Prerequisiti:
- Calcolare limiti e derivate di semplici funzioni.
- Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni.

Questa unità è rivolta a tutte le scuole superiori. Gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire la definizione di funzione limitata*
- *classificare le funzioni riguardo a semplici simmetrie*
- *determinare eventuali asintoti*
- *dimostrare e utilizzare la relazione che sussiste fra il segno della derivata prima e la monotonia di una funzione*
- *dimostrare e utilizzare la relazione che sussiste fra il segno della derivata seconda e la convessità del grafico*
- *trovare i punti estremanti di una funzione*
- *tracciare il grafico di una funzione in base all'analisi delle sue proprietà e verificarne la correttezza mediante appositi strumenti di calcolo automatico*
- *interpretare il legame tra il grafico di una funzione e quelli delle sue derivate prima e seconda*

Studio di una funzione

Unità 68

68.1 GENERALITÀ

68.1.1 Alcune considerazioni preliminari.

a) In questo paragrafo riproponiamo per lo più cose già dette in passato a varie riprese, per un loro consolidamento ed ampliamento.

b) Le funzioni delle quali andiamo ad occuparci sono soltanto le **funzioni reali di variabile reale** ed a queste funzioni ci riferiremo senza specificarlo di volta in volta. Ne ricordiamo la classificazione invitandoti a dare da solo le relative definizioni, che noi abbiamo già fornito a suo tempo, ed a portare qualche esempio particolare per ogni tipologia:

$$\text{funzioni}\begin{cases}\text{algebriche} & \begin{cases}\text{razionali} & \begin{cases}\text{intere}\\ \text{fratte}\end{cases}\\ \text{irrazionali}\end{cases}\\ \text{trascendenti}\end{cases}$$

c) È vero che il grafico di una qualsiasi funzione può essere visualizzato rapidamente sullo schermo di un computer, in cui giri un software matematico opportuno (ed a questa visualizzazione spesso ci siamo richiamati e ci richiameremo), ma è altrettanto vero che le macchine elettroniche operano sostanzialmente in maniera assai semplicistica: non fanno altro che disegnare un numero molto grande di punti del grafico in modo da dare la sensazione della continuità. Ci domandiamo: come si giunge a disegnare il grafico di una qualsiasi funzione senza l'uso di un computer? Domanda non peregrina dal momento che il computer è un'invenzione piuttosto recente, mentre i matematici già molto tempo prima erano in grado di studiare funzioni al fine del tracciamento dei loro grafici. In realtà, sai già disegnare il grafico di molte funzioni. Nelle prossime pagine cercheremo di fornirti un criterio generale. Poi, puoi anche utilizzare il computer per controllare se il grafico da te tracciato è quello giusto.

68.1.2 Le funzioni algebriche hanno una caratteristica importante che andiamo a descrivere. Considerata una funzione algebrica f(x), il suo grafico in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), è la curva algebrica di equazione y=f(x). Come noto, la relazione y=f(x) può essere trasformata in un polinomio di grado n (nelle variabili x, y) uguagliato a zero: P(x,y)=0. Il numero n si chiama ***ordine*** della curva algebrica.

Per esempio, considerata la curva algebrica di equazione:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene l'equazione:

$$x^2y^2+y^2-1=0.$$

Si tratta di una curva algebrica di ordine 4.

ATTENZIONE! Le due equazioni non sono equivalenti. Se è vero infatti che dalla prima di esse si ottiene la seconda è pur vero che da quest'ultima si ottengono le due seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\quad y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse x. Questo significa che, se sappiamo disegnare il grafico della prima di esse possiamo disegnare anche quello della seconda e, in ultima analisi, sappiamo disegnare la curva dalla cui equazione le due funzioni sono state ottenute.

In particolare, se f(x) è già un polinomio di grado n nell'indeterminata x, il suo grafico si chiama ***parabola di ordine* n**. Una parabola di ordine 2 è la ***parabola*** propriamente detta. Una parabola di ordine 3 si chiama anche ***parabola cubica***.

La curva algebrica di equazione $y=x^3+2x$, di ordine 3, è una parabola cubica.

Se, ora, consideriamo il seguente sistema nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=ax+b \end{cases}$$

dove y=f(x) è l'equazione di una curva algebrica di ordine n, è chiaro che esso, essendo un sistema di grado n, ha al più n soluzioni reali. Pertanto:

Una retta non parallela all'asse y interseca
una curva algebrica di ordine n al più in n punti.

In particolare, una curva algebrica di ordine n ha al più n punti in comune con l'asse x.

68.1.3 Un elemento importante, ai fini dello studio di una funzione f(x), è la conoscenza del suo ***dominio*** (o ***campo di definizione*** o ***di esistenza***), indicato con la scrittura **dom f(x)**. Se questo non è immediato, in genere lo si trova risolvendo un'equazione in x o una disequazione in x o, infine, un sistema di disequazioni in x.

