Prerequisiti:
- Conoscere e utilizzare le coordinate cartesiane nel piano.
- Possedere le nozioni fondamentali di geometria dello spazio.
- Possedere le nozioni fondamentali di trigonometria.
- Dominare il calcolo algebrico

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:
- *rappresentare un punto nello spazio cartesiano*
- *risolvere semplici problemi nello spazio cartesiano (punto medio di un segmento, distanza di due punti, baricentro di un triangolo)*
- *rappresentare un vettore in coordinate cartesiane e definire il prodotto scalare di due vettori nello spazio cartesiano*
- *dimostrare, scrivere e trovare equazioni di sfera, retta e piano nello spazio cartesiano*
- *scrivere le equazioni di un cilindro e di un cono*
- *trovare l'equazione del piano di tre punti non allineati e di quello individuato da una retta ed un punto fuori di essa*
- *riconoscere la condizione di parallelismo e perpendicolarità fra rette, fra piani e fra retta e piano*
- *riconoscere se due rette sono complanari o sghembe*
- *utilizzare le coordinate polari nello spazio*

Questa unità riguarda essenzialmente i Licei (5ª classe) e l'Istituto Tecnico, settore Tecnologico (2° biennio) con le seguenti specificazioni.
L'indirizzo Sistema moda svolgerà l'unità interamente.
I primi tre paragrafi interessano i seguenti altri indirizzi:
(2) Trasporti e logistica.
(3) Elettronica ed elettrotecnica.
(4) Informatica e telecomunicazioni.
(5) Grafica e comunicazione.
(6) Chimica, materiali e biotecnologia.
Infine il paragrafo 63.6 riguarda solamente gli indirizzi (2), (3), (4), (6).

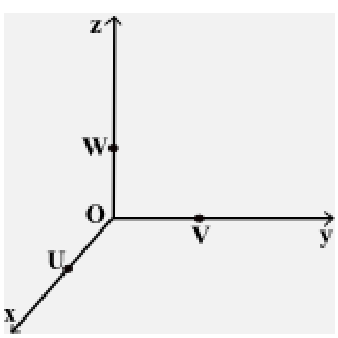
Lo spazio cartesiano
Unità 63

63.1 COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

63.1.1 Il procedimento atto a rappresentare un punto in un piano, dopo averlo riferito ad un sistema di assi cartesiani, può essere esteso allo spazio ordinario. È quello che vogliamo far vedere, ma in maniera assai concisa e veloce.

Cartesio (**René Descartes**, 1596-1650), come già sappiamo, non usa un sistema di assi coordinati, ma sceglie, in relazione ad ogni specifico problema, una retta conveniente su cui fissa un'opportuna lunghezza incognita OP=x e, secondo un'altra direzione, lo spostamento PQ=y.
Fu l'inglese **Isaac Newton** (1642-1727) ad usare per primo un sistema di assi coordinati nell'opera *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704).
Dopo di ciò fu facile concepire la possibilità di estendere allo spazio ordinario il metodo delle coordinate e ciò avvenne principalmente per merito del matematico francese **Alexis-Claude Clairault** (1713-1765), che all'età di appena 16 anni – verosimilmente sotto la guida del padre, professore di matematica – compose un trattato sulle curve nello spazio, dal titolo *Rechers sur les courbes a double courbure*, pubblicato nel 1731.
Ma la prima trattazione sistematica dell'argomento figura in un'appendice all'opera *Introductio in analysin infinitorum* (1748) di **Eulero** (**Leonhard Euler**, 1707-1783).

Prendiamo allora nello spazio ordinario Σ un qualunque piano α e fissiamo su α un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) indicando con U il punto unità sull'asse x e con V il punto unità sull'asse y. Condotta poi per l'origine O di questo sistema la retta z perpendicolare ad α, fissiamo su z un riferimento che abbia l'origine in O ed il punto unità nel punto W tale che – disposti il pollice, l'indice e il medio della mano sinistra in modo che ciascuno delle tre dita appaia perpendicolare alle altre due – avvenga che il medio sia orientato nel verso positivo delle x e l'indice nel verso positivo delle y: ebbene, il pollice indica il verso positivo dell'asse z (Fig. 1). Di solito i punti U, V, W sono scelti in modo che risulti OU=OV=OW.
Con la costruzione descritta si dice che lo spazio Σ è stato riferito ad un ***sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali*** (Oxyz) e lo spazio è chiamato a volte **spazio cartesiano**.
Salvo eventuale avviso contrario, noi supporremo di avere a che fare con un sistema siffatto.



(a)

(b)

FIG. 1

63.1.2 Nello spazio, riferito ad un sistema cartesiano (Oxyz), ad ogni punto P rimane associata una ed una sola terna ordinata (a,b,c) di numeri reali: i primi due corrispondenti alle coordinate cartesiane (a,b) del punto Q – proiezione ortogonale di P sul piano α (Fig. 2) – proprio nel riferimento cartesiano (Oxy) stabilito su α; la terza coordinata c corrispondente alla misura del segmento orientato (Q,P).

Viceversa, ad ogni terna ordinata (a,b,c) di numeri reali rimane associato uno ed un solo punto P dello spazio cartesiano (Oxyz): basta prendere nel piano (Oxy) il punto Q di coordinate (a,b) e poi, sulla perpendicolare a questo piano condotta per Q, il punto P tale che la misura del segmento orientato (Q,P) sia c. Insomma, con le costruzioni suddette, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti dello spazio cartesiano (Oxyz) e l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali.

Per questo, qualche volta si dice che ***lo spazio cartesiano è un*** $\mathbb{R}^3$.

Se, in tale corrispondenza, sono associati il punto P e la terna ordinata (a,b,c), si scrive: **P(a,b,c)** e si legge: «il punto P di coordinate cartesiane (a,b,c)». Come nel caso del piano cartesiano. I numeri a, b – prima e seconda componente della terna – si continuano a chiamare ***ascissa*** e ***ordinata*** di P. Il numero c – terza componente della terna – si chiama ***quota*** di P. Evidentemente risulta:

$$O(0,0,0),\quad U(1,0,0),\quad V(0,1,0),\quad W(0,0,1).$$

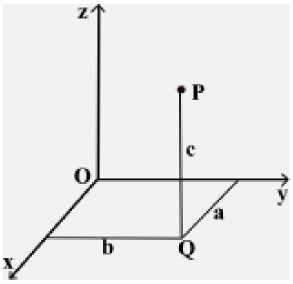


FIG. 2

63.1.3 In uno spazio cartesiano (Oxyz) vi sono tre rette e tre piani privilegiati.

Le tre rette, dette ***assi coordinati*** (o ***assi cartesiani***), sono:

- l'asse x: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,0,0), con $a\in\mathbb{R}$;
- l'asse y: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,b,0) con $b\in\mathbb{R}$;
- l'asse z: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,0,c), con $c\in\mathbb{R}$.

I tre piani, chiamati ***piani coordinati***, sono:

- il piano delle rette xy: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,b,0), con $a,b\in\mathbb{R}$;
- il piano delle rette yz: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,b,c) con $b,c\in\mathbb{R}$;
- il piano delle rette zx: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,0,c), con $a,c\in\mathbb{R}$.

Questi tre piani dividono lo spazio in 8 triedri trirettangoli (le cui facce sono, cioè, angoli retti), ognuno dei quali è chiamato ***ottante***.

In figura 3 è disegnato il parallelepipedo rettangolo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, avente il centro nell'origine O del sistema di riferimento e i tre assi mediani coincidenti con gli assi cartesiani.

Gli 8 vertici di questo parallelepipedo sono situati ciascuno in uno ed uno soltanto degli 8 ottanti in cui i piani coordinati dividono lo spazio. Ebbene, se (a,b,c) sono le coordinate del vertice A_1, situato nell'ottante formato dai punti di coordinate tutte e tre positive (è chiamato di solito *primo ottante*), allora le coordinate dei vertici del parallelepipedo sono le seguenti:

$$A_1(a,b,c),\ A_2(-a,b,c),\ A_3(-a,-b,c),\ A_4(a,-b,c),\ A_5(a,b,-c),\ A_6(-a,b,-c),\ A_7(-a,-b,-c),\ A_8(a,-b,-c).$$

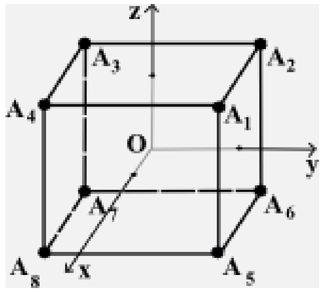


FIG. 3

63.1.4 Come nel piano, anche nello spazio si definisce il concetto di "vettore". Basta ripetere lo stesso procedimento del piano, che qui appresso sintetizziamo adattandolo allo spazio:

- si considera l'insieme S de segmenti orientati dello spazio Σ;
- si definisce la relazione di "equipollenza" tra due segmenti orientati e si fa vedere che si tratta di una relazione di equivalenza;
- ogni classe di segmenti orientati equipollenti si definisce **vettore**: può essere rappresentato da un qualunque segmento orientato della classe senza però identificarsi con esso.

Consideriamo ora un vettore $\vec{v}$ in uno spazio cartesiano (Oxyz) e supponiamo che sia rappresentato dal segmento orientato (A,B) (Fig. 4). Siano A_1, A_2, A_3 le proiezioni ortogonali del punto A sugli assi x, y, z nell'ordine e siano B_1, B_2, B_3 quelle del punto B. I numeri reali a, b, c – che esprimono le misure dei segmenti orientati (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) – si chiamano ***le componenti*** del vettore $\vec{v}$ secondo gli assi cartesiani. Si scrive:

$$\vec{v}\,(a,b,c)$$

e si legge: «il vettore $\vec{v}$ di componenti a, b, c».

Si può spiegare (ma non lo facciamo) che **le componenti di un vettore non dipendono dal segmento orientato scelto per rappresentarlo**. Per cui, ad ogni vettore, assegnato in un prefissato sistema di riferimento, resta associata una ed una sola terna ordinata di numeri reali, quella formata per l'appunto dalle componenti del vettore secondo gli assi coordinati.

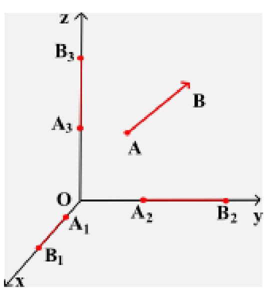


FIG.4

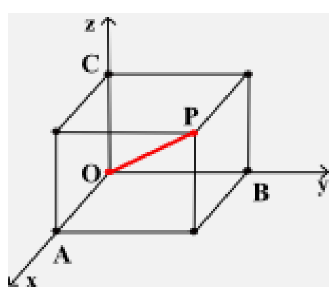


FIG. 5

Viceversa, fissata una terna ordinata (a,b,c) di numeri reali, è individuato univocamente il vettore che ha quella terna di numeri come componenti secondo gli assi coordinati. Basta prendere il punto A sull'asse x, il punto B sull'asse y e il punto C sull'asse z in modo che i segmenti orientati (O,A), (O,B), (O,C) misurino rispettivamente a, b, c e costruire poi il parallelepipedo rettangolo di cui tre spigoli concorrenti sono per l'appunto OA, OB, OC (Fig. 5). Detto P il vertice del parallelepipedo opposto ad O, il vettore $\overrightarrow{OP}$ è il vettore di componenti a, b, c secondo gli assi coordinati.

Si dimostra poi (ma anche questo ci esimiamo dal farlo) che, se il vettore $\vec{v}$ è rappresentato dal segmento orientato (P,Q) e se i punti P, Q hanno coordinate cartesiane rispettivamente (x_P, y_P, z_P) e (x_Q, y_Q, z_Q), allora le componenti del vettore secondo gli assi cartesiani sono nell'ordine:

$$v_x = x_Q - x_P\,,\ \ v_y = y_Q - y_P\,,\ \ v_z = z_Q - z_P\,.$$

63.1.5 Di quest'ultimo risultato vogliamo fornire un'interessante applicazione alla risoluzione di due semplici problemi che ne generalizzano altrettanti, supposti assegnati nel piano.

PROBLEMA 1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati i punti $A(x_A,y_A,z_A)$ e $B(x_B,y_B,z_B)$. Determinare le coordinate del **punto medio del segmento** AB.

RISOLUZIONE. Indicato con $M(x_M,y_M,z_M)$ il punto medio del segmento AB, si ha: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, da cui, passando alle componenti dei due vettori secondo gli assi coordinati, segue:

$$x_M - x_A = x_B - x_M\,,\quad y_M - y_A = y_B - y_M\,,\quad z_M - z_A = z_B - z_M\,,$$

e da qui:

[1] $$\mathbf{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}\,,\quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,,\quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}}\,.$$

PROBLEMA 2. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati i punti $A(x_A,y_A,z_A)$ e $B(x_B,y_B,z_B)$. Determinare la **distanza dei due punti**.

RISOLUZIONE (traccia). La distanza cercata è la seguente (Fig. 6):

[2] $$\mathbf{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

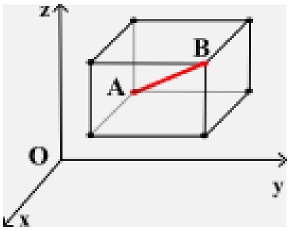


FIG. 6

La formula può essere dimostrata osservando che, dopo aver condotto per i punti A e B i piani paralleli ai piani coordinati, si ottiene (salvo casi particolari, che ti invitiamo a prendere in considerazione) un parallelepipedo rettangolo di cui AB è una diagonale ed i cui spigoli misurano:

$$|x_B - x_A|,\ \ |y_B - y_A|,\ \ |z_B - z_A|.$$

63.1.6 Allo stesso modo del piano, anche nello spazio si definisce il **prodotto scalare di due vettori**, come quel numero reale ottenuto sommando i prodotti delle componenti omologhe dei due vettori; vale a dire, posto che siano (x_1,y_1,z_1) le componenti del vettore $\vec{u}_1$ e (x_2,y_2,z_2) quelle del vettore $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Ricordiamo poi che, detto φ l'angolo formato dai due vettori, si ha:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = u_1u_2 \cos\varphi.$$

Calcola, per esercizio, l'angolo formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sapendo che:

1) $\vec{u}\,(-1,1,2)$, $\vec{v}\,(2,1,1)$; 2) $\vec{u}\,(2,0,-1)$, $\vec{v}\,(2,-1,-2)$.

L'angolo va misurato in gradi sessagesimali, primi e secondi. Puoi utilizzare uno strumento di calcolo automatico.

63.1.7 Ti proponiamo adesso di affrontare alcuni esercizi sugli argomenti di questo paragrafo. Lo spazio si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz).

