \dfrac{2ax}{ax+a^2}$. $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{2x-a}{a}\right]$

3) $\dfrac{x+2a}{x^2-2ax-8a^2} - \dfrac{x+2a}{x^2+6ax+8a^2}$. $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{8a}{x^2-16a^2}\right]$

4) $\dfrac{a^2-x^2}{x^2-3ax+2a^2} - \dfrac{ax-2a^2}{x^2-4ax+4a^2}$. $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{2a+x}{2a-x}\right]$

5) $\dfrac{x^2-2ax}{x^2-a^2} \cdot \dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-3ax+2a^2} + \dfrac{a}{x-a}$. $\left[\textbf{R.}\ \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right]$

6) $\dfrac{3x^2-3ax}{x^2-4ax+4a^2}\cdot\dfrac{x^2-ax-2a^2}{x^2+2ax}-\dfrac{3a(4x-5a)}{x^2-4a^2}.$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{3x-6a}{x+2a}\right]$

7) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y}-\dfrac{x-2y}{x+2y}\right)\left(\dfrac{x}{4y}+\dfrac{y}{x}+1\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{2x+4y}{x-2y}\right]$

8) $\left(\dfrac{2x+y}{4x^2-4xy+y^2}+\dfrac{x-y}{y^2-4x^2}\right)\left(2x-\dfrac{10xy-y^2}{2x+7y}\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{2x^2+xy}{4x^2-4xy+y^2}\right]$

9) $\left(\dfrac{x-y}{4x^2-4xy+y^2}-\dfrac{x+y}{4x^2+4xy+y^2}\right):\left(\dfrac{y^2}{2y^2-8x^2}-\dfrac{y^2}{8x^2-2y^2}\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{2y}{4x^2-y^2}\right]$

10) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x}{y}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{y}{x}\right)-\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{x-y}{x+y}.$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{2x-y}{x}\right]$

11) $\left(\dfrac{x+y}{x^2+2xy-8y^2}-\dfrac{x+3y}{x^2+6xy+8y^2}\right)\left(\dfrac{x^2}{2y}+2(x+y)\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{x+2y}{x-2y}\right]$

12) $\left(\dfrac{x-y}{2x-y}-1\right):\left(\dfrac{x-2y}{x-y}-1\right)-\left(\dfrac{y}{y-2x}-\dfrac{3x^2-3xy}{2xy-y^2}\right).$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{2x-y}{y}\right]$

13) $\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{\dfrac{x^2}{y^2}-1}:\dfrac{\dfrac{x+y}{x}-1}{\dfrac{x-y}{y}+1}.$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{y}{x+y}\right]$

14) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}:\left(\dfrac{x+y}{x-y}-1\right)^2.$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{x^2+2xy+y^2}{4y^2}\right]$

15) $\left(\dfrac{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}-\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(\dfrac{x-y}{x+y}+1\right)^2.$ $\left[\mathbf{R.}\ \dfrac{4x-4y}{x+y}\right]$

7. Risolvere le seguenti questioni:

1) ® Dimostrare le seguenti proprietà dei ***numeri naturali*** nell'ordine in cui sono proposte:
   a) Il quadrato di un numero pari o dispari e rispettivamente un numero pari o dispari.
   b) Se il quadrato di un numero è pari o dispari, anche il numero è rispettivamente pari o dispari.
   c) Non esiste alcun numero dispari il cui doppio sia il quadrato di un numero.
   d) Non esistono due numeri dispari la somma dei cui quadrati sia il quadrato di un numero.

