Prerequisiti:
- Operare con i numeri reali
- Rappresentare punti e curve elementari in un piano cartesiano

L'unità è rivolta al 2° biennio del Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze applicate.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire una successione ricorsiva*
- *in casi semplici, passare dall'espressione analitica del termine generale di una successione all'espressione ricorsiva e viceversa*
- *descrivere pregi e limiti di un algoritmo ricorsivo*

Essi hanno inoltre l'occasione di consolidare la loro tecnica nel calcolo algebrico.

Successioni ricorsive.
Unità 60

60.1 LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI

60.1.1 Se ripensi agli esempi di successioni che abbiamo fornito nell'unità precedente, puoi constatare un fatto curioso: tranne che in un caso, ogni singola successione è stata definita attraverso l'espressione analitica del suo termine generale a_n. L'eccezione è costituita dalla **successione di Fibonacci**, il cui termine generale a_n è stato definito in un modo singolare. Non è stata fornita infatti un'espressione analitica di a_n ma un algoritmo in grado di calcolare tale termine generale. Per l'esattezza:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \text{ oppure } n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

Se ne desume che il calcolo del termine di posto n presuppone noti quelli di posto $n-1$ ed $n-2$, il calcolo del termine di posto $n-1$ a sua volta presuppone noti quelli di posto $n-2$ ed $n-3$ e così via andando a ritroso fino al calcolo di a_3 che è uguale ad a_1+a_2 e perciò $a_3=1+1=2$. Da qui, poi, si risale verso a_n. Ragion per cui, con questa definizione, non c'è modo di calcolare direttamente a_n ma bisogna passare per i termini precedenti.

60.1.2 In realtà esiste una formula che fornisce l'espressione analitica dell'n-esimo termine della successione di Fibonacci. Indicati precisamente con φ e ψ rispettivamente la radice positiva e quella negativa dell'equazione $x^2-x-1=0$, vale a dire: $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, l'n-esimo termine della successione di Fibonacci è dato dalla seguente formula, detta **formula di Binet** [1]:

$$\mathbf{a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}}.$$

Tralasciamo la dimostrazione di questa formula [2] e ci limitiamo a far notare che il primo dei due numeri suddetti, vale a dire φ, non è altro che il "numero aureo".
Su alcune curiosità, legate alla successione di Fibonacci, suggeriamo la lettura che chiude questa unità.

60.2 SUCCESSIONI RICORSIVE

60.2.1 Una successione come quella di Fibonacci ha dunque la caratteristica di richiamare se stessa nella costruzione dei vari termini e per questo si definisce *successione ricorsiva*. In realtà ci siamo già occupati in passato delle "funzioni ricorsive", che però, ad analizzarle per bene, altro non sono che particolari successioni. Riprendiamo comunque l'argomento a suo tempo sviluppato [3], anche a beneficio di chi non se ne fosse allora occupato, trattandolo adesso proprio dal punto di vista delle successioni.
Incominciamo ad adattare la definizione di "funzione ricorsiva" a quella di "successione ricorsiva":

Una **successione ricorsiva** (o **definita ricorsivamente**) è una
successione che richiama se stessa nel calcolo dei vari termini.

La successione di Fibonacci costituisce il primo esempio noto di successione definita ricorsivamente in modo esplicito. In realtà, come avremo modo di chiarire più avanti, già i matematici dell'antichità utilizzavano la ricorsione.

---

[1] **Binet**, Jacques, matematico e astronomo francese, 1786-1856.
[2] Se tuttavia qualcuno fosse interessato ad una sua dimostrazione, può trovarla nella cartella "Integrazione 2", file "Integrazione 2, Unità 28-88", N° 16, presente in questo medesimo sito web e scaricabile gratuitamente.
[3] Cfr.: Unità 28: Algoritmo. Funzioni calcolabili.

Abbiamo visto (anche se non dimostrato) poco sopra come dal termine generale a_n di una successione definita ricorsivamente si possa passare all'espressione analitica di a_n. Ora, questa operazione e quella inversa di passare dall'espressione analitica di a_n a quella ricorsiva, ammesso che siano possibili, sono esercizi che a volte si risolvono in maniera abbastanza agevole, mentre altre volte, come ad esempio nel caso della formula di Binet, sono veramente impegnativi. Basti ricordare che questa formula è stata scoperta oltre 500 anni dopo che Fibonacci ne aveva dato la formulazione ricorsiva.
Adesso andiamo a fornire alcuni esempi più o meno semplici e comunque più agevoli del precedente.
Nel primo gruppo (n. 60.2.2) è data l'espressione analitica di a_n e se ne trova la definizione ricorsiva.
Nel secondo (n. 60.2.3) si procede invece dalla definizione ricorsiva di a_n all'espressione analitica.