- ESERCIZIO 1. Sono assegnati i punti $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,3)$. Rappresentali graficamente e, dopo aver constatato che individuano un tetraedro, calcolane il volume.

RISOLUZIONE. I 4 punti sono rappresentati in figura 7: è evidente che non appartengono allo stesso piano e, per questo, sono vertici di un tetraedro. È semplice calcolarne il volume, che è uguale ad 1.

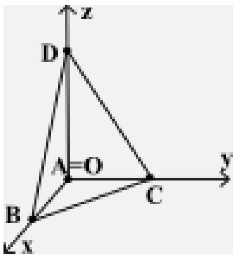


FIG. 7

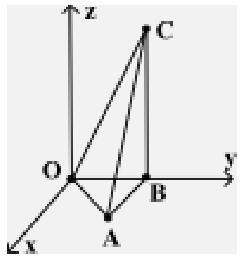


FIG. 8

- ESERCIZIO 2 (da risolvere). Un cubo è situato nel 1° ottante e due suoi vertici opposti sono i punti di coordinate $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$. Rappresentalo graficamente e trovane l'area totale.
- ESERCIZIO 3. Sono assegnati i punti $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,2)$. Rappresentali graficamente e, dopo aver constatato che individuano un tetraedro, calcolane il volume e l'area totale.

RISOLUZIONE (traccia). In figura 8 sono rappresentati i punti O, A, B, C di coordinate rispettivamente: $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,2)$. È evidente che sono vertici di un tetraedro. Lasciamo a te il compito di calcolarne area totale e volume.

- ESERCIZIO 4 (da risolvere). Sono assegnati i punti $A(0,1,0)$, $B(0,4,0)$, $C(a,b,0)$, con $a>0$.

a) Calcola a, b sapendo che il triangolo ABC è equilatero.
b) Determina, nel semispazio $z>0$, un punto V in modo che il tetraedro VABC sia un tetraedro regolare.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } a=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ , b=\frac{5}{2}\ ;\ \text{b) } V\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2},\sqrt{6}\right)\right]$$

63.1.8 Ci occupiamo adesso di una proprietà dei tetraedri che generalizza una analoga proprietà dei triangoli [1], per la dimostrazione della quale è richiesta la collaborazione di chi legge.

Premettiamo che si denomina *mediana* di un tetraedro il segmento che congiunge un vertice con il baricentro della faccia opposta.

Si consideri allora il tetraedro di vertici $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. Indicati con H_1 il baricentro della faccia BCD e con G_1 il punto della mediana AH_1 tale che $AG_1 = 3\ G_1H_1$, dimostrare che le coordinate di G_1 sono date dalla media aritmetica delle coordinate omonime dei vertici del tetraedro, vale a dire:

$$\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\ \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},\ \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right).$$

Verificare quindi che, indicati rispettivamente con H_2, H_3, H_4 i baricentri delle facce CDA, DAB, ABC e con G_2, G_3, G_4 i punti delle mediane BH_2, CH_3, DH_4 tali che $BG_2 = 3\ G_2H_2$, $CG_3 = 3\ G_3H_3$, $DG_4 = 3\ G_4H_4$, questi punti G_2, G_3, G_4 hanno le stesse coordinate di G_1.

Si può concludere pertanto che vale la seguente proprietà:

---

[1] Cfr.: U18 – Retta cartesiana. Vettori e traslazioni nel piano cartesiano, Laboratorio di matematica, N° 2, a conclusione di N° 18.3.4.

Le quattro mediane di un qualunque tetraedro passano per uno stesso punto (denominato ***baricentro*** del tetraedro**), che divide ogni mediana in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è tripla dell'altra e le cui coordinate sono date dalla media aritmetica delle coordinate omonime dei vertici del tetraedro**.

ESERCIZI.
1. Trovare le coordinate del baricentro sia del tetraedro descritto nel precedente esercizio 1, sia del tetraedro descritto nell'esercizio 3.
2. Dimostrare che, se il tetraedro è un tetraedro regolare: a) le sue mediane sono uguali; b) il suo baricentro dista ugualmente dai suoi vertici e dista ugualmente dalle sue facce.

63.2 SFERA

63.2.1 Ricordiamo che una ***sfera*** è il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da un dato punto (il *centro* della sfera) è minore o uguale ad una data lunghezza (il *raggio* della sfera). Il contorno della sfera, vale a dire il luogo dei punti equidistanti dal centro, si chiama ***superficie sferica***.

Ci proponiamo di determinare l'equazione di una superficie sferica, anche se, ancorché impropriamente, la chiameremo "equazione della sfera".

Come avrai modo di constatare, il procedimento non è altro che una semplice generalizzazione di quello descritto a suo tempo per giungere all'equazione della circonferenza.

Riferito allora lo spazio ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), supponiamo di conoscere il raggio r della sfera e le coordinate (x_C,y_C,z_C) del suo centro C. Chiamato $P(x,y,z)$ un generico punto dello spazio, la condizione di appartenenza di P alla sfera equivale a $\overline{PC}=r$, da cui segue $\overline{PC}^2=r^2$ ed infine, ricordando la formula [2] della distanza di due punti:

[3] $$(\mathbf{x}-\mathbf{x_C})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{y_C})^2+(\mathbf{z}-\mathbf{z_C})^2=\mathbf{r^2}.$$

Questa è l'equazione della sfera avente raggio r e centro $C(x_C,y_C,z_C)$.

Nel caso particolare in cui $C \equiv O$, l'equazione [3] diventa:

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2=r^2}.$$

Ti proponiamo, per esercizio, di determinare l'equazione della sfera avente centro nel punto C e raggio r tali che: a) $C(1,-1,0)$, $r=1$; b) $C(0,2,-1)$, $r=\sqrt{2}$; c) $C(-2,0,2)$, $r=1/2$.

63.2.2 La [3], dopo alcune semplici elaborazioni, assume la forma seguente:

[4] $$\mathbf{x^2+y^2+z^2+a\,x+b\,y+c\,z\,+d=0},$$

avendo posto:

$$a=-2\,x_C,\;\; b=-2\,y_C,\;\; c=-2\,z_C,\;\; d=\sqrt{x_C^2+y_C^2+z_C^2-r^2}.$$

In conclusione, possiamo affermare che ogni sfera ha un'equazione del tipo [4]. Le coordinate (x_C,y_C,z_C) del suo centro e la lunghezza r del suo raggio sono tali che:

$$\mathbf{x_C=-\frac{a}{2}},\quad \mathbf{y_C=-\frac{b}{2}},\quad \mathbf{z_C=-\frac{c}{2}},\quad \mathbf{r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}.$$

Ora, è evidente che nella [4] figurano 4 parametri – a, b, c, d – per cui **sono necessarie 4 condizioni** per determinare l'equazione di una sfera. A questo riguardo, bisogna tener presente che la conoscenza delle coordinate di un punto della sfera comporta una condizione, che si traduce in un'equazione nelle incognite a, b, c, d ed ugualmente una condizione implica la conoscenza del raggio della sfera, mentre la conoscenza del suo centro comporta immediatamente la conoscenza dei valori a, b, c.

Un paio di quesiti per te.

1. Il primo ne richiama un altro riferito però alla circonferenza.
   È vero che ogni equazione del tipo [4] rappresenta una sfera? E se non è vero, sotto quale condizione la [4] rappresenta una sfera?
2. Una volta verificato che l'equazione $x^2+y^2+z^2-2x=0$ rappresenta una sfera, trovare le coordinate di tre suoi punti distinti e determinare la lunghezza del suo raggio.

63.2.3 Alcuni esercizi, risolti o da risolvere. Lo spazio s'intende riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz).

- ESERCIZIO 1 (risolto). Trovare l'equazione della sfera passante per i punti $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$.

RISOLUZIONE. Tenendo presente che la sfera ha un'equazione del tipo [4], per l'appartenenza ad essa dei punti A, B, C, D, si ottengono le seguenti condizioni sui parametri a, b, c, d:

$$d=0,\ \ 1+a+d=0,\ \ 1+b+d=0,\ \ \ 1+c+d=0.$$

Risolto il sistema di tali equazioni nelle incognite a, b, c, d, si trova:

$$a=-1,\ b=-1,\ c=-1,\ d=0.$$

La sfera ha pertanto la seguente equazione: $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

- ESERCIZIO 2 (risolto). Trovare l'equazione della sfera passante per i punti $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(1,1,0)$, $D(2,2,2)$.

RISOLUZIONE. Per l'appartenenza dei punti alla sfera, le loro coordinate devono verificare l'equazione [4], perciò devono essere soddisfatte le seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$d=0,\ a+b+c+d+3=0,\ a+b+d=2,\ 2a+2b+2c+d+12=0.$$

Ossia, tenendo presente che l'incognita d assume il valore 0, deve essere soddisfatto il sistema delle seguenti equazioni, nelle incognite a, b, c:

$$a+b+c=-3,\ \ a+b=-2,\ \ a+b+c=-6.$$

Questo sistema è evidentemente impossibile, dal momento che non può essere contemporaneamente $a+b+c$ uguale a -3 ed uguale a -6. Non esiste dunque alcuna sfera passante per i 4 punti assegnati.
Questo accade perché tre dei 4 punti assegnati – precisamente A, B, D – sono allineati ed allora appare chiaro che non possono appartenere ad alcuna superficie sferica.

Questo secondo esercizio chiarisce pure che le 4 condizioni per determinare l'equazione di una sfera potrebbero non essere sufficienti. Perché lo siano devono essere indipendenti.

- ESERCIZIO 3 (da risolvere). Sono assegnati i punti $A(0,1,0)$ e $B(0,3,0)$. Il segmento AB è la diagonale del quadrato ACBD, i cui vertici sono situati nel piano xy ($x_C>0$). Trovare:

a) le coordinate dei vertici C, D di questo quadrato;
b) le coordinate dei punti E, F ($z_E>0$), sapendo che questi punti e i vertici del quadrato suddetto sono vertici di un ottaedro regolare;
c) le equazioni della sfera circoscritta all'ottaedro.

[**R.** a)… ; b)… ; c) $x^2+y^2+z^2-4y+3=0$]

63.3 RETTA E PIANO

63.3.1 Supponiamo assegnati due punti distinti $A(x_A,y_A,z_A)$ e $B(x_B,y_B,z_B)$ nello spazio riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz). Indicato con P(x,y,z) un generico punto della loro retta r, i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ hanno certamente la stessa direzione; per cui risulta: $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AB}$, dove $k\in\mathbb{R}_0$. Poiché: $\overrightarrow{AB}(x-x_A,\ y-y_A,\ z-z_A)$ e $\overrightarrow{AP}(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$, deve essere:

[5] $$\mathbf{x-x_A=k(x_B-x_A),\ \ y-y_A=k(y_B-y_A),\ \ z-z_A=k(z_B-z_A)}\ .$$

Queste equazioni, una volta isolate le variabili x, y, z, rappresentano le **equazioni *parametriche* della retta passante per i punti $\mathbf{A(x_A,y_A,z_A)}$ e $\mathbf{B(x_B,y_B,z_B)}$**.

Ricavando k dalle tre equazioni precedenti, si ottiene:

$$k=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\ ;$$

quindi i tre punti allineati A, B, P hanno coordinate che soddisfano alle equazioni:

[6] $$\mathbf{\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}}\ .$$

Viceversa, si può far vedere che se tre punti A, B, P hanno coordinate che soddisfano alle equazioni [6], essi sono allineati.

Tutto questo permette di concludere che le [6] rappresentano le **equazioni della retta passante per i due punti $\mathbf{A(x_A,y_A,z_A)}$ e $\mathbf{B(x_B,y_B,z_B)}$**.

Per la verità, affinché le [6] abbiano senso, si deve porre la condizione che questi due punti siano tali da non trovarsi su un piano perpendicolare all'asse x ($x_A\neq x_B$) o all'asse y ($y_A\neq y_B$) o all'asse z ($z_A\neq z_B$). Ritorneremo su questi casi.

Per il momento ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi.

a) Determinare le equazioni, sia nella forma [5] sia nella forma [6], della retta passante per i punti:

1) $A(1,-1,2),\ B(-1,2,1)$; 2) $A(1,0,0),\ B(0,1,1)$.

b) Verificare se i punti A, B, C sono allineati, sapendo che:

1) $A(1,-1,2),\ B(-1,2,1),\ C\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$; 2) $A(1,-1,2),\ B(-1,2,1),\ C(3,2,-1)$.

c) Trovare le coordinate di tre punti distinti situati sulla retta di equazioni: $x+2y-z=0,\ 2x+z+1=0$.

Se nelle equazioni [6] poniamo $x_B-x_A=l$, $y_B-y_A=m$, $z_B-z_A=n$, tali equazioni assumono la forma seguente:

[7] $$\mathbf{\frac{x-x_A}{l}=\frac{y-y_A}{m}=\frac{z-z_A}{n}}\ ,$$

dove l, m, n possono essere considerati dei parametri reali non nulli. Queste equazioni rappresentano le **equazioni di una generica retta passante per il punto $\mathbf{A(x_A,y_A,z_A)}$**.

Si capisce facilmente che, se h è un parametro reale non nullo, rappresentano la medesima retta anche le equazioni seguenti:

$$\mathbf{\frac{x-x_A}{h\,l}=\frac{y-y_A}{h\,m}=\frac{z-z_A}{h\,n}}\ .$$

I tre parametri reali l, m, n, tutti diversi da 0 e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, determinano la direzione della retta e per questo sono denominati ***parametri direttori***. Il vettore $\vec{V}$ di componenti (l, m, n), che di fatto determina tale direzione, si chiama ***vettore direttore***.

Se qualcuno dei parametri l, m, n è nullo, bisogna distinguere varie situazioni:

- Se m=n=0 (e perciò l≠0), la direzione della retta è quella del vettore (1,0,0), vale a dire l'asse x.
- Se n=l=0 (e perciò m≠0), la direzione della retta è quella del vettore (0,1,0), vale a dire l'asse y.

- Se $l=m=0$ (e perciò $n\neq 0$), la direzione della retta è quella del vettore $(0,0,1)$, vale a dire l'asse z.
- Se $n=0$ ma $l\neq 0$ ed $m\neq 0$, la direzione della retta è quella del vettore $(1,1,0)$, parallelo al piano xy.
- Se $m=0$ ma $n\neq 0$ ed $l\neq 0$, la direzione della retta è quella del vettore $(1,0,1)$, parallelo al piano xz.
- Se $l=0$ ma $m\neq 0$ ed $n\neq 0$, la direzione della retta è quella del vettore $(0,1,1)$, parallelo al piano yz.