ESERCIZIO. Della seguente funzione f(x) determina il dominio e specifica se è algebrica o trascendente. Nella prima eventualità indica l'ordine della curva algebrica che essa rappresenta e precisa se si tratta di una funzione razionale o irrazionale. Nel primo di questi ultimi due casi chiarisci se la funzione è intera o fratta.

A) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$. B) $f(x)=\sqrt{2}\,x^4-\frac{1}{3}x+\sqrt{3}$. C) $f(x)=2\sqrt{x}$.

D) $f(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{2x^2}$. E) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$. F) $f(x)=\frac{2x}{x\sqrt{2}+1}$.

G) $f(x)=2^{\frac{x-1}{x}}$. H) $f(x)=\ln\frac{x-1}{x}$. K) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

68.1.4 Riguardo alle funzioni simmetriche e alle funzioni periodiche rimandiamo a quanto già esposto in passato [(1)].

Qui ci limitiamo a riprendere qualche concetto. Per esempio, a suo tempo abbiamo specificato che la ragione delle denominazioni di funzione "pari" o "dispari" è dovuta al fatto che in ogni funzione algebrica f(x) in cui la x figura <u>solo</u> con esponente pari risulta f(–x)=f(x); mentre in ogni funzione algebrica f(x) in cui la x figura <u>solo</u> con esponente dispari risulta f(–x)=–f(x). Questo però, abbiamo sottolineato, solo se la funzione è algebrica. Se invece essa è trascendente bisogna valutare di volta in volta. Orbene, è giunto il momento di approfondire e di fornire qualche esempio al riguardo.

In realtà, se la funzione f(x) è trascendente ed x figura solo con esponente pari è ancora f(–x)=f(x). Ma se x figura solo con esponente dispari non è detto che risulti f(–x)=–f(x): basti pensare alla funzione $y=\cos x$, per la quale risulta $\cos(-x)=\cos x$.

Inoltre, una funzione trascendente f(x) può essere simmetrica rispetto all'asse y (funzione pari) o rispetto all'origine (funzione dispari) anche se in essa la x non figura solo con esponente pari o, rispettivamente, solo con esponente dispari.

Per esempio, la funzione $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ è tale che $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$, per cui è simmetrica rispetto all'asse y. Eppure la x non figura solo con esponente pari. Come anche la funzione $y=\cos x$ già vista.

D'altra parte, la funzione $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ è tale che f(–x)=–f(x) per cui è simmetrica rispetto all'origine O, ma in essa la x non figura solo con esponente dispari.

---

[1] Cfr.: Unità 51: Generalità sulle funzioni, paragrafi 51.4 e 51.5

Per quanto concerne le funzioni periodiche, ci limitiamo a proporre qualche esercizio.

1. La legge oraria di un moto armonico semplice è, come noto, una funzione sinusoidale dello spazio x rispetto al tempo t. Si supponga che il periodo di oscillazione sia di 3 secondi e che l'ampiezza massima sia di 25 cm. Posto che sia $x(0)=25$ cm, dimostrare che l'espressione della legge oraria è: $x=25\cos(2\pi t/3)$, dove x è espresso in centimetri e t in secondi.
2. Si supponga che la velocità V di una marea sia una funzione sinusoidale del tempo t con periodo 12 ore. Sapendo che è di 6 km/h la velocità massima della marea e che $V(0)=0$, dimostrare che l'espressione della velocità della marea è: $V=5\,\text{sen}(\pi t/6)$, dove V è espressa in chilometri orari e t in ore.
3. Stabilire quali delle seguenti funzioni sono periodiche e quali non lo sono:

$$\text{a) } 2^{\sin x}+\sin x\,; \quad \text{b) } \cos(2^x-2)\,; \quad \text{c) } \frac{2}{\cos x}-1; \quad \text{d) } 1+\sin 2^x.$$

Ti proponiamo inoltre la risoluzione di due questioni, la prima delle quali, ad onor del vero, dovrebbe costituire patrimonio delle tue conoscenze pregresse.

a) Dimostra che ogni funzione: $\mathbf{y = a\sin x + b\cos x + c}$, dove a, b, c sono numeri reali con a, b non contemporaneamente nulli, è periodica con periodo 2π ed ha per grafico una sinusoide.

b) Dimostra che ogni funzione: $\mathbf{y = a\sin 2x + b\sin x\cos x + c\cos 2x + d}$,, dove a, b, c, d sono numeri reali con a, b, c non contemporaneamente nulli, è periodica con periodo π ed ha per grafico una sinusoide.

A titolo di esercizio ti proponiamo di studiare le seguenti funzioni:

$$y=2\sin x-\cos x+1\,, \qquad y=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{1}{2}-\sqrt{3}\,.$$

I loro grafici, limitati rispettivamente ad un periodo e a due periodi, sono disegnati nelle figure 1 e 2.