60.2.2 COME DALL'ESPRESSIONE ANALITICA DI a_n SI PASSA ALLA SUA DEFINIZIONE RICORSIVA.

♦ ESEMPIO 1. **Somma dei primi n numeri naturali a partire da 1**.
La somma a_n dei primi n numeri naturali a partire da 1 è evidentemente una funzione di n. Conosci già l'espressione analitica di a_n, vale a dire:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Adesso ci proponiamo di dare di a_n una definizione ricorsiva. La cosa è abbastanza semplice. Basta constatare che:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n,$$

per concludere che si ha:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

♦ ESEMPIO 2. **Successione dei numeri naturali non nulli**.
L'ennesimo termine a_n della successione dei numeri naturali non nulli è evidentemente tale che:

$$a_n = n.$$

Anche la definizione ricorsiva di a_n è semplice:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 1 \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

♦ ESEMPIO 3. **Progressione aritmetica**.
L'n-esimo termine a_n di una progressione aritmetica di 1° termine a e ragione d è dato dalla seguente espressione analitica:

$$a_n = a + (n-1)\, d.$$

La definizione ricorsiva di a_n si ricava constatando semplicemente che ogni termine della progressione si ottiene dal precedente sommandogli d. Pertanto:

$$a_n = \begin{cases} a \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + d \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

L'esempio precedente è, in fondo, un caso particolare di questo, ottenuto per d=1.
♦ ESEMPIO 4. **Progressione geometrica**.
L'n-esimo termine a_n di una progressione geometrica di 1° termine a e ragione q è dato dalla seguente espressione analitica:

$$a_n = a\, q^n.$$

La definizione ricorsiva di a_n si ricava constatando semplicemente che ogni termine della progressione si ottiene dal precedente moltiplicandolo per q. Pertanto:

$$a_n = \begin{cases} a \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1}q \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

♦ ESEMPIO 5. **Fattoriale di un numero**.
Il fattoriale di un numero naturale n, indicato com'è noto con n!, si definisce nel modo seguente:

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \text{ oppure } n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Ovviamente non si tratta di una definizione ricorsiva, che può essere data qualora si ricordi la seguente formula: n!=(n–1)! n. Si ha infatti:

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ (n-1)!\, n \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

60.2.3 COME DALLA DEFINIZIONE RICORSIVA DI a_n SI PASSA ALLA SUA ESPRESSIONE ANALITICA.

♦ ESEMPIO 1. **Somma dei primi n numeri naturali pari a partire da 2**.
È data la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Vogliamo ottenere l'espressione analitica di a_n. Incominciamo a constatare allora che risulta:

$a_1 = 2$,
$a_2 = 2 + 2{\cdot}2 = 2{+}4$,
$a_3 = (2{+}4) + 2{\cdot}3 = 2{+}4{+}6$,
$a_4 = (2{+}4{+}6) + 2{\cdot}4 = 2{+}4{+}6{+}8$.

Si tratta dunque, in generale, della somma dei primi n numeri naturali pari a partire da 2, vale a dire:

$$a_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n.$$

Ora, notando che questa è la somma di n termini in progressione aritmetica di primo termine 2 e ragione 2, si ha:

$$a_n = n\frac{2 + 2n}{2} = n(n + 1).$$

Per cui il termine generale della successione ha la seguente espressione analitica:

$$a_n = n\,(n{+}1).$$

♦ ESEMPIO 2. **Somma dei primi n numeri naturali dispari a partire da 1**.
È data la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + (2n - 1) \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Vogliamo ottenere l'espressione analitica di a_n. Incominciamo a constatare allora che risulta:

$a_1 = 1$,
$a_2 = 1 + (2{\cdot}2 - 1) = 1{+}3$,
$a_3 = (1{+}3) + (2{\cdot}3 - 1) = 1{+}3{+}5$,
$a_4 = (1{+}3{+}5) + (2{\cdot}4 - 1) = 1{+}3{+}5{+}7$.