ESERCIZIO. Determinare i parametri direttori della retta:
a) passante per i punti $A(1,2,1)$ e $B(2,1,2)$; b) passante per i punti $A(2,0,-1)$ e $B(1,2,-1)$;
c) di equazioni $x=0, y=2$; d) di equazioni $2x+3y-z=0, 3x-4y+2z+1=0$.
RISOLUZIONE. Lasciamo a chi legge la risoluzione dei primi tre quesiti e andiamo ad occuparci del quarto. Al riguardo risolviamo il sistema delle due equazioni esprimendo y, z in funzione di x:

$$y=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}x\,,\quad z=-\frac{3}{2}-\frac{17}{2}x\,.$$

A questo punto basta porre x=t e otteniamo le equazioni parametriche della retta:

$$x=t,\ \ y=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}t\,,\ \ z=-\frac{3}{2}-\frac{17}{2}t$$

e, immediatamente, i suoi parametri direttori: (1, –7/2, –17/2); o, se si preferisce, ricordando che tali parametri sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo: (2,–7,–17).

63.3.2 L'**equazione di un generico piano** nello spazio cartesiano è la seguente:

[8] $$\mathbf{a\,x+b\,y+c\,z+d=0},$$

dove a, b, c, d sono parametri reali qualsiasi, purché a, b, c non contemporaneamente nulli.

DIMOSTRAZIONE. Conviene considerare il piano passante per un punto e perpendicolare ad un dato vettore. Questo perché il piano α, passante per il punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e perpendicolare al vettore $\vec{v}(a,b,c)$, può essere concepito come il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che i vettori $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PP_0}$ siano ortogonali, cioè siano tali che il loro angolo sia ampio 90°.
Ora, essendo $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ le componenti di $\overrightarrow{PP_0}$, siccome: $\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_0}=|\vec{v}|\cdot\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cdot\cos 90°$ e inoltre $\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_0}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$ e $\cos 90°=0$, si ottiene la seguente equazione:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\,,$$

ossia, posto $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$:

$$ax+by+cz+d=0,$$

che è per l'appunto l'equazione del piano α.

Con questo abbiamo dimostrato che ogni piano ha un'equazione del tipo [7]. Si potrebbe poi dimostrare che ogni equazione del tipo [7] rappresenta un piano, ma tralasciamo questa parte della dimostrazione e ci soffermiamo su alcuni casi particolari.
Intanto è evidente che:

- l'equazione $\mathbf{z=0}$ rappresenta il luogo dei punti che hanno quota nulla e questo luogo è chiaramente il **piano xy**.

Ugualmente:

- le equazioni $\mathbf{y=0}$ e $\mathbf{x=0}$ rappresentano rispettivamente il **piano zx** e il **piano yz.**

Più in generale, le equazioni:

$$\mathbf{x=m},\ \ \mathbf{y=n},\ \ \mathbf{z=p},$$

dove m, n, p sono parametri reali, rappresentano nell'ordine:

- un generico piano parallelo (in senso largo) al piano yz,

- un generico piano parallelo (in senso largo) al piano zx,
- un generico piano parallelo (in senso largo) al piano xy.

È del tutto evidente che queste equazioni sono casi particolari della [7].
Altri casi particolari della [7] sono i seguenti:

$$\mathbf{ax+by+d=0},\ \ \mathbf{by+cz+d=0},\ \ \mathbf{ax+cz+d=0},\ \ \mathbf{ax+by+cz=0}.$$

Fermiamoci a ragionare sulla prima di queste equazioni: è soddisfatta dai punti di coordinate (x,y,z) tali che x ed y sono legati dall'equazione medesima, ma z può assumere qualsiasi valore. E questo significa che il piano rappresentato dall'equazione è parallelo all'asse z. Ragionamento analogo per la seconda e terza equazione, mentre l'ultima, soddisfatta dalle coordinate $(0,0,0)$, rappresenta evidentemente un piano passante per l'origine del sistema di riferimento.
Riassumendo, le quattro equazioni considerate sopra rappresentano nell'ordine in cui sono scritte:

- un generico piano parallelo (in senso largo) all'asse z,
- un generico piano parallelo (in senso largo) all'asse x,
- un generico piano parallelo (in senso largo) all'asse y,
- un generico piano passante per l'origine.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Trovare l'equazione del piano passante per i punti A, B, C, sapendo che:
   a) $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$;
   b) $A(1,0,0), B(2,1,1), C(3,2,2)$; [cosa non funziona?]
   c) $A(1,2,1), B(0,2,1), C(1,2,0)$.
2. Trovare le coordinate di tre punti distinti situati sul piano di equazione $2x+y-z+2=0$.
3. Rappresentare l'insieme dei punti (x,y,z) tali che:
   a) $0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq 1,\ \ 0\leq z\leq 1$. b) $|x|\leq 1,\ \ |y|\leq 1,\ \ 0\leq z\leq 2$. c) $x^2+y^2+z^2\leq 2,\ \ x\geq 0$.

63.3.3 Riprendiamo in esame le equazioni [6] di una generica retta passante per due punti. Facciamo notare che tali equazioni sembrano essere tre, ma in realtà solo due sono indipendenti, mentre la terza è una conseguenza di esse; per esempio le due equazioni indipendenti potrebbero essere le seguenti:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\,,\qquad \frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\ ;$$

ed è evidente che la terza,

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\,,$$

è conseguenza di esse in virtù della proprietà transitiva dell'uguaglianza. D'altro canto le due equazioni indipendenti, che però devono essere soddisfatte simultaneamente dalle coordinate dei punti A e B, possono mettersi nella forma seguente:

$$Px+Qy+R=0 \quad \text{e} \quad P'y+Q'z+R'=0.$$

dove P, Q, R, P', Q', R' sono espressioni delle coordinate dei punti A e B.
Ora, ove si rifletta sul fatto che queste due equazioni rappresentano due piani, tutto questo ha un preciso significato geometrico:
Nello spazio cartesiano una generica retta è assegnata mediante la coppia di equazioni di due piani (distinti) che la contengono.
In particolare:

- la coppia di equazioni $\{x=0, y=0\}$ rappresenta la retta comune ai piani che le due equazioni rappresentano, vale a dire il piano yz e il piano zx; come dire che la coppia di equazioni rappresenta l'**asse z**;
- allo stesso modo, la coppia di equazioni $\{y=0, z=0\}$ rappresenta l'**asse x**;
- e la coppia di equazioni $\{x=0, z=0\}$ rappresenta l'**asse y**.

63.3.4 Proponiamo adesso un esercizio che riepiloga alcune considerazioni su retta e piano.

ESERCIZIO. Trovare le equazioni del piano passante per i punti (0,1,2), (1,1,2), (0,–3,0) e della retta passante per i punti di coordinate (–1,1,0), (–3,0,–1). Determinare quindi il punto intersezione della retta col piano.

RISOLUZIONE (indicazioni). Per trovare l'equazione del piano, bisogna imporre che i 3 punti assegnati soddisfino, con le loro coordinate, all'equazione: $ax+by+cz+d=0$, dove a, b, c, d sono parametri non contemporaneamente nulli. Si ottiene il sistema delle seguenti 3 equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$b+2c+d=0,\quad a+b+2c+d=0,\ -3b+d=0.$$

Se fosse $b=0$ dalla terza equazione si dedurrebbe $d=0$ e dalle prime due di conseguenza: $c=0$ e $a=0$. Dunque deve essere $b\neq 0$. Risolviamo allora il sistema delle 3 equazioni, esprimendo a, c, d in funzione di b. Si ottiene: $d=3b$, $c=-2b$, $a=0$. Il piano ha pertanto la seguente equazione: $y-2z+3=0$.

Per trovare le equazioni della retta, incominciamo ad osservare che le equazioni della generica retta passante per il punto (– 1,1,0) sono le seguenti:

$$\frac{x+1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z}{n},$$

dove l, m, n sono parametri reali non nulli. Bisogna imporre che questa equazione sia soddisfatta dalle coordinate del punto (–3,0, –1). Si ottengono le seguenti condizioni: $l=2m$, $n=m$. Pertanto la retta è determinata dalle seguenti equazioni:

$$\frac{x+1}{2m}=\frac{y-1}{m}=\frac{z}{m},$$

ovvero, più semplicemente:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Per determinare, infine, il punto intersezione del piano con la retta, è sufficiente risolvere il sistema delle loro equazioni. Vale a dire il sistema delle seguenti equazioni:

$$y-2z+3=0,\quad \frac{x+1}{2}=y-1,\quad y-1=z.$$

Si trova il punto di coordinate (7,5,4).

ESERCIZIO (da risolvere). È dato il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2y+z=2 \end{cases}$$

Dire qual è la sua soluzione e fornirne un'interpretazione geometrica.

63.3.5 Il seguente esercizio, ancorché riferito a un caso particolare, fornisce indicazioni generali per trovare **l'equazione del piano contenente una retta ed un punto fuori di essa**.

ESERCIZIO. Sono dati la retta r di equazioni $\{x-y+2=0,\ x-z-2=0\}$ ed il punto P(0,0,1). Dopo aver verificato che il punto P non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano che contiene r e P.

RISOLUZIONE. Per la verifica richiesta è sufficiente mostrare che le coordinate di P non soddisfano le equazioni della retta. Per la determinazione del piano della retta e del punto, un possibile procedimento consiste

nel prendere due qualsiasi punti della retta, per esempio $A(0,2,-2)$ e $B(-2,0,-4)$, e di determinare quindi il piano dei tre punti P, A, B. Lasciamo a te questo procedimento.
Noi ne descriviamo uno alternativo, peraltro più breve del precedente. Consiste nell'utilizzare l'equazione ottenuta operando una ***combinazione lineare*** delle due equazioni della retta r. L'equazione è la seguente, dove k è un parametro reale:

$$(x-y+2)+k(x-z-2)=0\,.$$

Essa rappresenta, al variare di k, le equazioni di tutti i piani passanti per la retta *r (fascio di piani di asse* r). Detto per inciso, la prima equazione si ottiene per k=0, mentre la seconda corrisponde a k uguale a ∞. Infatti, dividendo la precedente equazione per k e facendo tendere k a ∞ si ottiene appunto la seconda equazione.
Ritornando comunque alla determinazione del piano richiesto, basta a questo punto imporre che la precedente equazione sia soddisfatta dalle coordinate di P per trovare il valore di k cui corrisponde il piano cercato. Si ottiene:

$$2+k(-1-2)=0 \text{ da cui segue: } k=2/3.$$

L'equazione del piano è pertanto la seguente:

$$(x-y+2)+\frac{2}{3}(x-z-2)=0 \quad \text{ossia, a conti fatti:} \quad 5x-3y-2z+2=0\,.$$

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

1. Dopo aver verificato che il punto P non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano contenente il punto P e la retta r sapendo che:
 a) il punto P ha coordinate (0,0,0) e la retta r ha equazioni $\{y=x+2,\ z=2x+1\}$;
 b) il punto P ha coordinate (1,1,1) e la retta r ha equazioni $\{y=x-3,\ y=2-x\}$.

2. È assegnata la retta r di equazioni $(2x-y+z-2=0,\ x+2y-z-1=0)$. Stabilire se appartiene o no al piano di equazione: a) $5y-3z=0$; b) $4x+3y-z-4=0$. Trovare inoltre le equazioni parametriche della retta r.
[**R.** …; $x=t+1,\ y=-3t,\ z=-5t$]

63.4 PARALLELISMO E PERPENDICOLARITÀ FRA RETTE E FRA PIANI

63.4.1 Abbiamo avuto occasione di prendere in esame alcuni casi particolarmente semplici di piani paralleli o perpendicolari e di rette parallele o perpendicolari. Ci proponiamo in questo paragrafo di allargare il discorso a casi più generali. Lo faremo però omettendo le dimostrazioni, ma limitandoci ad enunciare i risultati ed a presentare qualche semplice applicazione, anche con la tua collaborazione.

Incominciamo occupandoci del **piano contenente una data retta e parallelo ad uno degli assi coordinati**. Lo facciamo con un esercizio che però non lede la generalità del procedimento.

ESERCIZIO. Sia la retta r di equazioni $\{x+2y-z+1=0,\ 2x-y+3z=0\}$. Determinare il piano passante per essa e parallelo all'asse x.
RISOLUZIONE. Il piano cercato appartiene al fascio di piani di asse r (cfr.: n° 63.3.5), la cui equazione è la seguente, dove k è un parametro reale:

$$(x+2y-z+1)+k(2x-y+3z)=0, \text{ vale a dire: } (1+2k)x+(2-k)y+(-1+3k)z+1=0.$$

Si tratta di stabilire per quale valore di k quest'equazione non contiene il termine in x, dovendo essa rappresentare un piano parallelo all'asse x. E ciò accade per 1+2k=0 ossia per $k=-1/2$. Il piano cercato ha pertanto la seguente equazione:

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)y+\left(-1-\frac{3}{2}\right)z+1=0, \quad \text{ossia:} \quad 5y-5z+2=0\,.$$

Ti proponiamo di risolvere qualche esercizio.

1. Trovare l'equazione del piano passante per la retta di equazioni $\{x+2y+1=0,\ 2y+z+2=0\}$ e parallelo all'asse y.
2. Trovare l'equazione del piano passante per la retta di equazioni $\{x+y+z=0,\ 2x+3y+z+2=0\}$ e parallelo all'asse z.

63.4.2 Più complesso si presenta il procedimento idoneo a determinare l'equazione del **piano contenente una data retta e parallelo ad un'altra retta che non sia parallela ad alcuno degli assi di riferimento**.

Un procedimento, forse il più seguito, fa ricorso a proprietà del calcolo matriciale: preferiamo non occuparcene. Proponiamo invece un procedimento alternativo. Anche adesso lo facciamo attraverso un esercizio, che però non inficia la generalità del procedimento medesimo.

ESERCIZIO. Determinare l'equazione del piano passante per la retta r di equazioni $\{x+2y-z+1=0,\ 2x-y+3z=0\}$ e parallelo alla retta s di equazioni $\{x+2y-1=0,\ y+z=0\}$.