2) Ancora proprietà dei **numeri naturali**:
   a) Dimostrare che il prodotto di due numeri aventi entrambi la forma $4n+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale, è un numero avente la stessa forma.
   b) Si constata che i numeri 3 e 8 sono primi fra loro e che pure lo sono 8–3 e 8. Parimenti, si constata che 9 e 16 sono numeri primi fra loro e che lo sono pure 16–9 e 16. In generale: se a, b sono numeri naturali primi fra loro, con a<b, lo sono anche b–a e b. Fornire una dimostrazione di questo fatto. [**R.** Conviene ragionare per assurdo]

3) Il seguente procedimento è sbagliato. Trovare l'errore:
   a) $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1$, dove x è un qualsiasi numero reale.

b) $\sqrt{\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{a^2}+1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{a^2}+1\right)^2}=\dfrac{1}{a^2}+1$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo.

4) Scrivere le seguenti espressioni in forma “lineare” in modo da poterle immettere in una calcolatrice simbolica:

$$\text{a) } \frac{x^2-2x}{-\frac{1}{2}x+1}; \qquad \text{b) } \frac{\frac{1}{2}x-2}{x^2-\frac{1}{2}}; \qquad \text{c) } \frac{3}{2}x-2x\cdot\frac{1-x}{x+2}.$$

5) Scrivere l’espressione algebrica che traduce la seguente scrittura “lineare”, tenendo presente che “∗” rappresenta l’operazione di moltiplicazione:

a) $(b*(a+b)*(a+b)-2/3*a*a*a)/(2*a-b)$; b) $(a-b)/(2*a+b)-1/2*(a+2/3*b)$;

c) $((a-b)/(a*b))/((a+b)/(2*a-b))$.

6) Si può osservare che si ha:

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

Seguendo procedimenti analoghi, mettere nella forma $a(x+b)^2+c$, dove a, b, c sono numeri reali opportuni, i seguenti polinomi:

$$\text{a) } x^2+4x+4; \qquad \text{b) } 2x^2-4x+3; \qquad \text{c) } x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}; \qquad \text{d) } 3x^2+3x+1.$$

7) Il polinomio a^4+b^4, come abbiamo precisato qualche pagina addietro, non può essere fattorizzato nell’insieme ℚ dei razionali, mentre può esserlo nell’insieme ℝ dei reali. Ragionando alla stessa maniera, fattorizzare in ℝ i seguenti polinomi, precisando quali di essi sono fattorizzabili in ℚ e quali non lo sono:

$$\text{a) } a^4+1; \qquad \text{b) } x^4+4; \qquad \text{c) } \frac{1}{4}x^4+y^4; \qquad \text{d) } a^4+a^2+1; \qquad \text{e) } x^4+x^2+4.$$

8) ESERCIZIO RISOLTO. Si vuole scomporre il seguente polinomio:

$$x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)$$

in un prodotto di polinomi di 1° grado con coefficienti in ℚ. Un idoneo software matematico mostra che la fattorizzazione richiesta è la seguente:

$$(x-y)(y-z)(z-x).$$

Descrivere i passaggi algebrici necessari per ottenere il risultato indicato.

RISOLUZIONE. Dopo avere sviluppato il polinomio assegnato P(x,y,z), la chiave per la sua fattorizzazione consiste nel sommare e sottrarre ad esso la stessa espressione xyz; ragion per cui, il polinomio diventa: $P(x,y,z)=x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x+xyz-xyz$.

Da qui, associando opportunamente i termini e fattorizzando, si ottiene in successione:

$$P(x,y,z=(x^2z-x^2y-z^2x+xyz)+(y^2x-y^2z+z^2y-xyz)=$$
$$=x(xz-xy-z^2+yz)+y(yx-yz+z^2-xz)=x[y(z-x)-z(z-x)]+y[x(y-z)-z(y-z)]=$$
$$=x(z-x)(y-z)+y(z-y)(z-x)=x(z-x)(y-z)-y(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

9) Un idoneo software matematico mostra che l’espressione:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

si fattorizza nel seguente quadrato:

$$(n^2+3n+1)^2.$$

Descrivere i passaggi algebrici necessari per ottenere il risultato indicato.

10) Un idoneo software matematico mostra che l’espressione:

$$(a-b)^2(b-c)^2+(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(a-b)^2$$

si fattorizza nel seguente quadrato:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2.$$

Descrivere i passaggi algebrici necessari per ottenere il risultato indicato.