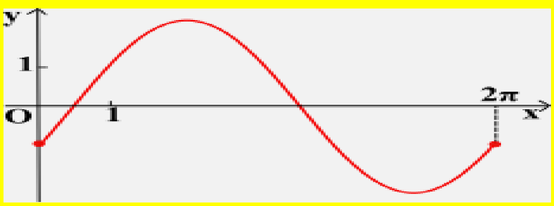


FIG. 1

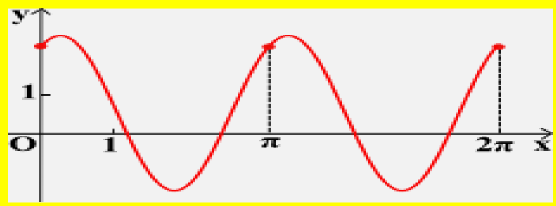


FIG. 2

Ancora per esercizio ti proponiamo di disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

a) $y=\sin x+\cos x$, con $-\pi\le x\le\pi$. b) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$, con $0\le x\le 2\pi$.

c) $y=\sin x\cos x-1$, con $0\le x\le 2\pi$. d) $y=\sin^2 x+\sin x\cos x-1$, con $-\pi\le x\le\pi$.

68.1.5 Le funzioni con cui avremo a che fare al nostro livello elementare di studi sono continue e derivabili nel loro dominio, eccezion fatta per qualche punto. Questo, cioè la continuità o la quasi continuità delle funzioni, è un fatto decisivo per la loro rappresentazione grafica, come mostriamo subito con un esempio.

Ammettiamo che la funzione f(x) sia definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale.

Supponiamo di essere riusciti a stabilire che il grafico della funzione intersechi l'asse x nei soli punti A, B [per questo bisogna risolvere l'equazione $f(x)=0$] e l'asse y nel punto D [basta calcolare $f(0)$].

Supponiamo inoltre di aver trovato che:

a) $f(x)\to+\infty$ sia per $x\to-\infty$ sia per $x\to+\infty$;

b) nei punti C, D ed in essi soltanto, il grafico abbia tangente orizzontale [ricordiamo che questi punti si trovano risolvendo l'equazione $f'(x)=0$].

Raccogliamo tutti questi elementi su quello che da qui in poi chiameremo **grafico parziale** (Fig. 3). Da esso, in ragione della continuità e della derivabilità della funzione su ℝ, magari dopo aver trovato qualche altro punto strategico (e chiarito qualche dettaglio di cui ci occuperemo più avanti), possiamo dedurre che il grafico completo non deve differire molto da quello di figura 4.

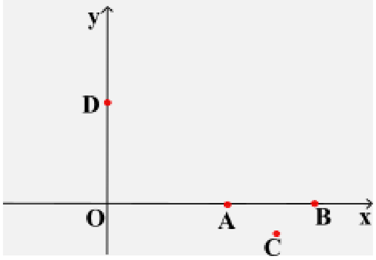


FIG. 3

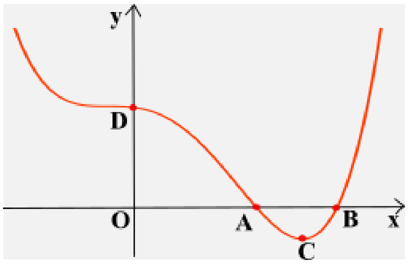


FIG. 4

68.1.6 Soffermiamoci adesso su alcune proprietà particolari delle funzioni.

Incominciamo a considerare al riguardo la funzione $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (Fig. 5), il cui dominio è l'insieme ℝ dei numeri reali.

Per ogni $x\in\mathbb{R}$, è $1\leq x^2+1$, per cui $f(x)\leq 1$: la funzione si dice *limitata superiormente* in ℝ.

Inoltre, per ogni $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$: la funzione si dice *limitata inferiormente* in ℝ.

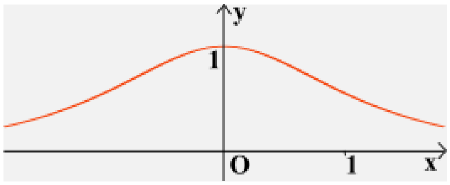


FIG. 5

In generale:

- Una funzione f(x) si dice **limitata superiormente** in un dominio D se esiste un numero reale *a* tale che, per ogni $x\in D$, risulti $f(x)\leq a$. Si capisce che, se di tali numeri *a* ne esiste uno, ne esistono infiniti: tutti quelli maggiori di *a*. Si può dimostrare che fra tali numeri ne esiste uno minore di tutti gli altri. Questo numero è chiamato **estremo superiore** di f(x) e si indica con $\sup_{x\in D} f(x)$.