RISOLUZIONE. Il piano cercato, come nell'esercizio precedente ha equazione del tipo seguente:

$$(1+2k)x+(2-k)y+(-1+3k)z+1=0.$$

Troviamo il punto intersezione di questo generico piano con la retta s. Per questo bisogna risolvere il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} (1+2k)x+(2-k)y+(-1+3k)z+1=0 \\ x+2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

A conti fatti (eventualmente con l'uso di un idoneo software matematico) si trova:

$$x=\frac{4k-5}{8k-1},\quad y=\frac{2k+2}{8k-1},\quad z=\frac{2k+2}{1-8k}.$$

La condizione, affinché il piano sia parallelo alla retta s, è che questo punto non esista. Il che accade se e solo se $8k-1=0$, ossia $k=1/8$. Il piano cercato ha pertanto la seguente equazione:

$$\left(1+\frac{2}{8}\right)x+\left(2-\frac{1}{8}\right)y+\left(-1+\frac{3}{8}\right)z+1=0,\ \text{ vale a dire: }\ 10x+15y-5z+8=0.$$

Ti proponiamo di risolvere qualche esercizio.

1. Trovare l'equazione del piano passante per la retta di equazioni $\{x+2y+1=0,\ 2y+z+2=0\}$ e parallelo alla retta di equazioni $\{x+y=0,\ y+z=0\}$.
2. Trovare l'equazione del piano passante per la retta di equazioni $\{x+y+z=0,\ 2x+3y+z+2=0\}$ e parallelo alla retta di equazioni $\{2x+y+1=0,\ x+2z+2=0\}$.

63.4.3 Siano assegnati i due piani di equazioni:

$$\text{(a)}\ \ ax+by+cz+d=0,\quad \text{(b)}\ \ a'x+b'y+c'z+d'=0.$$

- Vale la seguente **condizione di parallelismo tra piani**:

I due piani di equazioni (a) e (b) sono paralleli se e solo se risulta:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}.$$

Se poi risulta pure che questi rapporti sono uguali al rapporto $\frac{d}{d'}$ allora i due piani coincidono, in caso contrario sono strettamente paralleli.

Ora, indicato con $\frac{1}{k}$ (dove k≠0) il valore dei precedenti rapporti uguali, si ha evidentemente:

$$a'=ka,\ \ b'=kb,\ \ c'=kc.$$

Ragion per cui l'equazione (b) diventa:

$$kax+kby+kcz+d'=0,$$

ossia, posto $\frac{d'}{k}=m$:

$$ax+by+cz+m=0.$$

Questo implica la seguente conclusione:

Due piani sono paralleli se e solo se le loro equazioni differiscono al più per il termine noto.

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

1. È assegnato il piano di equazione $2x+3y-2z+3=0$. Quali dei seguenti piani sono paralleli ad esso? Quali non lo sono?

a) $4x+6y+4z=0$; b) $6x+9y-6z+9=0$; c) $10x+15y-10z=0$; d) $4x-6y+4z+6=0$.

2. Trovare l'equazione del piano passante per il punto P e parallelo al piano α sapendo che:

a) $P(1,2,1),\ \ \alpha\equiv 2x+3y-z-4=0$. b) $P(1,-2,-1),\ \ \alpha\equiv x-2y+3z-1=0$.

c) $P\left(\frac{1}{2},0,-2\right),\ \ \alpha\equiv 3x-2z+2=0$.

- Vale la seguente **condizione di ortogonalità tra piani**:

I due piani di equazioni (a) e (b) sono ortogonali (o perpendicolari) se e solo se risulta:

$$\mathbf{aa' + bb' + cc' = 0}.$$

Naturalmente di piani condotti per un dato punto perpendicolarmente ad un dato piano ce ne sono infiniti: tutti quelli che contengono la retta condotta per il punto perpendicolarmente al piano.

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

1. È assegnato il piano di equazione $2x+3y-2z+3=0$. Quali dei seguenti piani sono ortogonali ad esso? Quali non lo sono?

a) $x+2y+4z+1=0$; b) $3x+2y-6z+9=0$; c) $x-y+z=0$; d) $2x+2z+3=0$.

2. Tra i piani di equazione:

$$(m-1)x+2y-mz+2=0\,,$$

dove m è un parametro reale, trovare quello perpendicolare al piano α sapendo che:

a) $\alpha\equiv 2x+3y-z-4=0$. b) $\alpha\equiv x-2y+3z-1=0$.

c) $\alpha\equiv 3x-2z+2=0$. d) $\alpha\equiv y-4z+2=0$.

63.4.4 Ci occupiamo adesso delle condizioni di parallelismo e ortogonalità fra rette.

- Vale la seguente **condizione di parallelismo tra rette**:

Due rette di parametri direttori rispettivamente (l, m, n) ed (l', m', n') sono parallele se e solo se risulta:

$$\mathbf{\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}}.$$

ESERCIZIO. È assegnata la retta di equazioni:

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\2y-z+2=0\end{cases}$$

Trovare le equazioni della retta parallela ad essa condotta per il punto $P(2,-1,1)$.

RISOLUZIONE. Conviene scrivere le equazioni della retta data nella forma [7] per evidenziare i suoi parametri direttori. A tal riguardo osserviamo che dalle due equazioni assegnate si ricava rispettivamente:

$$y = 2x + 1, \quad y = \frac{z-2}{2} \ ;$$

d'altro canto la prima di queste equazioni può essere scritta nella forma seguente:

$$y = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} .$$

Pertanto la retta assegnata può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{x + 1/2}{1/2} = y = \frac{z-2}{2} .$$

Questa equazione evidenzia che i parametri direttori della retta sono: $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$ o, se si preferisce: $(1,2,4)$. Ne discende che la retta cercata, condotta parallelamente alla retta data per il punto $\mathrm{P}(2,-1,1)$, ha le seguenti equazioni:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4} ,$$

ossia, in forma equivalente, le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

1. È assegnata la retta di equazioni

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} .$$

Quali delle seguenti rette sono parallele ad essa? Quali non lo sono?

a) $\frac{x}{3} = \frac{2y}{-3} = \frac{2z}{9}$; b) $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{6}$; c) $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ 3x - 2z - 8 = 0 \end{cases}$

2. Trovare l'equazione della retta passante per il punto P e parallela alla retta r sapendo che:

a) $P(1,2,1)$, r ha equazioni: $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

b) $P(1,-2,-1)$, r ha equazioni: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

- Vale la seguente **condizione di ortogonalità tra rette**:

Due rette di parametri direttori rispettivamente l, m, n ed l', m', n' sono ortogonali (o perpendicolari) se e solo se risulta:

$$\mathbf{l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0}.$$

Si tenga presente che nello spazio due rette ortogonali non sono necessariamente complanari. Ragion per cui, diversamente dal piano, di rette ortogonali condotte per un dato punto ad una data retta ce ne sono infinite: tutte quelle contenute nel piano condotto per il punto perpendicolarmente alla retta data.

ESERCIZIO. Trovare le equazioni delle infinite rette passanti per il punto $\mathrm{P}(1,2,-1)$ e ortogonali alla retta di equazioni:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{2} = z.$$

RISOLUZIONE. Le rette cercate hanno le seguenti equazioni:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+1}{n}.$$

Sotto la condizione seguente:

$$2\,l+2\,m+n=0.$$

Da quest'ultima relazione, esprimendo n in funzione di l ed m, si ricava: $n=-2l-2m$. Le precedenti equazioni della retta si possono scrivere pertanto nella forma seguente:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+1}{-2l-2m}$$

o anche, moltiplicando i tre membri per l e ponendo $\frac{m}{l}=p$, in quest'altra forma equivalente:

$$x-1=\frac{y-2}{p}=\frac{z+1}{-2p-2}.$$

In effetti, constatato che queste rette hanno parametri direttori $(1,p,-2p-2)$, mentre i parametri direttori della retta assegnata sono $(2,2,1)$, risulta:

$$1\cdot 2+p\cdot 2+(-2p-2)\cdot 1=2+2p-2p-2=0.$$

Come deve essere.

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

1. È assegnata la retta di equazioni:

$$\begin{cases}3x-2y=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

Quali delle seguenti rette sono ortogonali ad essa? Quali non lo sono?

a) $\frac{x}{-3}=\frac{3y}{2}=\frac{z}{4}$; b) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=z$; c) $\begin{cases}2x-y-1=0\\ x-2z-3=0\end{cases}$

2. Tra le rette di equazioni:

$$\frac{x-2}{k}=\frac{y-1}{2k-1}=z+1\,,$$

dove k è un parametro reale, trovare quella perpendicolare alla retta r sapendo che r ha equazioni:

a) $\frac{x}{-2}=\frac{2y}{3}=\frac{z}{4}$. b) $\begin{cases}2x+y-1=0\\ y-2z+2=0\end{cases}$

63.4.5 Concludiamo prendendo in esame parallelismo e perpendicolarità fra retta e piano.

- Vale la seguente **condizione di parallelismo tra retta e piano**:

Una retta di parametri direttori l, m, n ed il piano di equazione ax+by+cz+d=0 sono paralleli se e solo se risulta:

$$\mathbf{a\,l+b\,m+c\,n=\ 0}\,.$$

Si ricorda che, dati nello spazio un punto P ed un piano α, di rette condotte per P parallelamente al piano ne esistono infinite, contenute tutte in un medesimo piano, il piano parallelo ad α condotto per P. Ugualmente, di piani condotti per P parallelamente ad una retta r ne esistono infiniti, formanti il fascio di piani contenenti la retta s condotta per P parallelamente alla retta r.

ESERCIZIO. Sono dati i piani e le rette di equazioni rispettivamente:

$$2x-3y+kz-2=0,\qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{k}=z\,,$$

dove k è un parametro reale non nullo. Determinare, fra quelli considerati, il piano e la retta paralleli.

RISOLUZIONE. In virtù della condizione di parallelismo fra retta e piano, deve risultare:

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot k + k \cdot 1 = 0 \quad \text{da cui segue:} \quad k = 3.$$

Il piano e la retta cercati sono pertanto quelli di equazioni rispettive:

$$2x - 3y + 3z - 2 = 0, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = z\,.$$

- Vale la seguente **condizione di ortogonalità tra retta e piano**:

Una retta risulta perpendicolare (o ortogonale) al piano di equazione $ax+by+cz+d=0$, non parallelo ad alcuno degli assi coordinati (e pertanto: $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$), se e solo se i suoi parametri direttori sono **a, b, c.**

Questo implica immediatamente che la retta passante per il punto (x_0,y_0,z_0) e perpendicolare al piano di equazione $ax+by+cz+d=0$, non parallelo ad alcuno degli assi coordinati, ha equazioni:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}\,.$$

Se, al contrario, il piano è parallelo a qualcuno degli assi coordinati (mettiamo all'asse x), la retta perpendicolare al piano risulta ortogonale a tale asse.
Parimenti, il piano passante per il punto (x_0,y_0,z_0) e perpendicolare ad una retta di parametri direttori (a,b,c) ha equazione: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

ESERCIZIO. Sono assegnati il punto P(1,0,1) e le rette a, b di equazioni rispettivamente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Trovare le equazioni della retta r passante per P, ortogonale alla retta a e complanare con la retta b.

RISOLUZIONE. La retta r è individuata da due piani, passanti entrambi per P: uno è il piano α perpendicolare alla retta a, l'altro è il piano β complanare con la retta b. Le loro equazioni sono nell'ordine:

$$2x + 2y + z - 3 = 0, \quad x - 6y + 2z - 3 = 0.$$

Il sistema di queste due equazioni rappresenta esattamente la retta r.

63.5 CILINDRO E CONO

63.5.1 Premettiamo le definizioni di "cilindro" e "cono" alle quali faremo riferimento in questo paragrafo.

- Si definisce **cilindro** (più propriamente: **cilindro circolare indefinito**) la superficie generata da una retta g che ruota di un giro completo intorno ad una retta a, ad essa strettamente parallela (Fig. 9). La retta g si chiama *generatrice*, la retta a *asse di rotazione*.
- Si definisce **cono** (più propriamente: **cono circolare indefinito**) la superficie generata da una retta g che ruota di un giro completo intorno ad una retta a, che la intersechi in un punto V (Fig. 10). La retta g si chiama *generatrice*, la retta a *asse di rotazione*, il punto V vertice.

In base a tali definizioni la sezione di un piano perpendicolare all'asse di rotazione è una circonferenza sia nel caso del cilindro sia in quello del cono (ovviamente se il piano non passa per il vertice del cono). In realtà, com'è noto [(2)], tale sezione potrebbe essere una conica qualsiasi (anche degenere), ma con una posizione diversa del piano secante. Noi comunque non ce ne occuperemo in questa sede e ci limiteremo a fornire le equazioni di cilindro e cono solo nel caso in cui l'asse di rotazione sia parallelo ad uno degli assi coordinati e senza soffermarci sulle dimostrazioni.

[2] Cfr.: Unità 45: Coniche e luoghi geometrici, N° 45.4.

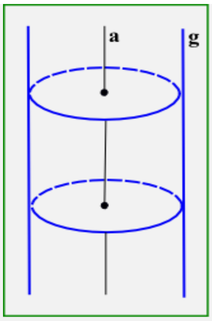


FIG. 9

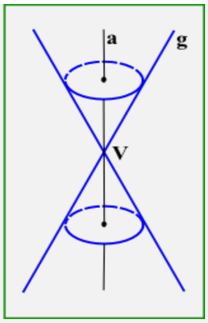


FIG. 10

63.5.2 Forniamo tali equazioni nello spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (Oxyz).

- Un ***cilindro*** (circolare indefinito) con asse parallelo all'asse z ha un'equazione del tipo:
$$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0},$$
dove a, b, c sono parametri reali tali che $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Evidentemente, l'intersezione di questa superficie con il piano xy è la circonferenza di equazioni:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
la quale ha centro nel punto $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, 0\right)$ e raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$. Ne discende che l'asse di rotazione del cilindro, vale a dire la perpendicolare al piano xy per il punto C, ha le seguenti equazioni:
$$\begin{cases} x = -a/2 \\ y = -b/2 \end{cases}$$

- Un ***cono*** (circolare indefinito) con asse parallelo all'asse z e vertice nel punto $V(x_V, y_V, z_V)$ ha un'equazione del tipo:
$$\mathbf{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2 - a\,(z - z_V)^2 = 0},$$
dove a è un parametro reale positivo.

L'intersezione di questa superficie con il piano xy è la circonferenza di equazioni:
$$\begin{cases} (x - x_V)^2 + (y - y_V)^2 - a\,z_V^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
la quale ha centro nel punto $C(x_V, y_V, 0)$ e raggio $r=|z_V|\sqrt{a}$.
L'asse di rotazione del cilindro, vale a dire la perpendicolare al piano xy per il punto V, ha ovviamente le seguenti equazioni:
$$\begin{cases} x = x_V \\ y = y_V \end{cases}$$
Analogo discorso si può fare per cilindri e coni con assi paralleli all'asse y o all'asse x.

NOTA BENE. Un idoneo software matematico permette di visualizzare sullo schermo di un computer le varie situazioni.