11) Fattorizzare in $\mathbb{Q}$ la seguente espressione:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

[NOTA BENE. La relazione che si ottiene uguagliando l'espressione assegnata a quella fattorizzata è nota come "identità di Brahmaguta-Fibonacci", ma pare che fosse già nota a Diofanto (III sec. d.C.). Fu comunque riscoperta da Brahmagupta (ca. VII sec.) e figura nel *Liber Quadratorum* di Leonardo Fibonacci (1225)]

12) Dimostrare che un numero di 4 cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale e nel quale le prime due cifre sono uguali fra loro e così le ultime due, è divisibile per 11.

13) Siano un numero di 4 cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, ed il numero che si ottiene da esso scrivendo le sue 4 cifre in ordine inverso. Dimostrare che il numero che si ottiene:

a) sottraendo il numero minore dal maggiore è divisibile per 9;

b) sommando i due numeri è divisibile per 11.

14) Si consideri il seguente insieme:

$$A=\left\{a,\ \frac{1}{a},\ 1-a,\ \frac{1}{1-a},\ \frac{1-a}{a},\ \frac{a}{1-a}\right\}$$

dove a è un qualsiasi numero reale diverso da 0 e da 1. Si supponga di indicare con $x\odot y$ (si legge: "x *composto con* y") l'operazione che consiste nel sostituire al posto della lettera "a" che figura nell'espressione di x, il valore dell'espressione y.

Ad esempio, ammesso che sia $x=\frac{1}{1-a}$ ed $y=\frac{1}{a}$, risulta:

$$x\odot y=\frac{1}{1-a}\odot\frac{1}{a}=\frac{1}{1-\frac{1}{a}}.$$

Completare la seguente "tabella", tenendo presente che in ogni casella ci va il risultato semplificato dell'espressione x⊙y, dove x è preso nella prima colonna ed y nella prima riga.

Diresti che l'insieme A è chiuso rispetto all'operazione "⊙"? Diresti che l'operazione "⊙" gode della proprietà commutativa?

$\odot$	a	$\frac{1}{a}$	$1-a$	$\frac{1}{1-a}$	$\frac{1-a}{a}$	$\frac{a}{1-a}$
a	a					
$\frac{1}{a}$		a		$1-a$		
$1-a$			a			
$\frac{1}{1-a}$		$\frac{a}{1-a}$		$\frac{1-a}{a}$		
$\frac{1-a}{a}$						
$\frac{a}{1-a}$						

15) Dimostrare che i numeri naturali non nulli che si possono mettere nella forma a^2+a e che sono minori di 1000 e divisibili per 7 sono in numero di 8. Determinarli.

16) Si consideri il numero $N=4n^4+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale. Dimostrare che esiste un solo valore di n per il quale N è un numero primo.

[**R**. Dopo aver dimostrato che $N=(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)$, si tratta di far vedere che per un solo valore accettabile di n uno dei due fattori è uguale a 1 mentre l'altro fattore è un numero primo]

17) Considerata la frazione algebrica $\frac{A(x)}{B(x)}$, si indichi con $Q(x)$ ed $R(x)$ rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$. Esprimere la frazione mediante $Q(x)$ ed $R(x)$, sapendo che:

$$1)\ A(x)=x^3-1,\ B(x)=x+2; \qquad 2)\ A(x)=2x^4+3x^2-2,\ B(x)=x^2+1;$$
$$3)\ A(x)=\frac{1}{2}x^3+3x-\frac{3}{2},\ B(x)=x^2+\frac{1}{2}.$$

$$\left[\mathbf{R.}\ 1)\ \frac{x^3-1}{x+2}=(x^2-2x+4)-\frac{9}{x+2};\ldots\right]$$

18) ® Si può controllare facilmente che si ha:

$(2\times3\times4\times5)+1=121=11^2$, $(6\times7\times8\times9)+1=3025=55^2$, $(26\times27\times28\times29)+1=570025=755^2$.