Si tratta dunque, in generale, della somma dei primi n numeri naturali dispari a partire da 1, vale a dire:

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Ora, notando che questa è la somma di n termini in progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione 2, si ha:

$$a_n = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n^2.$$

Per cui il termine generale della successione ha la seguente espressione analitica:

$$a_n = n^2.$$

♦ ESEMPIO 3. **Somma di n numeri in progressione geometrica.**

È data la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} a \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + a\,q^{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

dove a e q sono numeri reali (q≠0). Vogliamo ottenere l'espressione analitica di a_n. Incominciamo a constatare allora che risulta:

$a_1 = a,$
$a_2 = a + a\,q,$
$a_3 = (a + a\,q) + a\,q^2 = a + a\,q + a\,q^2,$
$a_4 = (a + a\,q + a\,q^2) + a\,q^3 = a + a\,q + a\,q^2 + a\,q^3.$

Si tratta dunque, in generale, della somma di n numeri in progressione geometrica di primo termine a e ragione q, vale a dire:

$$a_n = a + a\,q + a\,q^2 + \cdots + a\,q^n.$$

Come sai già, risulta:

$$a_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

♦ ESEMPIO 4. **Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali a partire da 1**.

È data la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n^2 \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Vogliamo ottenere l'espressione analitica di a_n. Incominciamo a constatare allora che risulta:

$a_1 = 1,$
$a_2 = 1 + 2^2,$
$a_3 = (1 + 2^2) + 3^2 = 1 + 2^2 + 3^2,$
$a_4 = (1 + 2^2 + 3^2) + 4^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2.$

Si tratta dunque, in generale, della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali a partire da 1, vale a dire:

$$a_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Si ha:

$$a_n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1).$$

Questo è stato dimostrato a suo tempo ricorrendo al principio d'induzione (Cfr.: unità 39, sezione verifiche, esercizio risolto n. 3). Ma adesso vogliamo esporre un procedimento diretto, costruttivo per la dimostrazione di questa formula. Non è un procedimento immediato ma non è neppure tanto difficile da capire.

Incominciamo a considerare la seguente identità:

$$(1+n)^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3.$$

Sostituiamo in essa, al posto di n, i valori 1, 2, 3, ... , n. Otteniamo le seguenti n uguaglianze:

$2^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3$
$3^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$

$4^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3$

… … … … … … … … … … … … … … .

$(1+n)^3 = 1 + 3\,n + 3\,n^2 + n^3$

Sommandole membro a membro e semplificando, dopo aver constatato che si eliminano i termini da 2^3 ad n^3 mentre è uguale ad n la somma degli "1", troviamo:

$$(1+n)^3 = n + 3\,(1+2+3+\cdots+n) + \ 3\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\ +\ 1,$$

ossia, tenendo presente la formula che esprime la somma dei primi n naturali a partire da 1:

$$(1+n)^3 = n + 3\ \frac{n(n+1)}{2} + 3\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\ +\ 1;$$

da qui, considerando la relazione come un'equazione nell'incognita $\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$ e risolvendola, segue:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}\left((1+n)^3 - \frac{3}{2}\,n\,(n+1) - n - 1\right) = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,.$$

[c.v.d.]

♦ ESEMPIO 5. **Somma dei cubi dei primi n numeri naturali a partire da 1**.

È data la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n^3 \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Vogliamo ottenere l'espressione analitica di a_n. Incominciamo a constatare allora che risulta:

$a_1 = 1,$

$a_2 = 1 + 2^3,$

$a_3 = (1+2^3) + 3^3 = 1 + 2^3 + 3^3,$

$a_4 = (1+2^3+3^3) + 4^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$

Si tratta dunque, in generale, della somma dei cubi dei primi n numeri naturali a partire da 1, vale a dire:

$$a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Siccome:

(*) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2,$$

e siccome:

$$1+2+3+\cdots+n\ = \frac{n(n+1)}{2},$$

allora risulta:

$$a_n = \frac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2.$$

La precedente formula (*) esprime il cosiddetto "teorema di Nicomaco" poiché prende il nome per l'appunto dal filosofo e matematico ellenico **Nicomaco** di Gerasa (attivo intorno all'anno 100 d.C.).
Di questa formula ti abbiamo proposto a suo tempo una dimostrazione [4] basata sul principio d'induzione. Se vuoi, puoi riprendere quella dimostrazione.
Adesso ti proponiamo però per esercizio una dimostrazione diretta della formula. Basta ripercorrere un ragionamento simile a quello seguito per dimostrare la formula che esprime analiticamente la somma dei quadrati nei primi n numeri naturali a partire da 1. Solo che adesso il punto di partenza è l'identità:

[4] Cfr.: Unità 39: Il principio di induzione, esercizio N° 5 in sezione "verifiche".

$$(1+n)^4 = 1 + 4\,n + 6\,n^2 + 4\,n^3 + n^4.$$

Bisogna ricordare inoltre le formule che esprimono analiticamente la somma dei primi n numeri naturali e quella dei quadrati dei primi n numeri naturali, sempre a partire da 1.