63.5.3 Ti proponiamo adesso alcuni semplici esercizi sull'argomento trattato. Su questo argomento non ce ne saranno altri nella sezione "verifiche".

1. Scrivi l'equazione del cilindro (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse z, sapendo che il piano xy lo interseca secondo una circonferenza avente il centro nel punto C e raggio r tali che:

a) $C(0,0,0)$, $r=3$; b) $C(-1,2,0)$, $r=1$; c) $C(1,-2,0)$, $r=2$.

2. Scrivi l'equazione del cilindro (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse y, sapendo che il piano xz lo interseca secondo una circonferenza avente il centro nel punto C e raggio r tali che:

a) $C(0,0,0)$, $r=3$; b) $C(-1,0,2)$, $r=1$; c) $C(1,0,-2,)$, $r=2$.

3. Scrivi l'equazione del cilindro (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse x, sapendo che il piano yz lo interseca secondo una circonferenza avente il centro nel punto C e raggio r tali che:

a) $C(0,0,0), r=3$; b) $C(0,-1,2), r=1$; c) $C(0,1,-2), r=2$.

4. Scrivi l'equazione del cono (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse z e vertice nel punto V(2,1,1), sapendo che il piano xy lo interseca secondo una circonferenza di raggio r tale che:

a) $r=1$; b) $r=\sqrt{2}$; c) $r=\frac{1}{2}$.

5. Scrivi l'equazione del cono (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse y e vertice nel punto V(2,1,1), sapendo che il piano xz lo interseca secondo una circonferenza di raggio r tale che:

a) $r=1$; b) $r=\sqrt{2}$; c) $r=\frac{1}{2}$.

6. Scrivi l'equazione del cono (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse x e vertice nel punto V(2,1,1), sapendo che il piano yz lo interseca secondo una circonferenza di raggio r tale che:

a) $r=1$; b) $r=\sqrt{2}$; c) $r=\frac{1}{2}$.

7. Scrivi l'equazione del cono (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse z e vertice nel punto V(0,0,0), sapendo che il piano di equazione $z=2$ lo interseca secondo una circonferenza di raggio r tale che:

a) $r=\frac{1}{3}$; b) $r=2\sqrt{2}$; c) $r=\frac{1}{2}$.

8. Scrivi l'equazione del cono (circolare indefinito) avente l'asse parallelo all'asse x e vertice nel punto V(0,0,0), sapendo che il piano di equazione $x=1$ lo interseca secondo una circonferenza di raggio r tale che:

a) $r=2$; b) $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $r=\frac{1}{4}$.

63.6 COORDINATE POLARI

63.6.1 Come nel piano, anche nello spazio è possibile fissare un sistema di coordinate polari.

Al riguardo si fissa anzitutto un punto O come *polo* e poi una retta **a** come *asse polare*. Bisogna infine fissare un *semipiano polare*: esso è il semipiano **ω,** avente a per origine.

Orbene, fissato un punto P dello spazio (Fig. 11), sono determinate le tre seguenti grandezze:

- la distanza **ρ** di P da O, con $\rho \geq 0$: si chiama ***raggio vettore***;
- l'angolo **θ** di cui deve ruotare la semiretta positiva Oa per sovrapporsi alla semiretta OP, con $0 \leq \theta \leq \pi$: si chiama ***colatitudine*** (o ***distanza zenitale***);
- l'angolo diedro, di ampiezza **φ**, di cui deve ruotare il semipiano polare ω per sovrapporsi al semipiano del punto P e della retta a, con $0 \leq \varphi < 2\pi$: si chiama ***longitudine*** (o ***azimuth***).

Viceversa, fissate le grandezze ρ, θ e φ, è individuato il punto P sulla superficie sferica.

I tre numeri ρ, θ e φ sono le ***coordinate polari*** del punto P.

C'è ovviamente un legame fra le coordinate cartesiane di P e le sue coordinate polari. Per esplicitarlo basta assumere come origine del riferimento cartesiano il polo O del riferimento polare, come asse z l'asse polare a e come piano xz il piano del semipiano polare (Fig. 12).

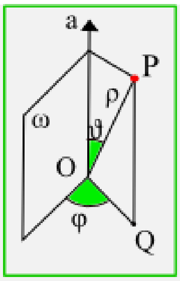


FIG. 11

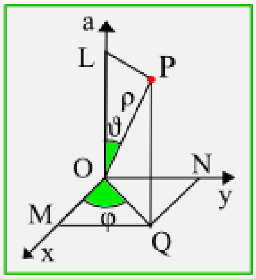


FIG. 12

Orbene, chiamata Q la proiezione ortogonale di P sul piano xy ed L è la proiezione di P sull'asse z, e inoltre M ed N le proiezioni di Q sulle rette x ed y rispettivamente, si ha che:

- le misure dei segmenti orientati (O,M), (O,N) e (O,L) sono rispettivamente l'ascissa x, l'ordinata y e la quota z del punto P;
- le misure, in radianti, degli angoli $L\hat{O}P$ ed $M\hat{O}Q$ sono rispettivamente la colatitudine e la longitudine del punto P, mentre la distanza $\overline{PO}$ è il raggio vettore.

Ora, nel triangolo OMQ, rettangolo in M, si ha:

$$\overline{OM}=\overline{OQ}\cos\varphi \text{ e } \overline{MQ}=\overline{ON}=\overline{OQ}\sin\varphi;$$

d'altro canto, nel triangolo OLP, rettangolo in L, si ha:

$$\overline{LP}=\overline{OQ}=\overline{OP}\sin\theta=\rho\sin\theta \text{ e } \overline{OL}=\overline{OP}\cos\theta\,.$$

In definitiva si hanno le formule che esprimono le coordinate cartesiane (x, y, z) di P in funzione delle sue coordinate polari (ρ, θ, φ):

$$\mathbf{x=\rho\sin\theta\cos\varphi}\,,\quad \mathbf{y=\rho\sin\theta\sin\varphi}\,,\quad \mathbf{z=\rho\cos\theta}\,.$$

63.6.2 Ti proponiamo di risolvere i seguenti semplici esercizi. Non ne troverai altri nella sezione "verifiche" su questo argomento.

a) Calcolare le coordinate cartesiane del punto di longitudine 60° e colatitudine 30°, sapendo che ha raggio vettore 1. $\left[\mathbf{R.}\;\; x=\frac{1}{4}\,,\; y=\frac{\sqrt{3}}{4}\,,\; z=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

b) Calcolare le coordinate cartesiane del punto di coordinate polari (ρ,θ,φ) tali che $\rho=25$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$, $\tan\varphi=\frac{3}{4}$ e inoltre: $0<\theta<\pi$ e $0<\varphi<\pi$. $[\mathbf{R.}\;\; x=16, y=15, z=-15]$

c) Dimostrare che le coordinate polari (ρ, θ, φ) del punto di coordinate cartesiane (x, y, z) soddisfano alle seguenti relazioni:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}\,,\quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

d) Calcolare le coordinate polari del punto P, sapendo che le sue coordinate cartesiane sono $\left(\sqrt{3}, 3, 2\right)$. $[\mathbf{R.}\;\; \theta=\varphi=60°,\; \rho=4]$

e) Calcolare le coordinate polari del punto P, sapendo che le sue coordinate cartesiane sono $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3}\right)$. $[\mathbf{R.}\;\; \varphi=45°, \theta=30°,\; \rho=8]$

VERIFICHE [3]

Nota Bene:
1) Quando non è detto esplicitamente, lo spazio si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz).
2) Riguardo ai paragrafi 63.5, 63.6 riteniamo che siano sufficienti gli esercizi proposti durante lo svolgimento della parte teorica ed è per questo che non se ne trovano altri nella sezione "verifiche".

Coordinate cartesiane nello spazio (nn. 1-11).

1. Di ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa:
- a) Il punto (1,1,0) appartiene all'asse z.
- b) Il punto (a,0,0), dove a è un numero reale, appartiene al piano xy.
- c) I punti (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) sono vertici di un triangolo equilatero di lato lungo 1.
- d) Il punto (0,0,-2) appartiene al semiasse negativo z.
- e) Il punto (1,0,p), dove p è un numero reale positivo, appartiene al piano zx.

2. Un cubo, il cui spigolo ha lunghezza 2, ha un vertice nel punto O ed i tre spigoli che concorrono in O sono contenuti nei tre assi coordinati; inoltre il vertice opposto ad O è situato nel primo ottante. Determinare le coordinate dei vertici del cubo.

3. Il tetraedro regolare ABCD, il cui spigolo ha lunghezza 1, ha il vertice A nel punto O, il vertice B sulla semiretta positiva delle y e il vertice C nel semipiano formato dai punti di coordinate (x,y,0) con x>0. Inoltre il vertice D è situato nel primo ottante. Determinare le coordinate dei vertici del tetraedro .
$\left[\mathbf{R.}\ \ldots,\ C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\ D\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$

4. Con riferimento al tetraedro dell'esercizio precedente, trovare le componenti, secondo gli assi coordinati, dei seguenti vettori: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BA}$ e verificare che la loro somma è il vettore nullo.
$\left[\mathbf{R.}\ \overrightarrow{AC}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{CD}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \ldots\right]$

5. Il punto A è situato sul semiasse positivo delle x, il punto B sul semiasse positivo delle y e il punto C sul semiasse positivo delle z; i punti A', B', C' siano nell'ordine i simmetrici di A, B, C rispetto al punto O. Sapendo che i punti A, B, C, A', B', C' sono i vertici di un ottaedro regolare il cui spigolo è lungo s, trovare le coordinate di quei vertici. $\left[\mathbf{R.}\ A\left(\frac{s}{2}\sqrt{2},0,0\right),\ \ldots\right]$

6. Determinare il punto medio del segmento AB, sapendo che:

a) $A(2,-1,0),\ B(-1,-2,3)$; b) $A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2},-1\right),\ B\left(-\frac{1}{2},-2\sqrt{2},2\right)$; c) $A\left(\frac{3}{2},0,\sqrt{3}\right),\ B\left(0,-\frac{3}{2},-\sqrt{3}\right)$
$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ \left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\ldots\right]$

7. Con riferimento agli stessi punti A, B assegnati nell'esercizio precedente, calcolare la distanza AB. $\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ \sqrt{19};\ \ldots\right]$

8. Determinare il punto medio e la lunghezza del segmento AB, sapendo che:

a) $A(3,-1,2),\ B(3,-2,1)$; b) $A\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right),\ B\left(2,\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$; c) $A\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right),\ B\left(2,\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$.

---

[3] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

9. Considerati i punti:

$$A\left(\frac{3}{2},-2,\frac{1}{3}\right),\ \ B\left(-\frac{1}{4},\frac{2}{5},0\right),\ \ C\left(1,0,-\frac{1}{2}\right),$$

determinare il punto D in modo che risulti un parallelogramma il quadrilatero convesso:

a) ABCD; b) ABDC; c) ADBC.

$\left[\text{R. a) } \left(\frac{11}{4},-\frac{12}{5},-\frac{1}{6}\right);\ \text{b) } \left(-\frac{3}{4},\frac{12}{5},-\frac{5}{6}\right);\ \text{c) } \left(\frac{1}{4}.-\frac{8}{5},\frac{5}{6}\right)\right]$

10. Determinare le coordinate del baricentro di un triangolo di vertici assegnati $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$.

11. Rappresentare graficamente il tetraedro avente per vertici i punti (0,0,0), (1,1,0), (0,1,0), (1,1,1). Verificare poi che il punto G, che ha come coordinate la media aritmetica delle coordinate omonime del tetraedro, divide ciascuno dei 4 segmenti che congiungono un vertice con il baricentro della faccia opposta in due parti, di cui quella che contiene il vertice è il triplo dell'altra. (Il punto G si chiama ***baricentro*** del tetraedro)

Sfera nello spazio cartesiano (nn. 12-20).

12. Trovare l'equazione delle sfere passanti per i punti di coordinate (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Tra queste sfere determinare poi quella che:

a) passa per il punto (1,1,1); b) ha raggio uguale a $\sqrt{2}$; c) passa per il punto $(0,2,-1)$.

[**R.** $x^2+y^2+z^2-kx-ky-kz+k-1=0$;...]

13. Tra le sfere aventi il centro nel punto di coordinate (k,0,0), dove k è un parametro reale, determinare quella che :

a) passa per i punti (0,0,0) e (2,0,0); b) passa per il punto (0,0,0) ed ha raggio uguale a 3.

14. Trovare l'equazione della sfera che ha per diametro il segmento AB tale che A(0,0,0) e B(2,1,–1).

15. Trovare l'equazione di una sfera, sapendo che il triangolo ABC è inscritto in un suo cerchio massimo e conoscendo le coordinate dei vertici di tale triangolo, che sono esattamente A(0,0,0), B(0,1,0), C(2,0,0). [**R.** $x^2+y^2+z^2-2x-y=0$;...]

16. È dato il triangolo di vertici A(3,0,0), B(0,3,0), C(0,0,3). Tra le sfere aventi il centro nel baricentro del triangolo, determinare quella che:

a) passa per A; b) passa per B; c) passa per C; d) passa per il punto $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

17. Si consideri la seguente equazione: $x^2+y^2+z^2-3x-y+2z=0$.
Dopo aver verificato che rappresenta una sfera, determinarne le coordinate del centro e il raggio.

18. Si consideri la seguente equazione: $x^2+y^2+z^2-(k-1)x+2y+k=0$, dove k è un parametro reale.

a) Calcolare per quali valori di k rappresenta una sfera.

b) Tra le sfere che hanno l'equazione data determinare quella che ha il raggio uguale a $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Stabilire se, tra le sfere che hanno l'equazione assegnata, ne esiste una passante per il punto (1,1,1).

[**R.** a) $k<1$ oppure $k>5$; ...]

19. Sono assegnati i punti $A(1,1,0)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$. Determinare un punto D equidistante dai punti O, A, B, C (O è l'origine del sistema di riferimento). $\left[\textbf{R.}\ D\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\right]$

20. Sono assegnati i punti $A(1,1,0)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,0,1)$. Dimostrare che non esiste un punto equidistante dai punti O, A, B, C, D (O è l'origine del sistema di riferimento).

Rette e piani nello spazio cartesiano (nn. 21-44).

21. Dopo aver scritto le equazioni della generica retta passante per il punto $(2,1,-2)$, trovare fra tali rette quella che passa per il punto: a) $(1,2,0)$; b) $(3,0,-1)$. $\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\text{a) } x=-\frac{1}{2}z+1,\ y=\frac{1}{2}z+2;\ \text{b)}\ldots\right]$

22. Dopo aver trovato le equazioni della retta passante per i punti A, B, trovare le coordinate del suo punto C, sapendo che:

a) $A(2,1,-2), B(1,2,0), x_C=-1$; b) $A(2,1,-2), B(3,0,-1), x_C=-2$.