  Nell'esempio considerato: $\sup_{x\in R} f(x)=1$.
- Una funzione f(x) si dice **limitata inferiormente** in un dominio D se esiste un numero reale *b* tale che, per ogni $x\in D$, risulti $f(x)\geq b$. Si capisce che, se di tali numeri *b* ne esiste uno, ne esistono infiniti: tutti quelli minori di *b*. Si può dimostrare che fra tali numeri ne esiste uno maggiore di tutti gli altri. Questo numero è chiamato **estremo inferiore** di f(x) e si indica con $\inf_{x\in D} f(x)$.

  Nell'esempio: $\inf_{x\in R} f(x)=0$.
- Una funzione limitata sia superiormente sia inferiormente in un dominio D si dice **limitata** in D.

  La funzione dell'esempio è limitata in ℝ. Questo, in fin dei conti, significa che il suo grafico è compreso entro la striscia individuata da due rette parallele all'asse x. Nel caso specifico, la funzione è compresa entro la striscia delimitata dalle rette y=0 ed y=1. Anzi, l'intervallo]0,1] è esattamente l'immagine della funzione.

ESERCIZIO. Stabilisci se la seguente funzione f(x), considerata nel suo dominio di definizione, è limitata, limitata solo superiormente o solo inferiormente, dando esauriente spiegazione della risposta. Della funzione precisa anche gli insiemi dominio e immagine.

A) $f(x) = x^2 - 1$. B) $f(x) = \frac{1}{x^2}$. C) $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

D) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. E) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. F) $f(x) = 3^{x-1}$.

G) $f(x) = \sin 2x$. H) $f(x) = \ln(1+x^2)$. K) $f(x) = \sin x \cos x$.

68.1.7 Posto che una funzione f(x) sia limitata superiormente in un dominio D, e perciò ammette l'estremo superiore $\sup\limits_{x\in D} f(x)$, non è detto che esso coincida con un valore della funzione. Quando però ciò accade, $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ si dice **massimo assoluto** (o **globale**) della funzione in D e si indica con $\max\limits_{x\in D} f(x)$.

Analogamente, ammesso che una funzione f(x) sia limitata inferiormente, in un dominio D e quindi ammette l'estremo inferiore $\inf\limits_{x\in D} f(x)$, non necessariamente $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ è un valore della funzione. Quando però lo è, si dice **minimo assoluto** (o **globale**) della funzione e si indica con $\min\limits_{x\in D} f(x)$.

I due numeri $\max\limits_{x\in D} f(x)$ e $\min\limits_{x\in D} f(x)$ si dicono **estremi assoluti** (o **globali**) di f(x) in D.

Con riferimento all'esempio precedente (Fig. 3):

- $\max\limits_{x\in R} f(x) = 1$ ed il valore di x, in cui f(x) è massima, è x=0;
- non esiste invece il minimo di f(x) in ℝ.

Valgono le seguenti proprietà, delle quali omettiamo la dimostrazione, invitandoti tuttavia a fornire di esse una spiegazione intuitiva, servendoti per questo della rappresentazione grafica.

Sia f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]:
1) f(x) ammette massimo e minimo assoluti in quell'intervallo [e perciò è limitata nell'intervallo e inoltre assume ogni valore compreso fra il minimo ed il massimo];
2) se f(a) ed f(b) sono discordi allora esiste almeno un punto c∈]a,b[tale che f(c)=0.

Come certamente ricorderai, il valore c si chiama ***zero*** della funzione.

La prima proprietà è nota come **TEOREMA DI WEIERSTRASS** [(2)]; la seconda come **TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI** (o anche, secondo alcuni autori, **TEOREMA DI BOLZANO** [(3)]).

Vale una terza proprietà della quale pure non forniamo la dimostrazione ma che ha una forte valenza intuitiva.

TEOREMA DI UNICITÀ DEGLI ZERI. Se una funzione f(x) è continua e crescente o decrescente in un intervallo chiuso e limitato [a,b] e se f(a) ed f(b) sono discordi allora esiste un solo punto c∈]a,b[tale che f(c)=0.

Sui massimi e minimi assoluti di una funzione ritorneremo nella prossima unità.

68.1.9 Se esiste un conveniente intorno J di *a*, incluso in dom f(x), nel quale la funzione f(x) ha massimo assoluto (rispettivamente: minimo assoluto), si dice che f(x) ha in *a* un **massimo relativo** o **locale** (ri-

[2] **Weierstrass**, Karl, matematico tedesco, 1815–1897.
[3] **Bolzano**, Bernhard, matematico e filosofo praghese, 1781–1848.

spettivamente: un **minimo relativo** o **locale**).

I massimi e i minimi relativi di una funzione sono chiamati **estremi relativi** (o **locali**) della funzione. Ogni valore x in cui la funzione ha un massimo o un minino locale si dice **estremante**.