60.2.4 La ricorsione presenta vantaggi e svantaggi per quanto riguarda sia il calcolo con "carta e penna" sia il calcolo automatico.
Relativamente al calcolo con carta e penna il vantaggio è che una successione definita ricorsivamente è semplice da capire, mentre lo svantaggio è che il calcolo dell'n-esimo termine della stessa costringe a molti passaggi.
Qualcosa di simile accade nel calcolo automatico. Il vantaggio è che bastano poche righe di istruzioni per scrivere l'algoritmo che risolve il problema di determinare l'n-esimo termine della successione, mentre lo svantaggio è che la ricorsione, dovendo operare continui richiami della successione, occupa molto spazio di memoria e questo comporta seri problemi.

60.3 PARTICOLARI SUCCESSIONI RICORSIVE

60.3.1 Ci proponiamo adesso di mostrare alcune successioni ricorsive particolarmente interessanti.
La prima è attribuita ad **Erone** di Alessandria (I-II sec. d.C.) per il calcolo di un valore approssimato della radice quadrata di un numero reale positivo. Ce ne vogliamo occupare, anche se il fatto è oggigiorno trascurabile sul piano pratico, poiché non è certamente un'impresa un calcolo siffatto (ovviamente con l'uso di uno strumento di calcolo automatico). Esso invece non lo è sul piano storico e ci rivela quanto fosse evoluta la matematica di Erone, ancorché priva dell'agile simbolismo algebrico del quale oggi disponiamo.
Supponiamo dunque assegnato un numero reale positivo α, di cui vogliamo calcolare la radice quadrata. In termini geometrici questo significa che è assegnato un quadrato di area α e si vuole calcolare la misura $\sqrt{\alpha}$ del lato.
Prendiamo allora un numero reale positivo $a_0>\sqrt{\alpha}$. Come dire che a_0 deve essere tale che $a_0^2>\alpha$. Costruiamo il rettangolo avente una dimensione uguale ad a_0 ed equivalente al quadrato assegnato e quindi avente ancora area α.
L'altra dimensione è evidentemente $\frac{\alpha}{a_0}$ e risulta chiaramente: $\frac{\alpha}{a_0}<\sqrt{\alpha}$.
Se si vuole che questo rettangolo si approssimi al quadrato, sovrapponendosi ad esso (Fig. 1), bisogna diminuire la dimensione a_0 ed aumentare di conseguenza α/a_0.
Per questo costruiamo il numero a_1 uguale alla media aritmetica dei due numeri a_0 e α/a_0, vale a dire:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{\alpha}{a_0}\right).$$

Come sai, risulta:

$$\frac{\alpha}{a_0} < a_1 < a_0\,.$$

Mettiamo ora a_1 al posto di a_0 e ripetiamo il procedimento. In questo modo l'approssimazione del rettangolo al quadrato migliora e migliora ulteriormente se il procedimento si ripete più volte, prendendo ogni volta come dimensione del rettangolo la nuova misura: $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$. Ebbene, la successione che raggiunge lo scopo, definita ricorsivamente, è quella di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} a_0 \text{ se } n = 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-2}}\right) \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

Dopo un numero opportuno di passi si ha: $a_n \approx \sqrt{\alpha}$.

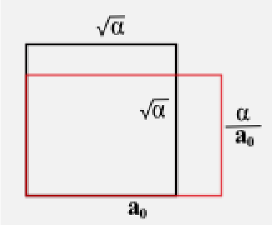

FIG. 1

A titolo di esempio:

- Volendo calcolare $\sqrt{2}$, per cui α=2, partendo da a_0=2 ed utilizzando uno strumento di calcolo automatico, al terzo passaggio si trova già $a_3 \approx 1{,}41421$.
  Si sa in effetti che: $\sqrt{2}$=1,414213562... .
- Volendo calcolare $\sqrt{3}$, per cui α=3, partendo da a_0=2 ed utilizzando uno strumento di calcolo automatico, al secondo passaggio si trova $a_2 \approx 1{,}732$.
  Si sa in effetti che: $\sqrt{3}$=1,732050807… .
- Volendo calcolare $\sqrt{29}$, per cui α=29, partendo da a_0=6 ed utilizzando uno strumento di calcolo automatico, al secondo passaggio si trova $a_2 \approx 5{,}385$.
  Si sa che: $\sqrt{29}$=5,385164807... .