23. Verificare se sono allineati i punti A, B, C, sapendo che:

a) $A(2,1,-2), B(1,2,0), C(-1,2,-3)$; b) $A(2,1,-2), B(1,2,0), C(-2,-1,1)$.

24. Trovare l'equazione del piano passante per i punti:

a) $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,2)$; b) $(0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$; c) $(0,1,1), (0,2,2), (0,-3,-3)$.

[**R.** a) $2y-z=0$; b) ...; c) !?]

25. Rappresentare graficamente la piramide avente il vertice nel punto $V(0,0,2)$ è per base il quadrilatero di vertici $O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0)$. Trovare quindi le equazioni delle sue facce e dei suoi spigoli.

26. Quattro vertici di un ottaedro regolare sono i punti $O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,2,0)$ e il punto C simmetrico di O rispetto alla retta AB. Trovare le coordinate degli altri due vertici D ed E dell'ottaedro. Trovare quindi le equazioni dei piani diagonali OCD e ABD e verificare che ad essi appartiene anche il punto E.

[**R.** ...; $x-y=0$, $x+y-2=0$]

27. Trovare il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali che $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=1$, essendo A e B i punti di coordinate rispettivamente $(0,0,0)$ e $(1,-1,2)$.

28. Il triangolo ABC è tale che $A(a,0,0), B(0,2b,0)$ e $C(0,0,3c)$, dove a, b, c sono parametri reali positivi. Determinare il luogo del suo baricentro, sapendo che la somma delle distanze dei vertici del triangolo dall'origine del sistema di riferimento è uguale ad 1 . [**R.** $3x+3y+3z-1=0$]

29. Sono dati il punto $P(0,0,1)$ e la retta r di equazioni $x=2z+1$, $y=z+2$. Dopo aver verificato che il punto P non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano individuato dal punto e dalla retta.

[**R.** $x-y-z+1=0$]

30. ® È dato il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ y+2z=2 \end{cases}$$

a) Qual è la sua soluzione? Fornirne un'interpretazione geometrica.

b) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il sistema delle tre equazioni abbia la stessa soluzione del sistema assegnato. Fornire un'interpretazione geometrica.

c) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il nuovo sistema delle tre equazioni sia impossibile. Fornire un'interpretazione geometrica.

d) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il nuovo sistema delle tre equazioni abbia come soluzione una terna ordinata (x,y,z) e determinare questa terna. Fornire un'interpretazione geometrica.

31. Sono assegnati i piani α, β di equazioni rispettivamente:

$$x+y-z-3=0, \quad 2x+y-3z-4=0.$$

a) Determinare i parametri direttori della retta r comune ai due piani.

b) Dopo aver verificato che il punto P(1,1,1) non appartiene alla retta r, trovare le equazioni parametriche della retta s condotta per P parallelamente ad r.
c) Trovare l'equazione del piano passante per il punto Q (2,0,0) e parallelo al piano β.
d) Trovare l'equazione del piano contenente la retta r e perpendicolare al piano α.
e) Stabilire se la retta r appartiene o no al piano di equazione 3x–2y–4z+1=0.

[**R.** a) (2,–1,1); b) (x=2t+1, y=–t+1, z=t+1); c) ... ; d) y+z–2=0; e) ...]

32. Ricordiamo che due rette i dicono ***complanari*** se esiste un piano che le contiene entrambe (il che accade quando le due rette sono parallele o incidenti) e ***sghembe*** quando non esiste alcun piano che le contenga.
Trovare una strategia idonea a stabilire se le rette r ed s sono complanari o sghembe sapendo che:

a) $r \equiv \dfrac{x+1}{1/2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 4x-z+1=0 \end{cases}$

b) $r \equiv \left\{x=2t-1, y=t,\ z=\dfrac{1}{2}t+1\right\} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y-4z+4=0 \end{cases}$

c) $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-z-1=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases}$

33. Esercizio risolto. Sono assegnati il punto P(1,0,2) e il piano α di equazione: 3x+4y–12z+5=0. Calcolare la distanza del punto dal piano.

Risoluzione. Esiste una formula analoga a quella del piano per calcolare la distanza dist(P,α) di un punto $P(x_P, y_P, z_P)$ da un piano α di equazione ax+by+cz+d=0 ed è la seguente:

$$\text{dist}\,(P,\alpha)=\frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

la quale, nel caso in esame, fornisce:

$$\text{dist}\,(P,\alpha)=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 0-12\cdot 2+5|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{16}{13}.$$

Noi tuttavia, giusto per complicarci l'esistenza, preferiamo seguire un procedimento alternativo, ancorché più noioso per le lungaggini dei calcoli, per semplificare i quali ci aiutiamo con l'uso di un idoneo software matematico. Precisamente seguiremo questo procedimento:
a) Si trova dapprima la retta r passante per P e perpendicolare al piano α.
b) Si trovano quindi le coordinate del punto H in cui la retta r interseca il piano α (H è il piede della perpendicolare condotta da P ad α).
c) Si calcola infine la distanza dist(P,H) del punto P dal punto H, che è esattamente la distanza cercata.

Incominciamo a determinare la retta r. Essa ha equazioni:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-0}{4}=\frac{z-2}{-12}\ ,\quad \text{ossia, in forma equivalente:}\quad \begin{cases} 4x-3y-4=0 \\ 12y+4z-8=0 \end{cases}$$

Il punto M si ottiene risolvendo il sistema formato dalle equazioni della retta r e del piano α, vale a dire il sistema delle seguenti equazioni:

$$4x-3y-4=0,\ \ 12y+4z-8=0,\ \ 3x+4y-12z+5=0\,.$$

Si trova: $H\left(\dfrac{217}{169},\dfrac{64}{169},\dfrac{146}{169}\right)$.

In definitiva: $\text{dist}\,(P,\alpha)=\text{dist}\,(P,H)=\sqrt{\left(1-\dfrac{217}{169}\right)^2+\left(\dfrac{64}{169}\right)^2+\left(2-\dfrac{146}{169}\right)^2}=\dfrac{16}{13}\,.$

34. Nel piano di equazione y=3 sono assegnati i punti A(1,3,0) e B(1,3,4).

a) Trovare, in tale piano, le coordinate dei punti C, D ($x_C>x_D$) tali che il quadrilatero convesso avente per vertici i punti A, B, C, D e diagonale AB sia un quadrato.
b) Determinare, quindi, le coordinate dei punti E, F ($y_E>y_F$) in modo che questi punti e i vertici del quadrato suddetto siano i vertici di un ottaedro regolare.
c) Trovare, infine, le equazioni delle sfere circoscritta all'ottaedro e inscritta in esso.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ldots\ ;\ \text{b) } E(1,5,2),\ F(1,1,2);\ \text{c) } x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+10=0,\ x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+\frac{38}{3}=0\right]$

35. Sono assegnati i punti

$$A\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2},3\right),\ B\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},4\right),\ C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},4\right),\ D\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3\right).$$

a) Verificare che sono vertici di un tetraedro regolare.
b) Calcolare area e volume del tetraedro.
c) Trovare le equazioni delle sfere circoscritta al tetraedro e inscritta in esso.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b) } 2\sqrt{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{9};\ \text{c) } x^2+y^2+z^2-4x+2y-7z+\frac{65}{4}=0,\ x^2+y^2+z^2-4x+2y-7z+\frac{617}{36}=0\right]$

36. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti A(3,1,0), B(3,–1,2), C(1,1,2). Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare. $\left[\mathbf{R.}\ \text{2 sol.: } (1,-1,0),\ \left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)\right]$

[Quesito assegnato nell'esame di Stato 2018, sessione ordinaria, maturità scientifica]

37. Sono assegnati i piani α, β di equazioni rispettivamente:

$$2x-2y+z-1=0,\quad x-3y+2z+2=0.$$

a) Determinare i parametri direttori della retta r comune ai due piani.
b) Trovare l'equazione del piano passante per il punto P(1,–1,2) e perpendicolare alla retta r.
c) Spiegare perché la retta s di equazioni parametriche $\{x=1+2t,\ y=2-t,\ z=1+t\}$ non è parallela né ortogonale alla retta r.
d) Tra i piani contenenti la retta s determinare le equazioni del piano parallelo alla retta r e quelle del piano che interseca la retta r nel punto di ascissa 3.

[**R.** a) (1, 3, 4); … ; d) $x+y-z-2=0$, $7x+6y-8z-11=0$]

38. Sono assegnati il punto P(0,1,1) e le rette a, b di equazioni rispettivamente:

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases},\qquad x=-2y=-z-1\,.$$

Determinare i parametri direttori della retta r passante per P, ortogonale alla retta a e complanare con la retta b. [***R.*** 2, 1, 8]

39. Sono assegnati il punto P(2,1,–1) e la retta r di equazioni parametriche:

$$x=2-\frac{1}{2}t,\ \ y=2t,\ \ z=1-t\,.$$

a) Trovare l'equazione del piano α passante per P e perpendicolare ad r.
b) Determinare le coordinate del punto H in cui il piano α interseca la retta r (questo punto è la ***proiezione ortogonale di P su r***).
c) Calcolare la distanza dei punti P e H (questa distanza è la ***distanza del punto P dalla retta r***).

$\left[\mathbf{R.}\ \ldots\ ;\ \text{b) } H\left(\frac{34}{21},\frac{32}{21},\frac{5}{21}\right);\ldots\right]$

40. È assegnata la retta r di equazioni parametriche:

$$x=1-2t,\ \ y=2-t,\ \ z=1+\frac{1}{2}t.$$

a) Trovare le coordinate del punto A in cui essa interseca il piano xy.
b) Chiamato P il generico punto della retta r, diverso da A, si chiami H la sua proiezione ortogonale sul piano xy e se ne scrivano le coordinate.
c) Trovare le equazioni della retta AH (questa retta è la ***proiezione ortogonale della retta r sul piano xy***) e si calcoli la tangente dell'angolo $P\widehat{A}H$ (quest'angolo è l'***angolo della retta r con il piano xy***).

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } A(5,4,0);\ \text{b) } H(1-2t,\, 2-t);\ \text{c) } \{z=0,\, x-2y+3=0\},\ \frac{\sqrt{5}}{10}\right]$$

41. È assegnata la retta r di equazioni parametriche:

$$x = 1 - 2t,\ \ y = 2 - t,\ \ z = 1 + t.$$

a) Trovare le coordinate del punto A in cui essa interseca il piano α di equazione $x+y+z=0$.
b) Chiamato P il generico punto della retta r, diverso da A, si chiami H la sua proiezione ortogonale sul piano α e se ne scrivano le coordinate.
c) Trovare le equazioni della retta AH (questa retta è la ***proiezione ortogonale della retta r sul piano α***) e si calcoli la tangente dell'angolo $P\widehat{A}H$ (quest'angolo è l'***angolo della retta r con il piano α***).

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } A(-3,0,3);\ \text{b) } H\left(-\frac{4t+1}{3},\, \frac{2-t}{3},\, \frac{5t-1}{3}\right);\ \text{c) } \{x-4y+3=0,\, 5y+z-3=0\},\ \frac{\sqrt{14}}{7}\right]$$

42. Sono assegnati il punto $P(1,-1,2)$ e il piano α di equazione $x+2y-3z+3=0$.
A) 1. Verificare che il punto non appartiene al piano.
   2. Trovare l'equazione del piano β passante per P e parallelo ad α.
   3. Trovare le coordinate del punto Q in cui il piano β interseca l'asse z.
B) 1. Trovare le equazioni della retta passante r per i punti P e Q.
   2. Trovare l'equazione del piano γ contenente la retta r e perpendicolare al piano α.
C) 1. Trovare le equazioni parametriche della retta s in cui il piano γ interseca il piano α (questa retta è la ***proiezione ortogonale della retta r sul piano α***).
   2. Verificare che le due rette r ed s sono parallele.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{A)}\ldots;\text{B1) } \{x+y=0,\ \ x+3z-7=0\},\ \text{B2) } 11x+8y+9z-21=0;\ \text{C1) } \left\{x=t,\, y=\frac{6-7t}{7},\, z=\frac{33-7t}{21}\right\};\ \ldots\right]$$

43. Sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$r \equiv \{2x - 3y + 1 = 0,\ z = -2\},\quad s \equiv \{x - y - 2 = 0,\ z = 2\}\,..$$

a) Spiegare perché le due rette sono sghembe.
b) Esistono due piani paralleli, α e β, il primo contenente la retta r ed il secondo contenente la retta s: trovare le loro equazioni e calcolare la loro distanza (questa distanza è la ***distanza delle due rette sghembe r ed s***).

44. Sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}\quad \text{e}\quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

a) Verificare che le due rette sono ortogonali ma non complanari (sono due rette sghembe).
b) Esistono due piani paralleli, α e β, il primo contenente la retta r ed il secondo contenente la retta s: trovare le loro equazioni.
c) Calcolare la distanza dei piani α, β (questa distanza è ***la distanza delle due rette sghembe r ed s***).

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b) } x+z=0,\ \ x+z-1=0;\ \text{c) } \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

45. Sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{2}.$$

a) Verificare che le due rette non sono complanari (sono due rette sghembe).
b) Esistono due piani paralleli, α e β, il primo contenente la retta r ed il secondo contenente la retta s: trovare le loro equazioni.
c) Calcolare la distanza dei piani α, β (questa distanza è ***la distanza delle due rette sghembe r ed s***).

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b)}\ x-3y-5z+5=0,\ 3x-5y-5z+17=0;\ \text{c)}\ \frac{12}{\sqrt{35}}\right]$

46. Sono assegnati i piani di equazioni:

$$z=0, \quad z=1, \quad z=2$$

e la sfera di cui un diametro è il segmento di estremi $(0,0,0)$ e $(2,4,-4)$.
Fra i piani assegnati ve n'è uno esterno alla sfera, uno tangente e uno secante. Individuare tali piani, trovando anche, per quello tangente, il punto di contatto e, per quello secante, il raggio della circonferenza secondo cui esso seca la sfera. $\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\ (1,2,1);\ \sqrt{5}\right]$

47. Sono assegnate le rette di equazioni:

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-y+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=-2y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=-2y+10 \end{cases}$$

e la sfera di centro nel punto $(0,2,1)$ e raggio $\sqrt{5}$.
Fra le rette assegnate ve n'è una esterna alla sfera, una tangente e una secante. Individuare tali rette, trovando anche, per quella tangente, il punto di contatto e, per quella secante, la distanza dei punti in cui essa interseca la sfera. $\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\ (0,4,2);\ \sqrt{5}\right]$

48. È assegnata la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-2=0$- Dopo aver verificato che passa per il punto $A(2,1,1)$, trovare l'equazione del piano tangente ad essa nel punto A.