Per esempio, consideriamo la seguente funzione f(x), rappresentata in figura 6:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 \ \text{ se } \ x\leq 2 \\ -2x+7 \ \text{ se } \ 2<x\leq 3 \\ -\frac{3}{4}x^2+\frac{15}{2}x-\frac{59}{4} \ \text{ se } \ x>3 \end{cases}$$

Essa è definita e continua su $\mathbb{R}$ ma non è derivabile nei punti 2 e 3. Presenta, inoltre, dei minimi locali nei punti $\frac{1}{2}$ e 3 e questi minimi sono $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ ed $f(3)=1$; e presenta dei massimi locali nei punti 2 e 5 e questi massimi sono $f(2)=3$ ed $f(5)=4$.

La funzione non è limitata né superiormente né inferiormente.

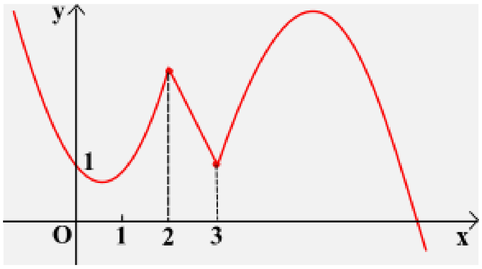


FIG. 6

68.2 ASINTOTI

68.2.1 Se il dominio di una funzione f(x) contiene intervalli del tipo $]a,+\infty[$ e/o $]-\infty,b[$, si dice che il grafico di f(x) ***si estende all'infinito***. In questi casi è interessante studiare il comportamento della funzione per $x\to+\infty$ e/o per $x\to-\infty$.

Si dice che il grafico di f(x) *si estende all'infinito* anche quando, in un punto $a\in\mathbb{R}$ avviene almeno uno dei seguenti fatti:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty.$$

Per esempio, considerata la funzione (Fig. 10):

$$y=\frac{e^x}{x}$$

il cui dominio è $\mathbb{R}_0$, è certo che si estende all'infinito. Si ha infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty.$$

Quando una curva si estende all'infinito è utile, ai fini della sua rappresentazione, trovare (ammesso che esistano) certe rette speciali alle quali essa si accosta sempre più mentre si sviluppa all'infinito. Queste rette si chiamano ***asintoti***. Abbiamo avuto occasione in passato di farvi qualche cenno. Adesso ce ne vogliamo occupare più a fondo. Incominciamo con la definizione:

Asintoto di una curva K di equazione $y=f(x)$ è ogni retta r tale che, considerato il punto $P(x,f(x))$, evidentemente appartenente a K, la sua distanza $d(P, r)$ dalla retta r tende a zero quando almeno una delle sue coordinate tende ad infinito.

In particolare un asintoto si dice:

- ***verticale*** se la sua equazione è del tipo x=a,
- ***orizzontale*** se è del tipo y=h,
- ***obliquo*** se è del tipo y=px+q, con p≠0.

Riguardo al grafico della funzione $y=e^x/x$, s'intuisce che la retta x=0 (cioè l'asse y) è un asintoto verticale e la retta y=0 (cioè l'asse x) è un asintoto orizzontale (Fig. 7).

Ora, per la verità, non è che prima si disegna la curva e poi si vede se e quali asintoti presenta. O meglio, questo procedimento può essere seguito se ci si serve del computer per disegnare la curva. Se invece si vuole giungere al disegno servendosi della propria testa, quel procedimento deve essere capovolto, giacché la conoscenza di eventuali asintoti (facili da disegnare) agevola il disegno della curva. Si capisce allora come sia importante, ai fini di questo disegno, saper trovare gli eventuali asintoti di una curva di equazione y=f(x). Ed è proprio quello che andiamo a fare.

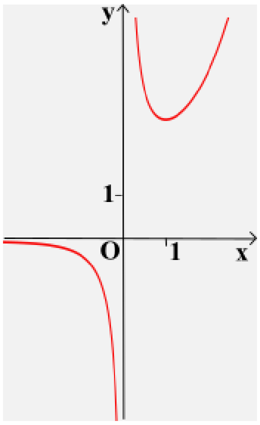


FIG. 7

68.2.2 Ci occupiamo anzitutto degli <u>ASINTOTI VERTICALI</u>.

Supponiamo che esista a∈ℝ tale che:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,.$$

In questo caso la retta r di equazione x=a è un asintoto per la curva K di equazione y=f(x).

Preso, infatti, il punto $P\big(x, f(x)\big)\in K$ e constatato che $d(P, r)=|x-a|$, si ha (Fig. 8):

$$\lim_{x\to a^+} d(P,r) = \lim_{x\to a^+} |x-a| = 0.$$

Analogamente si dimostra che è un asintoto la retta r di equazione x=a quando risulti:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

In particolare:

- se r è asintoto per K mentre $f(x)\to+\infty$ allora r si dice ***asintoto superiore***;
- se r è asintoto per K mentre $f(x)\to -\infty$ allora r si dice ***asintoto inferiore***;
- se r è asintoto per K, sia superiore sia inferiore, allora r si dice ***asintoto completo***.