Dimostrare che, in generale, il prodotto di 4 qualsiasi numeri naturali consecutivi, aumentato di 1, è il quadrato di un numero naturale. [Esercizio ad alto coefficiente di difficoltà]

19) ® Considerata l'espressione $a_n=2n+1$, calcolare la somma dei 1.000 termini:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{999}+a_{1.000}\ .$$

20) Si considerino i seguenti polinomi:

a) $4x^2-1$. b) $4x^4+1$. c) x^4-1. d) x^4+1. e) x^4+2x^2+9.

Tutti, tranne uno, sono fattorizzabili in $\mathbb{Q}$. L'unico che non lo è, è però fattorizzabile in $\mathbb{R}$. Trovare tali fattorizzazioni.

21) Spiegare perché il valore del polinomio n^3+3n^2+2n è un numero divisibile per 6 quando ad n si sostituisce un qualsiasi numero naturale.

[**R**. Una volta fattorizzato il polinomio nel prodotto di 3 fattori, si può constatare che tali fattori rappresentano numeri naturali consecutivi, per cui …]

22) I numeri reali a, b sono tali che $a+b=8$ e $a^2+b^2=34$. Quanto vale a^3+b^3 ? [**R**. 152]

23) Siano a, b due qualsiasi numeri naturali tali che $b\neq0$ e $a>b+1$. Dimostrare che a^2-b^2 non è un numero primo.

24) Si considerino tutti i numeri naturali che si possono mettere nella forma seguente:

$$x^4+x^2+1\ ,$$

dove x è un qualsiasi numero naturale maggiore di 1. Avviene che, per ogni x siffatto, si ottiene un numero composto. Verificare questo fatto per qualche x particolare e fornire una dimostrazione generale.

25) Si sa che il numero naturale N è divisibile per 9. Qual è il resto della divisione per 9 del numero N+85?

[A] 3. [B] 4. [C] 5. [D] Non si può calcolare.

Individuare la sola alternativa corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

26) Si sa che a, b, c sono numeri naturali qualsiasi. Dimostrare che, in generale, ma sotto la condizione che a, c siano dispari e b sia pari, il numero $(a+1)(b+2)(c^2-1)$ è divisibile per 32 ma non per 64. Verificare in qualche caso particolare.

27) Si sa che a, b, c, d sono numeri reali qualsiasi. Dimostrare che si ha:

$$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

Dimostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $ad=bc$.
Verificare in qualche caso particolare.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che il grado del polinomio quoziente tra un polinomio di grado m ed uno di grado n è n?
2. Qual è il massimo grado del polinomio resto della divisione tra un polinomio di grado m ed uno di grado n?
3. È possibile calcolare il resto della divisione del polinomio $3x^3-2x^2-x-4$ per il binomio $x-2$ senza effettuare la divisione?
4. Posso affermare subito, senza effettuare alcuna verifica, che il quoziente fra il polinomio x^3+2x^2 ed il polinomio x^2+1 non può essere x^2+2. Per quale ragione?
5. È vero che $(2a^2-1)^2$ è l'espressione che fattorizza in $\mathbb{Q}$ l'espressione $4a^4-4a^2-1$?
6. Come si fattorizza l'espressione $a^2+b^2-2ab-4$ nell'insieme $\mathbb{Q}$?
7. Come si fattorizza l'espressione x^3+x^2+x+1 nell'insieme $\mathbb{Q}$?
8. Quale delle seguenti espressioni:

$$\text{[A]}\ 2xy,\qquad \text{[B]}\ \frac{x+2y}{x},\qquad \text{[C]}\ 1+2xy,\qquad \text{[D]}\ x+2y$$