[**R.** Occorre tener presente che il piano cercato è perpendicolare nel punto A alla retta AC, dove C è il centro della sfera. La sua equazione è: $x+y+z-4=0$]

49. Sono assegnati il punto $A(1,0,0)$, la retta r di equazioni $\{y=2x,\ z=x-1\}$ e il piano α di equazione $z=2$.
a) Trovare l'equazione della sfera Σ passante per A, avente il centro sulla retta r e tangente al piano α.
b) Determinare le coordinate del punto in cui α e Σ si toccano.

GUIDA ALLA RISOLUZIONE. Una generica sfera ha equazione: … . Il suo centro C ha coordinate $(t,2t,t-1)$ ed essa passa per il punto $(1,0,0)$. Per cui la sfera ha equazione: … . Dovendo poi essere tangente al piano $z=2$, la circonferenza in cui questo piano interseca la sfera deve degenerare in un punto. Il che accade se è soddisfatta la condizione: $5t^2+2t-7=0$. Si ottengono pertanto due soluzioni.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) 2 sol.: } x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0,\ x^2+y^2+z^2+\frac{14}{5}x+\frac{28}{5}y+\frac{24}{5}z-\frac{19}{5}=0;\ \text{b)}\ (1,2,2),\ \left(-\frac{7}{5},-\frac{14}{5},2\right)\right]$

50. Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta $r:\{x=t,\ y=t,\ z=t\},\ t\in\mathbb{R}$, tangente al piano $\pi: 3x-y-2z+14=0$ nel punto $T(-4,0,1)$.
[Quesito assegnato nell'esame di Stato 2018, sessione ordinaria, indirizzo scientifico]

GUIDA ALLA RISOLUZIONE. Il centro C della superficie sferica deve appartenere alla retta r e alla retta p, perpendicolare al piano π nel punto $(-4,0,1)$. Le sue coordinate, dopo aver trovato le equazioni di p, si ottengono pertanto risolvendo il sistema: … . Di conseguenza le coordinate di C sono $(-1,-1,-1)$ e, considerato che il raggio della superficie sferica è $\overline{CT}=\ldots$, l'equazione della superficie sferica è … .

51. Sono assegnati il punto $A(-1,1,-1)$, il piano α di equazione $3x-2y+z+6=0$ e il piano β di equazione $x+y+2z-1=0$. Dopo aver verificato che $A\in\alpha$, trovare l'equazione della sfera avente il centro sul piano β e tangente in A al piano α . [**R.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-9=0$]

52. Sono assegnati i punti $C(2,0,0)$ e $T(3,1,1)$.

a) Trovare l'equazione della sfera Σ' avente il centro in C e passante per T.
b) Trovare l'equazione del piano tangente in T a Σ'.
c) Trovare l'equazione della sfera Σ" avente il centro sul piano di equazione y=2 e tangente in T alla sfera Σ' (N.B.: due sfere tangenti in un punto hanno in quel punto lo stesso piano tangente).
d) Verificare che le due sfere Σ' e Σ" sono uguali.

53. È assegnata la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-10x-4y+12=0$. Dopo aver verificato che passa per il punto T(1,1,0), trovare l'equazione della sfera tangente ad essa in T e avente il centro sul piano y=0 e verificare che le due sfere sono uguali. [**R.** $x^2+y^2+z^2+6x-8=0$]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che il punto medio del segmento AB, dove A(1,–1,0) e B(−1,1,0) è l'origine O del sistema di riferimento?
2. Se il punto A ha coordinate (x_A,y_A,z_A) e il punto B ha coordinate (x_B,y_B,z_B), quali sono le coordinate del punto C simmetrico di A rispetto a B? Quali quelle del punto D simmetrico di B rispetto ad A?
3. Un parallelepipedo rettangolo ha il centro nell'origine O del sistema di riferimento cartesiano e i suoi spigoli sono paralleli agli assi coordinati. Ammesso che un vertice del parallelepipedo abbia coordinate (1,2,3), quali sono le coordinate degli altri vertici? Quant'è lunga la diagonale del parallelepipedo?
4. È vero che l'equazione $x^2+y^2+z^2+2z-k=0$, dove k è un parametro reale, rappresenta una sfera per ogni valore di k?
5. È vero che, nel sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), l'equazione x=0 rappresenta l'asse y?
6. Quali equazioni rappresentano l'asse x nel sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz)?
7. Si vuole trovare l'equazione del piano contenente il punto P(1,0,1) e la retta r di equazioni $\{y=x+1,\ z=x-1\}$. Come si può procedere?
8. È vero che il piano individuato dal punto di coordinate (−1,1,−1) e dalla retta di equazioni $\{x=z-2,\ y=2z+3\}$ ha equazione y=2z+3?
9. Quali relazioni rappresentano il primo ottante del sistema di riferimento cartesiano (Oxyz)?
10. Stabilire se è vero che sono incidenti le rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-2z+2=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$$

RISPOSTE.

1. Sì. Il punto medio M di AB ha infatti coordinate:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-1}{2}=0,\quad y_M=\frac{y+y_B}{2}=\frac{-1+1}{2}=0,\quad z_M=\frac{z+z_B}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

2. Se il punto C è il simmetrico di A rispetto a B, allora il punto B è punto medio del segmento CA, per cui:

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{2}\ ,\quad y=\frac{y_A+y_C}{2}\ ,\quad z_B=\frac{z_A+z_C}{2}\ ;$$

ne consegue che:

$$x_C=2x_B-x_A,\quad y_C=2y_B-y_A,\quad z_C=2z_B-z_A.$$

Analogamente:

$$x_D=2x_A-x_B,\quad y_D=2y_A-y_B,\quad z_D=2z_A-z_B.$$

3. Le coordinate degli 8 vertici del parallelepipedo, compreso quello assegnato, si ottengono combinando i segni "+" e "–" in tutti i modi possibili nelle tre coordinate del punto assegnato. Per cui sono le seguenti:

$$(1,2,3),\ (-1,2,3),\ (1,-2,3),\ (1,2,-3),\ (-1,-2,3),\ (-1,2,-3),\ (1,-2,-3),\ (-1,-2,-3).$$

La diagonale è lunga: $2\sqrt{1^2+2^2+3^2}=2\sqrt{14}$.

4. È falso. Deve essere soddisfatta la condizione $4+4k>0$, ossia $k>-1$, affinché l'equazione rappresenti una sfera. Per $k=-1$ è soddisfatta dal solo punto reale $(0,0,-1)$, mentre per $k<-1$ l'equazione non è soddisfatta da alcuna terna di numeri reali.

5. È falso. L'equazione rappresenta il luogo dei punti dello spazio che hanno ascissa nulla, mentre l'ordinata e la quota possono essere qualsiasi. E questo luogo è esattamente il piano yz.

6. L'asse x può essere rappresentato dalle equazioni di due qualsiasi piani passanti per esso e, in particolare, dai piani xy ed xz, le cui equazioni sono $z=0$ e $y=0$.

7. L'equazione cercata è: $3x-y-2z-1=0$.

8. È così. Infatti la retta è data dall'intersezione dei due piani $x=z-2$ ed $y=2x+3$, mentre il punto di coordinate $(-1,1,-1)$ appartiene solo al secondo piano.

9. Il primo ottante del sistema di riferimento (Oxyz) è rappresentato dal sistema delle seguenti disequazioni: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

10. Si risolve il seguente sistema di tre equazioni nelle incognite x, y, z:

$$x-2y+1=0,\ \ y-2z+2=0,\ \ 2x+y-2=0\,,$$

nel quale le prime due equazioni sono quelle della retta r e la terza equazione è la prima equazione della retta s. Questo sistema ha la soluzione:

$$x=\frac{3}{5}\,,\ \ y=\frac{4}{5}\,,\ \ z=\frac{7}{5}\,.$$

Se questa soluzione soddisfa anche alla seconda equazione della retta s significa che le due rette hanno in comune il punto che ha le coordinate rappresentate dalla soluzione trovata. Siccome ciò non accade, nel senso che la suddetta soluzione non soddisfa alla seconda equazione della retta s, dobbiamo concludere che le due rette non sono incidenti.

Detto per inciso, siccome le due rette non sono neanche parallele, si deve concludere che sono due rette sghembe.

COMPLEMENTI: COORDINATE GEOGRAFICHE [4]

1. Sulla superficie terrestre, supposta sferica, è possibile stabilire un sistema di riferimento che permetta di orientarsi su di essa.

Per ottenere tale sistema di riferimento, incominciamo ad indicare con O il centro della Terra e con NS il diametro passante per i suoi poli, il polo nord N ed il polo sud S: si chiama *asse polare*. Si considera quindi il cerchio massimo contenuto nel piano perpendicolare ad NS: si chiama *piano equatoriale*. Ed infine si considera uno dei semicerchi massimi ottenuti intersecando la sfera con un piano contenente l'asse polare NS, per esempio il semipiano passante per Greenwich (punto G), popoloso sobborgo di Londra (Fig. 13): si chiama *semipiano polare*.

Fissato allora un qualsiasi punto P sulla superficie della sfera, sono individuate le ampiezze di due angoli:

[4] Questo paragrafo è opzionale. L'abbiamo voluto inserire perché costituisce un'interessante applicazione delle nozioni apprese nell'unità. Il suo studio, peraltro, può essere utile in altre discipline.

- l'angolo Θ che il raggio OP forma col piano equatoriale: si chiama ***latitudine***.
- l'angolo Φ che il semipiano di origine NS, passante per P, forma col semipiano polare: si chiama ***longitudine***;

Tali angoli sono considerati orientati. Precisamente:

- la latitudine si considera positiva se il punto P è situato dalla parte di N rispetto al piano equatoriale ed è negativa se è situato dalla parte di S; la latitudine varia da −90° a +90°; la latitudine positiva si dice anche "latitudine Nord", quella negativa "latitudine Sud";
- la longitudine si considera positiva se il semipiano polare deve ruotare in senso antiorario di un angolo minore di un angolo piatto per sovrapporsi al semipiano di origine NS, passante per P, e si considera negativa se la rotazione avviene in senso orario; per questa ragione la longitudine varia da −180° escluso a +180° incluso; la longitudine positiva si dice anche "longitudine Est", quella negativa "longitudine Ovest".

> Una breve nota storica.
> - Il criterio di indicare un punto della superficie terrestre con latitudine e longitudine fu seguito (e forse introdotto) da **Tolomeo** di Alessandria (II sec. d.C.) nell'opera ***Geographia***.
> - Nel secolo XIV il francese **Nicole Oresme** (circa 1323-1382), vescovo di Lisieux, filosofo, teologo e matematico, scrisse un'opera dal titolo ***Tractatus de latitudinibus formarum***, ma in essa egli utilizza i termini longitudine e latitudine in modo equivalente alle nostre ascissa e ordinata e quindi più come riferimento in un piano che come riferimento su una superficie sferica. In altri termini egli anticipa la geometria di Cartesio, piuttosto che sviluppare l'idea di Tolomeo.

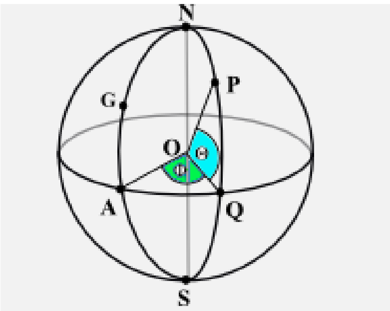


FIG. 13

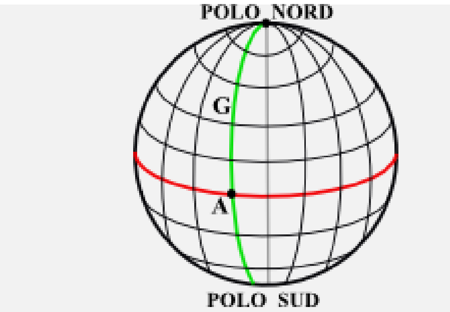


FIG. 14

Il sistema di riferimento latitudine-longitudine è detto sistema di ***coordinate geografiche***. È utile in geografia, in astronomia, nella navigazione sia marittima che aerea. È utile, in particolare, per individuare una posizione sulla superficie terrestre, pur con qualche correttivo dal momento che la Terra non è esattamente sferica.

La superficie terrestre viene poi considerata suddivisa in *meridiani* e *paralleli* (Fig. 14).

- Ogni circonferenza, secondo cui la superficie terrestre è intersecata dai piani contenenti l'asse terrestre, è divisa da quest'asse in due semicirconferenze: ciascuna di queste semicirconferenze si chiama ***meridiano***. Per convenzione la Terra (supposta sferica) si suppone divisa in 360 parti, individuati da 180 meridiani contati verso Est, a partire dal meridiano di Greenwich, e da 180 meridiani contati verso Ovest. ***I punti di uno stesso meridiano hanno la medesima longitudine***.
- I ***paralleli*** sono le circonferenze secondo cui la superficie terrestre è intersecata da piani paralleli all'Equatore: per convenzione se ne considerano 90 verso Nord e 90 verso Sud, oltre all'Equatore. ***I punti di uno stesso parallelo hanno la medesima latitudine***.

Nella figura 14, la linea rossa rappresenta l'Equatore, la linea verde il meridiano di Greenwich. Il punto A, nel quale si incontrano queste due linee, è situato nel Golfo di Guinea, a circa 445 km a Sud della città di Accra, capitale del Ghana. Il punto diametralmente opposto ad A si trova invece nella Polinesia (Pacifico Centrale), circa a metà strada fra le Isole Gilbert (a Nord-Ovest) e le Isole della Fenice (a Sud-Est).
In base alle convenzioni precedenti, possiamo fare alcune constatazioni:

a) All'Equatore è assegnata la latitudine di 0° e al meridiano di Greenwich è assegnata la longitudine di 0°. Per cui, il suddetto punto A ha coordinate geografiche $(0°,0°)$. Ci sono poi 4 paralleli particolari: i due *tropici* (del Cancro e del Capricorno) e i due *circoli polari* (artico e antartico): i tropici sono i paralleli di latitudine 23°27' Nord e Sud, i circoli polari sono i paralleli di latitudine $66°33'$ Nord e Sud.
b) L'Italia, isole comprese, è situata fra i $35°$ e i $48°$ di latitudine Nord e fra i $5°$ e i $19°$ di longitudine Est. Tra le città capoluogo di provincia: quella più ad Est è Lecce ($40°21'$ di latitudine Nord, $18°10'$ di longitudine Est), quella più ad Ovest è Torino ($45°4'$ N, $7°42'$ E), quella più a Nord è Bolzano ($46°29'$ N, $11°21'$ E), quella più a Sud è Ragusa ($36°55'$ N, $14°43'$ E).
c) Alla città di Roma competono le seguenti coordinate geografiche: $41°54'$ di latitudine Nord, $12°\ 29'$ di longitudine Est.
d) La città di Napoli è situata a $40°50'$ di latitudine Nord e $14°15'$ di longitudine Est.
e) La città di New York ha le seguenti coordinate geografiche: $40°42'$ di latitudine Nord, $74°0'$ di longitudine Ovest. Come dire che New York si trova praticamente sullo stesso parallelo di Napoli.