Siccome possono esistere più valori a∈ℝ in cui $f(x)\to+\infty$ oppure $f(x)\to-\infty$, si capisce che una curva y=f(x) può avere più asintoti verticali.

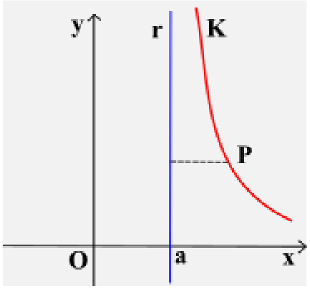


FIG. 8

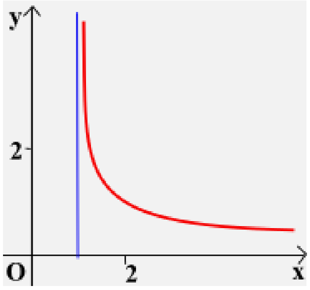


FIG. 9

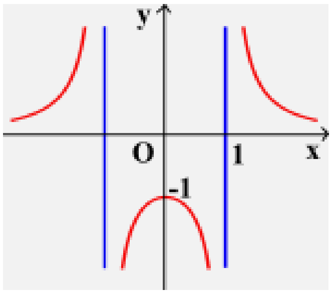


FIG. 10

Per esempio:

- la retta $x=0$ è asintoto completo per la curva di equazione $y=\frac{e^x}{x}$ (Fig. 7);
- la retta $x=1$ è asintoto superiore per la curva (Fig. 9) di equazione $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$;
- la curva di equazione $y=\frac{1}{x^2-1}$ ha due asintoti verticali, di equazioni $x=-1$ ed $x=1$, entrambi completi (Fig. 10)

68.2.3 Occupiamoci adesso degli ASINTOTI ORIZZONTALI e OBLIQUI.

♦ **Se $f(x)\to h$ quando $x\to+\infty$ allora la retta r di equazione $y=h$ è un *asintoto destro* per la curva K di equazione $y=f(x)$.**

Infatti, considerato il generico punto $P(x,f(x))\in K$ e costatato che $d(P,r)=|f(x)-h|$, poiché $f(x)-h\to 0$ per $x\to+\infty$, è chiaro che $d(P,r)\to 0$ per $x\to+\infty$.

Analogamente si spiega che **la retta r di equazione $y=h$ è un *asintoto sinistro* per K se $f(x)\to h$ per $x\to -\infty$.**

Se la retta r di equazione $y=h$ è un asintoto per K, sia destro sia sinistro, allora si dice ***asintoto completo***.

Per esempio, la retta $y=0$ è:

- asintoto sinistro per la curva (Fig. 10) di equazione $y=\frac{e^x}{x}$;
- asintoto destro per la curva (Fig. 12) di equazione $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$;
- asintoto completo per la curva (Fig. 13) di equazione $y=\frac{1}{x^2-1}$.

♦ TEOREMA. Se per $x\to+\infty$ avviene che:

$$f(x)\to\pm\infty,\quad \frac{f(x)}{x}\to p,\quad f(x)-px\to q,$$

dove $p,q\in\mathbb{R}$, allora la retta $r\equiv y=px+q$ è un ***asintoto destro*** per la curva $K\equiv y=f(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Diciamo $P(x,f(x))$ un generico punto di K e osserviamo che l'equazione della retta r può scriversi nella forma $-px+y-q=0$; di modo che:

$$d(P,r)=\frac{|-px+f(x)-q|}{\sqrt{p^2+1}}\ .$$

Osserviamo ora che: $\lim_{x\to+\infty}(-px+f(x)-q)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-px)-q=q-q=0$.

Ecco allora spiegato che $d(P,r) \to 0$ per $x \to +\infty$.
Analogamente:

La retta $y=px+q$, con $p, q \in \mathbb{R}$, è un ***asintoto sinistro*** per K quando, per $x \to -\infty$, si ha:

$$f(x) \to \pm\infty, \quad \frac{f(x)}{x} \to p, \quad f(x)-px \to q.$$

Se la retta r di equazione $y=px+q$ è asintoto per K, sia destro sia sinistro, allora si dice ***asintoto completo***.

Si potrebbe dimostrare (cosa che però non facciamo) la seguente importante proprietà:

Se esiste un asintoto destro (orizzontale o obliquo) per una data curva di equazione $y=f(x)$ allora esso è unico. Analogamente per l'asintoto sinistro.

In definitiva, ogni curva di equazione $y=f(x)$ può avere un numero qualsiasi di asintoti verticali mentre può ammettere al più due asintoti non verticali, uno destro e uno sinistro. Si capisce allora che se la curva ammette un asintoto completo (non verticale), esso è unico.