60.3.2 Il secondo esempio di successione ricorsiva è quella di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} + \cdots.$$

È dovuta al matematico bolognese **Pietro Mengoli** (1625-1686). Il suo termine generale può essere messo immediatamente nella forma seguente:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + \frac{1}{n\,(n+1)} \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

e mostra in maniera indiscutibile che si tratta di una successione ricorsiva.

Se si conosce un particolare artificio [5], si può trovare rapidamente l'espressione analitica di a_n, altrimenti bisogna percorrere altre strade. Una di queste consiste nell'operare dei tentativi sperando di individuare una qualche regolarità. Osserviamo allora che si ha:

$$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{2}{3},\quad a_3 = \frac{3}{4},\quad a_4 = \frac{4}{5}.$$

Sembra che la formula cercata possa essere la seguente:

[5] Si tratta di intuire che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Cosa che, ad onor del vero, si può anche dimostrare. Si tratta di trovare due numeri a, b tali che risulti: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$. La prosecuzione è semplice.

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ma come esserne sicuri? Basta ricorrere al principio d'induzione.

La precedente formula è certamente vera per n=1. Infatti:

$$a_1 = \frac{1}{2}.$$

Ammettiamo che sia vera quando ad n si attribuisce il valore k, per cui:

$$a_k = \frac{k}{k+1}.$$

Facciamo vedere che si mantiene vera quando ad n si assegna il valore k+1. Di fatto risulta:

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Per il principio d'induzione, siamo dunque sicuri che la formula ipotizzata vale per ogni naturale n.

60.3.3 La terza successione che prendiamo in considerazione è simile alla precedente. Il suo termine generale a_n è tale che:

$$a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots.$$

Come nel caso precedente si capisce subito che il termine a_n può essere messo in una forma che ne evidenzi la definizione per ricorsione. Si ha infatti:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2!} & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + \frac{n}{(n+1)!} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Anche adesso se si conosce un certo artificio (6), si può trovare rapidamente un'espressione analitica di a_n, altrimenti bisogna percorrere altre strade. Una di queste è ancora quella di operare dei tentativi nella speranza di individuare una qualche regolarità. Osserviamo allora che:

$$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{5}{6},\quad a_3 = \frac{23}{24},\quad a_4 = \frac{119}{120} a_n,$$

e inoltre che:

$$1 = 2! - 1,\quad 5 = 3! - 1,\quad 23 = 4! - 1,\quad 119 = 5! - 1.$$

Sembra che la formula cercata possa essere la seguente:

$$a_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Per esserne sicuri si ricorre ancora al principio d'induzione.

Ora, la precedente formula è certamente vera per $n = 1$. Si ha infatti:

$$a_1 = \frac{1}{2!}.$$

Ammettiamo che sia vera quando ad n si attribuisce il valore k, per cui:

---

[6] Si tratta di sapere che $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Al fine di una dimostrazione di questa formula, che non sia ovviamente una banale verifica, bisogna trovare due numeri a, b tali che risulti: $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$.

$$a_k = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}.$$

Facciamo vedere che si mantiene vera quando ad n si assegna il valore $k+1$. Di fatto risulta:

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$
$$= \frac{[(k+1)! - 1] \cdot (k+2) + (k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!\,(k+2) - (k+2) + (k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+2)! - 1}{(k+2)!}.$$

Per il principio d'induzione, siamo dunque sicuri che la formula ipotizzata vale per ogni naturale n.

60.3.4 L'ultimo esempio che andiamo a presentare riguarda una successione particolarmente interessante. Fu scoperta da **Leonhard Euler** (1707-1783) nel tentativo, peraltro riuscito, di risolvere il seguente problema:

In quanti modi differenti un poligono convesso può essere diviso in triangoli mediante diagonali che non s'intersecano se non in qualche vertice del poligono?

Ad esempio, se il poligono è un pentagono due modi differenti sono quelli rappresentati in figura 2. Se è un esagono due modi differenti sono quelli rappresentati in figura 3.

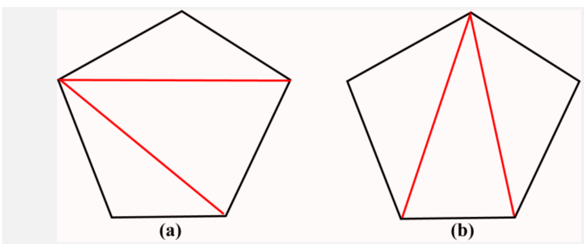

FIG. 2

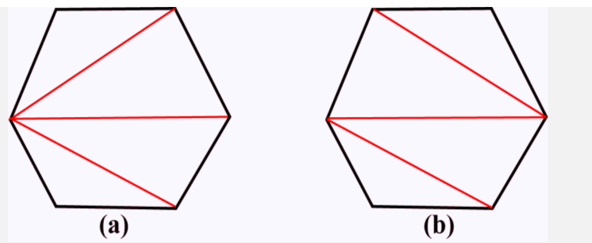

FIG. 3

La successione fu poi studiata in maniera approfondita dal matematico belga **Eugène Charles Catalan** (1814-1884) e per questo è nota come ***successione dei numeri di Catalan***.