2. Una volta che sulla superficie terrestre sia stato stabilito il suddetto sistema di coordinate geografiche, è possibile calcolare la distanza di due punti qualsiasi situati sulla superficie terrestre. Per la verità, siccome la Terra non è perfettamente sferica, bisognerebbe fare altre considerazioni per avere delle eccellenti approssimazioni di tali distanze, ma se ci accontentiamo di risultati non troppo precisi, possiamo supporre che la Terra sia sferica e così faremo nel seguito di questi brevi cenni.
Per il calcolo delle suddette distanze bisogna, però, conoscere un elemento fondamentale: la misura del raggio della Terra. Orbene, questa misura fu trovata per la prima volta da **Eratostene** di Cirene (275 circa - 194 a.C.) con un procedimento che richiama sostanzialmente, anche se non in maniera esplicita, il concetto di coordinate geografiche. In realtà, Eratostene calcolò la lunghezza della circonferenza terrestre, ma da qui al calcolo del raggio il passo è breve. Precisamente, considerato che la misura della circonferenza terrestre trovata da Eratostene sarebbe 39.500 km, ne seguirebbe un raggio di circa 6.287 km.
Questa misura fu successivamente perfezionata fino ad ottenere il valore odierno della lunghezza del ***raggio medio*** R della Terra, che è $\mathbf{R \approx 6.372\ km}$.

Descriviamo il **procedimento di Eratostene**.
Egli, sulla base di risultati di astronomi precedenti, si era convinto che il Sole fosse ad una distanza così grande dalla Terra da poter ritenere paralleli quelli, fra i suoi raggi, che colpivano la Terra stessa. Sapeva inoltre che a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole si specchiava nei pozzi di Syene (odierna Assuan) ed era perciò sulla verticale di Syene, mentre contemporaneamente ad Alessandria – posta, secondo Eratostene, sullo stesso meridiano di Syene [5] – esso formava con la verticale un angolo α pari ad $1/50$ di angolo giro (Fig. 15). Concludeva che la circonferenza della Terra misurasse 50 volte la "distanza" Syene-Alessandria. Egli ricavò tale distanza in base al tempo che le carovane impiegavano a percorrerla e trovò che era di circa 5.000 stadi. Pertanto la circonferenza della Terra misurava all'incirca 250.000 stadi. Se-

[5] In realtà, Alessandria è situata a 29°55' di longitudine Est, mentre Assuan si trova a 32°56' di longitudine Est.

condo molti, 1 stadio equivale a circa 158 m [6], per cui la circonferenza della Terra sarebbe di circa 39.500 km. Misura straordinariamente vicina a quella reale che è circa 40.000 km, anche se questo risultato, secondo alcuni, è il frutto di una serie di errori che si compensano.

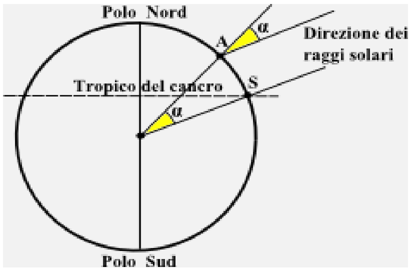


FIG. 15

Eratostene descrisse il procedimento nell'opera ***Sulla misurazione della Terra*** che però è andata perduta. Una sintesi del suo procedimento, forse non del tutto fedele, ci è pervenuta tramite un astronomo e matematico greco di nome **Cleomede**, della cui vita non sappiamo nulla. La sua sola opera rimastaci, dal titolo *De motu circulari corporum coelestium* (più comunemente conosciuta come *Coelestia*), è però un documento prezioso giacché fornisce testimonianze, spesso uniche, su nomi e fatti che lo hanno preceduto. Una di queste riguarda per l'appunto il procedimento seguito da Eratostene per calcolare la lunghezza del meridiano terrestre.

3. Possiamo passare, adesso, alla misura della distanza di due punti sulla superficie terrestre.
Ribadiamo che, indicati con R il raggio della Terra ed O il suo centro (Fig. 16) e chiamati P e Q due qualsiasi punti della superficie sferica, la distanza dist (P,Q) va calcolata su un arco di circonferenza massima, poiché tale arco realizza il minimo percorso tra tutti i possibili percorsi sulla superficie della Terra. Pertanto, posto di chiamare ω l'ampiezza in radianti dell'angolo $P\hat{O}Q$, risulta:

$$\mathbf{dist\ (P,Q) = R\ \omega}.$$

Il problema consiste, dunque, nel riuscire a calcolare ω. Lo faremo attraverso alcuni esempi, nei quali abbiamo utilizzato per i calcoli da effettuare, uno strumento di calcolo automatico.

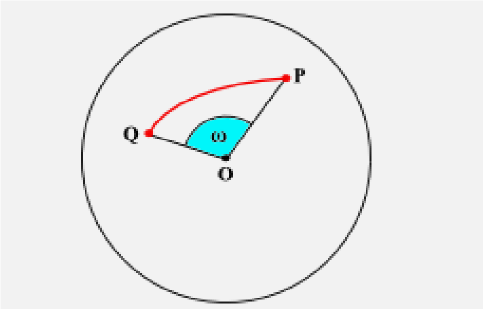


FIG. 16

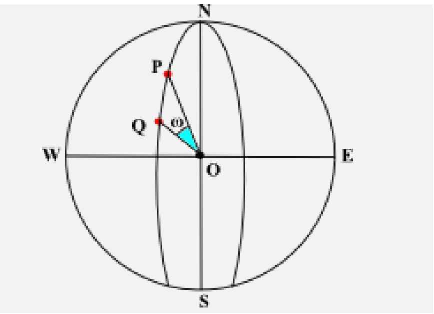


FIG. 17

[6] In realtà, non si conosce qual è esattamente la misura di uno "stadio". Tanto per dire, oltre a quella data qui di circa 158 m, altri valori erano 177 m circa e 184 m circa.

ESERCIZIO 1. Le città di Valencia (Spagna) e Londra (Gran Bretagna) sono situate grosso modo sul meridiano di Greenwich (la longitudine di Valencia è $-0°22'$, quella di Londra $+0°7'$), però Valencia ha una latitudine di $+39°27'$ e Londra di $+51°30'$. Quant'è la loro distanza?
RISOLUZIONE. In questo caso la risoluzione è estremamente semplice, dal momento che ω è uguale al valore assoluto della differenza fra le latitudini dei due punti P e Q (Fig. 17).
Dunque, siccome $\omega = 51°30'-39°27' = 12°3' \approx 0{,}21031$ rad, allora:

$$\text{dist (Valencia, Londra)} = 6372\times0{,}21031 \approx 1340 \text{ (km)}.$$

Qualche domanda.
- La città di Roma può essere considerata sullo stesso meridiano di Copenhagen (Copenhagen: 55°40' N, 12°34' E). Qual è la distanza fra le due città?
- Quanto distano i due tropici, posto naturalmente che la loro distanza sia calcolata su uno stesso meridiano?
- Quanto dista il tropico del Cancro dal circolo polare artico?

ESERCIZIO 2. Le città di Napoli e New York sono situate approssimativamente sullo stesso parallelo (circa 41° N). Quant'è lungo il percorso che si compie se si va da Napoli a New York muovendosi su tale parallelo? Qual è la distanza delle due città?
RISOLUZIONE. Con riferimento alla figura 18, supponiamo che il punto P indichi la città di Napoli e il punto Q quella di New York. Assumiamo che sia circa 41° la latitudine del parallelo passante per i due punti. Questo significa che l'angolo EÔP ha ampiezza α=41°. D'altra parte, l'angolo PĤQ ha ampiezza β uguale al valore assoluto della differenza fra le longitudini di P e di Q, ossia $\beta=14°15'+74°0'=88°15'\approx1{,}54025$ rad, per cui la lunghezza L dell'arco PQ di parallelo è $L=\overline{HP}\cdot\beta$. Bisogna calcolare la misura di HP.
Ora, nel triangolo rettangolo OHP, in cui l'angolo in P ha ampiezza α e l'ipotenusa OP è il raggio R della Terra, si ha: $\overline{HP}=\overline{OP}\cos\alpha\ \ R\cos 41°=6.372\times0{,}75471$ (km). Di conseguenza:

$$L = 6.372\times0{,}75471\times1{,}54025 \approx 7.407 \text{ (km)}.$$

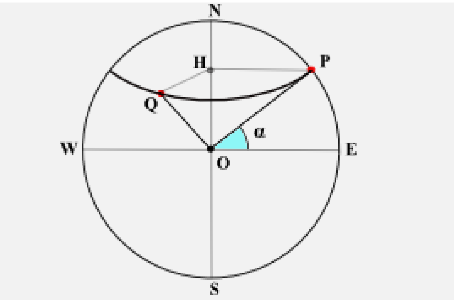


FIG. 18

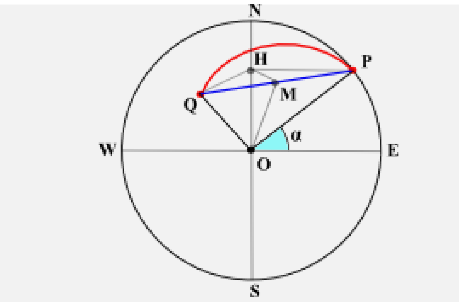


FIG. 19

La distanza fra Napoli e New York è invece uguale alla lunghezza R del raggio della Terra per l'ampiezza ω, in radianti, dell'angolo PÔQ. Considerato adesso il triangolo PQH (Fig. 19), isoscele sulla base PQ e indicato con M il punto medio di PQ, si ha: $\overline{PM}=\overline{HP}\sin\frac{\beta}{2}$; d'altro canto nel triangolo PQO, isoscele sulla base PQ, si ha:

$$\sin\frac{\omega}{2}=\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{HP}\sin\frac{\beta}{2}}{\overline{OP}}\ ;$$

siccome $\overline{HP}=\overline{OP}\cos\alpha$, allora: $\sin\frac{\omega}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$. Pertanto: $\sin\frac{\omega}{2}=0{,}75471\times0{,}69622$ ossia: $\sin\frac{\omega}{2}=0{,}52544$. Da qui segue: $\frac{\omega}{2}=0{,}555324$ rad e, dunque: $\omega=1{,}10648$ rad. Si ha, in definitiva:

$$\text{dist (Napoli, NewYork)} = R\,\omega = 6.372\times 1{,}10648 \approx 7.050\ (\text{km}).$$

NOTA BENE. Quest'esercizio conferma che il percorso lungo l'arco di circonferenza massima passante per i due punti è minore dell'arco di parallelo che congiunge i due punti. In effetti, i paralleli non sono circonferenze massime della superficie sferica, se si esclude l'Equatore, che è l'unico parallelo ad essere anche una circonferenza massima.

Alcune domande.

- Le città di Madrid (40°25′ latitudine Nord, 3°41′ longitudine Ovest) e Napoli (40°50′ latitudine Nord e 14°15′ longitudine Est) possono essere considerate situate sullo stesso parallelo. Qual è la loro distanza? Quant'è lungo l'arco di parallelo che li congiunge?
- Quant'è lungo il parallelo passante per Roma? Quanto sono lunghi quelli dei tropici? Quanto quelli dei circoli polari?
- Di un parallelo si sa che è lungo 12.000 km. A quale latitudine è situato?
- Due aerei decollano contemporaneamente da Napoli ed atterrano a New York, ma il primo viaggia lungo la circonferenza massima passante per le due città ed il secondo lungo il parallelo. Sapendo che il primo aereo tiene una velocità media di 700 km/h, a quale velocità deve viaggiare il secondo affinché i due aerei atterrino contemporaneamente?

4. I procedimenti seguiti nei due esercizi 1 e 2 possono essere estesi a tutte le situazioni analoghe e, pertanto, indicate con (α',β') le coordinate geografiche del punto P (la prima componente indica la latitudine) e con (α'',β'') quelle di Q, dove le ampiezze coinvolte sono espresse in radianti, si ha in ogni caso: dist(P,Q)=Rω, dove R è il raggio della Terra e inoltre:

- se i due punti si trovano su uno stesso meridiano ($\beta'\approx\beta''$) allora:
$$\boldsymbol{\omega = |\alpha' - \alpha''|}$$
- se i due punti si trovano su uno stesso parallelo ($\alpha'\approx\alpha''$) allora ω è tale che:
$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos\alpha' \sin\frac{|\beta' - \beta''|}{2}\,.$$
- Se i due punti P e Q della superficie sferica non sono situati sullo stesso meridiano né sullo stesso parallelo, il procedimento per calcolare ω richiede conoscenze che non possiedi. Per questo ci limitiamo a fornire il risultato. Orbene, in questo caso, l'ampiezza ω dell'angolo PÔQ è tale che:
$$\cos\omega = \cos(\beta' - \beta'')\cos\alpha'\cos\alpha'' + \sin\alpha'\sin\alpha''.$$
  Si può spiegare agevolmente che quando $\beta'=\beta''$ si ha la prima delle due precedenti situazioni particolari e, ma un po' meno agevolmente, quando $\alpha'=\alpha''$ si ha la seconda.

Applicando la formula precedente, è possibile calcolare, per esempio, la distanza Roma-NewYork.
Incominciamo a constatare che si ha:

$$\cos\omega = \cos\ (12°29' + 74°)\cos 41°54' \cos 40°42' \ + \sin 41°54' \sin 40°42' = 0{,}47010,$$

e perciò $\omega = 1{,}08138$ rad.
Dunque: $\text{dist (Roma, NewYork)} = 6.372 \times 1{,}08138 \approx 6890\ (\text{km})$.

Concludiamo proponendoti di rispondere alle seguenti domande:

- Quanto dista Roma da Parigi? (coordinate di Parigi: 48°51′ N, 2°20′ E)
- Quanto dista Roma da Buenos Aires? (coordinate di Buenos Aires: 34°37′ S, 58°23′ O)
- Quanto dista Parigi da Buenos Aires?