   è una semplificazione dell'espressione algebrica $\dfrac{x^2+2xy}{x^2}$?
9. Una forma semplificata della frazione $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ è:

$$\text{[A]}\ \frac{1}{a-b};\quad \text{[B]}\ \frac{1}{a+b};\quad \text{[C]}\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b};\quad \text{[D]}\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

   Una sola alternativa è corretta. Quale?
10. Si consideri la seguente espressione:

$$\frac{3}{2x}-\frac{2x}{x-1}$$

   e la sua traduzione in scrittura "lineare", tenendo presente che "∗" rappresenta l'operazione di moltiplicazione:

$$3/2*x-2*x/(x-1).$$

   In quest'ultima c'è un errore. Trovarlo.
11. Si consideri il numero $N=4n^4+3n^2+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale. Dimostrare che, per ogni n non nullo, N è un numero composto oppure, viceversa, dimostrare che questo non è vero.
12. Devi scomporre in prodotto di fattori primi il numero 1596. Come pensi di procedere?
13. È vero che la frazione algebrica $\frac{A(x)}{B(x)}$ si può mettere nella forma $Q(x)+R(x)$, dove $Q(x)$ ed $R(x)$ sono nell'ordine il quoziente ed il resto della divisione di $A(x)$ per $B(x)$?
14. Quale delle seguenti relazioni è vera per qualsiasi scelta dei numeri reali positivi a,b?
   [A] $a^2+b^2=ab$. [B] $a^2+b^2>ab$. [C] $a^2+b^2<ab$. [D] Nessuna di esse.
   Individuare la sola alternativa corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

RISPOSTE.

1. No. Tale grado è $m - n$.

2. Il polinomio resto ha al più grado $n - 1$.

3. Sì. Il resto R, una volta indicato con $P(x)$ il polinomio, è infatti $P(2)$, dove 2 è il valore che, attribuito ad x, annulla il binomio $x - 2$. Dunque $R=P(2)=10$.

4. Perché il massimo grado del quoziente, nel caso specifico, è $3 - 2$, cioè 1.

5. No. L'espressione $(2a^2-1)^2$ è la fattorizzazione di $4a^4-4a^2+1$.

6. $a^2+b^2-2ab-4 =(a-b)^2-4=(a-b+2)(a-b-2)$.

7. $x^3+x^2+x+1 =x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$.

8. La risposta corretta è [B].

9. La risposta corretta è [B].

10. La scrittura corretta è la seguente: $3/(2*x)-2*x/(x-1)$.
La scrittura $3/2*x-2*x/(x-1)$ sarebbe corretta se fosse riferita alla seguente espressione:
$$\frac{3}{2}x-\frac{2x}{x-1}.$$

11. N è un numero composto. Si ha, infatti:
$$N=4n^4+3n^2+1 = (4n^4+4n^2+1)-n^2 = (2n^2+1)^2-n^2 = (2n^2+n+1)(2n^2-n+1);$$
ed è evidente che, per ogni n non nullo, i due fattori nell'ultima espressione sono numeri naturali maggiori di 1.

12. Naturalmente puoi seguire una via del tutto tradizionale, ma puoi risparmiare tempo se procedi come appresso indicato:
$$1596=1600-4=40^2-2^2=(40-2)\times(40+2)=38\times42=(2\times19)\times(2\times3\times7)=2^2\times3\times7\times19$$

13. No. La forma corretta è la seguente:
$$\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}.$$

14. [B] è l'alternativa corretta. Per spiegare che le alternative [A] e [C] non sono valide basterebbero degli esempi particolari, ma per spiegare che [B] è vera per ogni scelta di a, b bisogna trovare un procedimento generale. Tanto vale cercare questo procedimento. In realtà, siccome $(a-b)^2\geq0$ per ogni scelta di a, b, dove il segno "uguale" vale solamente se $a=b$, allora si ha: $a^2+b^2-2ab\geq0$, da cui segue: $a^2+b^2\geq2ab$. E siccome $2ab>ab$, allora, per ogni scelta di a, b risulta: $a^2+b^2>ab$.