Per comprendere come ci si arrivi si possono seguire più percorsi. Ne scegliamo uno che prende le mosse dal triangolo aritmetico, costruito però per comodità in modo diverso da come l'abbiamo presentato altre volte (Fig. 4).

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \boxed{1} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & \boxed{70} & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & \boxed{252} & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1 \\
\cdots & & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & & \cdots
\end{array}$$

FIG. 4

Fermiamo la nostra attenzione sui numeri della colonna centrale (evidenziata in figura 4):

$$1, 2, 6, 20, 70, 252, \ldots$$

e dividiamoli ordinatamente per i numeri:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots .$$

Otteniamo i numeri:

$$\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{14}, \mathbf{42}, \dots .$$

Sono questi numeri che costituiscono la **successione dei numeri di Catalan**.

Per trovare l'espressione analitica del termine generale a_n di tale successione è sufficiente scrivere i numeri del triangolo aritmetico sotto forma di coefficienti binomiali.

In questo modo la colonna centrale dà la seguente successione:

$$\binom{0}{0},\ \binom{2}{1},\ \binom{4}{2},\ \binom{6}{3},\ \binom{8}{4},\ \binom{10}{5}, \dots ;$$

ossia, escluso il primo di tali numeri, che è uguale ad 1, quello corrispondente al generico $n \geq 1$ è $b_n = \binom{2n}{n}$. Per ottenere il generico numero a_n di Catalan bisogna dividere b_n per $n+1$. Dunque, tenendo conto anche del primo termine, che si può supporre corrispondente ad $n=0$, il generico termine della successione dei numeri di Catalan è il seguente:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \ \text{ con } n \geq 0.$$

Per ottenere la forma ricorsiva di questa successione bisogna osservare anzitutto che per $n>0$ si ha:

$$a_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

D'altro canto risulta:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n-1)!\,(2n)}{(n-1)!\,n \cdot (n-1)!\,n} = \frac{(2n-2)!\,(2n-1)(2n)}{\big((n-1)!\big)^2 n^2},$$

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}.$$

Si ha pertanto:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{(2n-2)!\,(2n-1)(2n)}{\big((n-1)!\big)^2 n^2}}{\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}} = \frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Di conseguenza, se $n>0$, si ha:

$$a_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}\, a_{n-1}.$$

In definitiva:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{2(2n-1)}{n+1}\, a_{n-1} \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

Sei invitato a verificare che i numeri a_n di Catalan risolvono il problema di Eulero, con il quale abbiamo introdotto l'argomento, per i seguenti poligoni di N lati, con $N=n+2$:

triangolo ($n=1$), quadrato ($n=2$), pentagono ($n=3$), esagono ($n=4$).

VERIFICHE

1. Si considerino le seguenti successioni di numeri reali, definite mediante l'espressione analitica del loro termine generale a_n e definirle per ricorsione:

1) $a_n = 3n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$; 2) $a_n = n\,(n+1)$, con $n \in \mathbb{N}_0$;

3) $a_n = n\,(n+2)$, con $n \in \mathbb{N}_0$; 4) $a_n = 2 \cdot 3^n$, con $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Definire per ricorsione la progressione aritmetica di primo termine 3 e ragione -2.

3. Definire per ricorsione la progressione geometrica di primo termine 2 e ragione $1/2$.

4. Definire per ricorsione la successione di termine generale $a_n = a^n$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo (si tratta evidentemente della definizione ricorsiva della **potenza di un numero con esponente naturale**).

5. Trovare a_{100} sapendo che $a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$ [**R.** 10099]

6. Trovare a_{10} sapendo che $a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n^2 \text{ se } n > 1 \end{cases}$ [**R.** 386]

7. Trovare a_5 sapendo che $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{67}{81}\right]$

8. Calcolare $\sum_{i=1}^{10} a_n$ sapendo che $a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + (2n-1) \text{ se } n > 1 \end{cases}$ [**R.** 385]

9. Tenendo presente il triangolo aritmetico (vedere fig. 4) si possono prendere in esame alcune successioni, i cui termini sono disposti lungo "diagonali" che si sviluppano dall'alto a sinistra verso il basso a destra. La prima e la seconda di tali successioni sono rispettivamente la successione costante di termine 1 e la successione dei numeri naturali non nulli.

a) La terza successione è la seguente:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots .$$

Qual è il suo termine generale in forma analitica? Quale in forma ricorsiva?

b) Risolvere la medesima questione precedente relativamente alla quarta successione:

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots .$$

10. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

in almeno due modi può essere definita in modo ricorsivo. Determinarne almeno uno.

11. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)} \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

a) Esprimere a_n in forma analitica.

b) Dimostrare che per ogni naturale n risulta $a_n \neq 1$.

c) Dopo aver dimostrato che la successione di termine generale:

$$b_n = \frac{1 + a_n}{1 - a_n}$$

è una progressione aritmetica di primo termine 1, calcolare la somma dei suoi primi 100 termini.

[**R.** ...; c) $S_{100} = 10000$]

12. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

a) Esprimere a_n in forma analitica.

b) Dimostrare che per ogni naturale n risulta $a_n \neq 1/n$.

c) Dopo aver dimostrato che la successione di termine generale:

$$b_n = \frac{2 + a_n}{1 - n\, a_n}$$

è una progressione aritmetica di primo termine 3, calcolare la somma dei suoi primi n termini.

[**R.** ...; c) $S_n = n(n + 2)$]

13. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + (n - 1) \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

a) Esprimere a_n in forma analitica.

b) Dimostrare, mediante il principio d'induzione, che la somma S_n dei primi n termini della successione è:

$$S_n = \frac{n(n^2 + 11)}{6}.$$

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } a_n = 2 + \dfrac{n(n-1)}{2}; \ldots\right]$

14. Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n,$$

dove a è un numero reale diverso da 1.

a) Definirla per ricorsione.

b) Dimostrare che, nel caso in cui 0<a<1 ed n è infinitamente grande, risulta:

$$a_n = \frac{a}{a^2 - 2a + 1}.$$

[**R.** a) …; b) Bisogna constatare che a_n può scriversi nel modo seguente:
$a_n = (a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \cdots) + (a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \cdots) + (a^3 + \ldots + a^n + \cdots) + \ldots + (a^n + \cdots)$, e da qui …]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 Come si definisce una successione ricorsiva?

2 Quanto vale la somma dei primi 10 numeri dispari a partire da 1?

3 Quanto vale la somma dei quadrati dei primi 100 numeri naturali a partire da 1?

4 Quanto vale la somma dei cubi dei primi 10 numeri naturali a partire da 1?

5 Calcolare a_{20} sapendo che $a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + (n-1) \text{ se } n > 1 \end{cases}$

6 Il termine generale a_n di una successione è tale che $a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ \sqrt{1 + a_{n-1}} \text{ se } n > 0 \end{cases}$

Mediante uno strumento di calcolo automatico verificare che la successione converge al numero aureo.

RISPOSTE.

1. Si definisce successione ricorsiva una successione che richiama se stessa nella costruzione dei vari termini.

2. Si sa che la somma dei primi n numeri dispari a partire da 1 è n^2. Se n=10 si ha ovviamente che tale somma è 100.

3. Bisogna calcolare $a_{100}=1^2+2^2+3^2+...+100^2$. Sappiamo che in generale si ha:
$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$
Ne consegue che:
$$a_{100} = \frac{1}{6} 100\,(100+1)(2 \cdot 100 + 1) \;=\; 338.350.$$

4. Bisogna calcolare $a_{10}=1^3+2^3+3^3+...+10^3$. Sappiamo che in generale si ha:
$$a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2.$$
Ne consegue che:
$$a_{10} = \frac{1}{4} 10^2(10+1)^2 = 3.025.$$

5. Si constata anzitutto che si ha:
$$a_1=2,\;\; a_2=2+3,\;\; a_3=(2+3)+4,\;\; \ldots,\;\; a_{20}=(2+3+4+...+20)+21;$$
ne consegue che a_{20} è la somma di 20 numeri in progressione aritmetica di primo termine 2 ed ultimo termine 21. È pertanto:
$$a_{20}=20\cdot\frac{2+21}{2}=230\,.$$

6. Bisogna arrivare ad a_8 per scoprire che appunto $a_8 \approx 1{,}618$.

LETTURA

I numeri di Fibonacci.