68.2.4 Prima di passare a qualche esempio vogliamo completare il discorso sugli asintoti con alcune considerazioni integrative, utili ai fini del tracciamento del grafico di una funzione.

- In merito al procedimento per la ricerca degli asintoti obliqui, osserviamo che in entrambi i casi (asintoto destro e asintoto sinistro), affinché q sia un numero reale è necessario che risulti $p \neq 0$, altrimenti sarebbe $q=\pm\infty$. Ma può essere $q=\pm\infty$ anche se $p\neq 0$.

  Quando almeno uno dei limiti p, q è infinito, la curva K non ha asintoti, o, per meglio dire, non ha "asintoti rettilinei", dal momento che potrebbe presentare altre "linee asintotiche", di cui però non ci occupiamo. Siccome, tuttavia, in questi casi la curva presenta, da un certo punto in poi, un andamento che "assomiglia" a quello di un arco di parabola che si estende all'infinito, si dice che essa ha un ***ramo parabolico***. Precisamente si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che:
  - se $p=\pm\infty$ la curva K presenta un ramo parabolico (destro o sinistro, a seconda delle situazioni) nella direzione dell'asse y;
  - se $p\in\mathbb{R}$ e $q=\pm\infty$ la curva K presenta un ramo parabolico (destro o sinistro, a seconda delle situazioni) nella direzione di coefficiente angolare p; direzione che coincide con quella dell'asse x quando $p=0$.

  Per maggior chiarimento: la direzione di cui si parla può essere immaginata quella dell'asse dell'ipotetica parabola.

  Per esempio, con riferimento alla curva K (Fig. 10) di equazione $y=e^x/x$, osserviamo che si ha:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x/x}{x} = +\infty;$$

  per cui la curva K non ha un asintoto rettilineo destro, ma ha un ramo parabolico destro nella direzione dell'asse y.
- Si può dimostrare (cosa abbastanza facile, per cui ne lasciamo il compito a te) la seguente "regola", che riteniamo ti possa far comodo memorizzare.

REGOLA. Ogni curva di equazione: $y=\frac{A(x)}{B(x)}$, dove A(x) e B(x) sono polinomi in x (non aventi fattori comuni):

- ha come asintoto orizzontale completo la retta di equazione y=0 se il grado del polinomio A(x) è minore di quello di B(x);
- ha come asintoto orizzontale completo la retta di equazione y=h, dove h è il quoziente tra A(x) e B(x), se questi due polinomi hanno lo stesso grado;
- ha come asintoto obliquo completo la retta di equazione y=px+q, dove px+q è il quoziente tra A(x) e B(x), se il polinomio A(x) è di un grado superiore rispetto a B(x);
- non ha asintoti rettilinei orizzontali né obliqui, ma ha un ramo parabolico destro ed uno sinistro entrambi nella direzione dell'asse y, se A(x) è di almeno due gradi superiore a B(x);
- ha come asintoti verticali (superiori, inferiori o completi, a seconda delle situazioni) le rette di equazione x=a, essendo a un qualunque zero del polinomio B(x), cioè un numero reale tale che B(a)=0.

68.2.5 Vediamo finalmente come si possono utilizzare le nozioni fin qui apprese per lo studio di una funzione ai fini della sua rappresentazione grafica. Consideriamo a tal proposito la funzione:

$$y=\frac{x^3-1}{x}.$$

Si tratta di una funzione razionale fratta definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}_0$. Il suo grafico è una curva algebrica K di ordine 3. Questo, detto di passaggio, significa che una generica retta interseca K <u>al più</u> in 3 punti.

La retta $x=0$ (asse y) è un suo asintoto completo dal momento che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-1}{x}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x}=+\infty$$

Siccome, inoltre, il grado del numeratore supera di 2 quello del denominatore, la curva K non ha un asintoto rettilineo orizzontale o obliquo, ma ha due rami parabolici, uno destro ed uno sinistro, entrambi nella direzione dell'asse y; e comunque risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x}=+\infty\,.$$

Risulta poi $y=0$ per $x^3-1=0$, cioè per $x=1$. Quindi K interseca l'asse x nel solo punto $A(1,0)$.

Troviamo adesso gli eventuali punti in cui K ha tangente orizzontale. Per prima cosa serve la derivata della funzione:

$$y'=\frac{3x^2\cdot x-(x^3-1)}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}\;;$$

quindi: $y'=0$ per $2x^3+1=0$, cioè per $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; perciò K presenta un solo punto con tangente orizzontale; e siccome $y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, questo è il punto $B\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,,\ \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

Riuniamo tutti gli elementi fin qui raccolti su un grafico parziale (Fig. 11). Da esso si desume, per ragioni di continuità, l'andamento approssimato di K (Fig. 12).