Leonardo Fibonacci è diventato famoso in tutto il mondo specialmente per un problema che è proposto nel *Liber Abaci* (1202) e che conduce alla celebre successione che da lui prende il nome. Il problema, tradotto dalla lingua originale di Fibonacci, il latino, è questo:
«*Un tale pose una coppia di conigli in un luogo circondato del tutto da pareti, per scoprire quante coppie germinassero da quella in un anno: com'è nella loro natura, ogni coppia di conigli genera ogni mese un'altra coppia e comincia a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. (La coppia iniziale co-*

mincia a riprodursi a partire dalla fine del primo mese). Quante coppie di conigli discendono in un anno dalla coppia (originaria)?»

La soluzione, che peraltro lo stesso Fibonacci fornisce facendo seguito alla traccia del problema, non è difficile e, almeno per i primi 5 mesi è visualizzata nel grafo sottostante (Fig. 5).

Naturalmente per rispondere al quesito bisogna considerare i 12 mesi di un anno, per cui si ha la seguente successione:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

La somma di questi numeri, che è 376, dà il numero di coppie di conigli discendenti da una coppia in un anno. Se, però, si vuole annoverare pure la coppia originaria, è evidente che il numero complessivo delle coppie è 377.

Fibonacci non se ne rese conto, o forse è più giusto dire non poteva rendersene conto, ma altri studiosi, alcuni secoli più tardi, avrebbero scoperto proprietà notevoli riguardanti la successione che da lui prende il nome. Proprietà che avrebbero interessato settori vari della Matematica (Aritmetica, Algebra, Geometria, Analisi) ma anche ambiti diversi come l'Arte, la Botanica, eccetera.

Per esempio abbiamo avuto modo di vedere come la formula di Binet leghi la successione di Fibonacci al numero aureo.

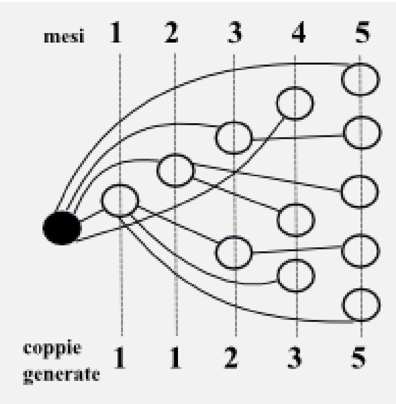

FIG. 5

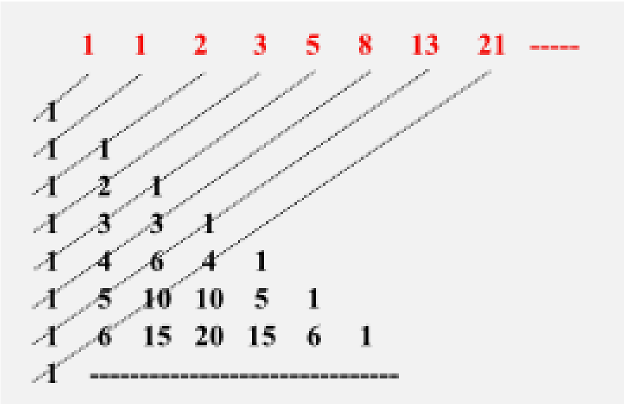

FIG. 6

Un'altra proprietà stabilisce un legame tra la successione di Fibonacci ed il triangolo aritmetico. Precisamente, dopo aver rappresentato il triangolo aritmetico in un modo più comodo per la situazione che ci interessa (Fig. 6), si può notare che si riproduce la successione di Fibonacci sommando i numeri situati sulle diagonali che congiungono un "1" della colonna di sinistra del triangolo aritmetico col numero che sta immediatamente a destra ma nella riga precedente.

Un altro fatto straordinario è che molti fenomeni naturali hanno attinenza con i numeri di Fibonacci. Alcuni esempi fra i tanti che si potrebbero portare.

- Un primo esempio. Considerando un girasole tipico, si può constatare che i suoi semi sono distribuiti secondo tre tipologie di spirali: una prima tipologia è formata da **34** spirali che si sviluppano con leggera inclinazione in senso orario; una seconda è costituita da **55** spirali che si sviluppano in senso antiorario; una terza tipologia è formata da **89** spirali che si sviluppano rapidamente in senso orario.
  I numeri 34, 55, 89 sono numeri di Fibonacci.
- Un secondo esempio riguarda il numero dei petali delle margherite: è solitamente un numero di Fibonacci, come **5** o **13** o **55**.

- Ed ancora, in quasi tutte le pigne le spirali che in esse si diramano nelle varie direzioni sono di due tipi, ma i numeri delle spirali di ciascuno di tali tipi sono numeri di Fibonacci, come $\mathbf{8}$ e $\mathbf{13}$ oppure $\mathbf{8}$ e $\mathbf{21}$.