Per uno studio più completo ed esauriente della funzione mancano alcune informazioni che, se in questo caso sono abbastanza marginali, in altre situazioni possono diventare determinanti. Ce ne occuperemo nei due prossimi paragrafi 68.4 e 68.5. Ma provvisoriamente puoi verificare la correttezza del grafico disegnato con l'ausilio di uno strumento di calcolo automatico.

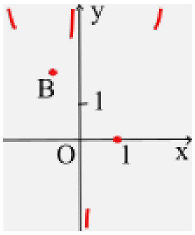


FIG. 11

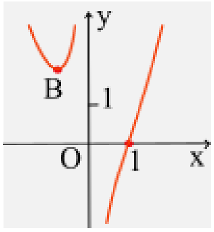


FIG. 12

ESERCIZI.

1) Determina, se e quando ve ne sono, gli asintoti dei grafici delle seguenti funzioni:

A) $y=\frac{x^2-1}{2x}$. B) $y=\frac{3x}{x^2-1}$. C) $y=\frac{2x-1}{2x}$. D) $y=\frac{2x}{x^3-8}$.

E) $y=\frac{2x}{x^2+x-1}$. F) $y=\frac{x^2-x+1}{2x}$. G) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. H) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

I) $y=e^{x+1}$. L) $y=x\,e^{-x}$. M) $y=\ln(x^2-1)$. N) $y=\ln\frac{1}{x-1}$.

O) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. P) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$. Q) $y=x-\sqrt{x^2-4}$. R) $y=\frac{\ln x}{2x}$.

S) $y=\frac{1}{\cos x}$ con $x\in[0,2\pi]$. T) $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$ con $x\in[0,2\pi]$.

2) È assegnata la funzione:

$$y=\frac{ax+2}{bx+1}.$$

Determinare per quali valori dei parametri a, b il suo grafico ha come asintoti le rette di equazioni:

A) $x=1,\ y=-1$. B) $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

3) È data la funzione:

$$y=\frac{ax^3+bx^2+2x-1}{x^2}.$$

Determinare per quali valori dei parametri a, b il suo grafico ha come asintoto la retta di equazione:

A) $y=0$. B) $y=-3$. C) $y=2x+1$. D) $y=x$. E) $2x+3y-1=0$.

68.3 FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI. ESTREMI LOCALI

68.3.1 Alle funzioni compete il concetto di monotonia, nel quale in passato hai avuto modo di imbatterti [4].

Al fine di verificare il livello delle tue conoscenze e abilità, ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi ricorrendo esattamente alle definizioni di funzioni crescenti o decrescenti in vario modo:

1) Dimostra che la funzione

$$\frac{1}{x-1}$$

è strettamente crescente per $x<1$ e strettamente decrescente per $x>1$.

2) Dimostra che la funzione $\sqrt{x+2}$ è strettamente crescente nel suo dominio.

È evidente che, una volta disegnato il grafico di una funzione, dal grafico stesso si possono intuire gli

4 Cfr.: Unità 51 – Generalità sulle funzioni, N° 51.2.1.

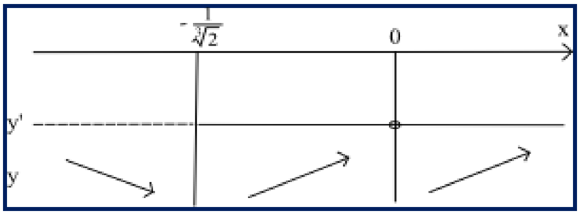
intervalli di monotonia. Per esempio, con riferimento alla funzione $y=\frac{x^3-1}{x}$ (Fig. 15), si può concludere che essa è crescente negli intervalli $]x_B,0[$ e $]0,+\infty[$ e decrescente nell'intervallo $]-\infty,x_B[$.
Talvolta, tuttavia, bisogna saper determinare gli intervalli di monotonia di una funzione senza disporre del grafico. In certe situazioni, addirittura, al grafico si perviene solo dopo aver determinato gli intervalli di monotonia. Si capisce allora come sia utile un qualche criterio per la ricerca di questi intervalli. Naturalmente ci potremmo rifare alla definizione, come ti abbiamo proposto di fare sopra con riferimento a due funzioni particolarmente semplici. Ma, come hai potuto constatare, il procedimento è troppo dispendioso e, tra l'altro, non sempre garantisce di giungere a conclusione. Fortunatamente il calcolo differenziale ci viene in soccorso.

68.3.2 Il seguente teorema garantisce un criterio per la determinazione degli intervalli di monotonia di una funzione.

♦ TEOREMA. Considerata una funzione $f(x)$, derivabile in un intervallo I, **condizione sufficiente** affinché essa sia:
- strettamente crescente in I è che risulti $f'(x)>0$ per ogni $x\in I$;
- strettamente decrescente in I è che risulti $f'(x)<0$ per ogni $x\in I$.

DIMOSTRAZIONE. Presi due punti qualunque $x',x''\in I$, con $x'<x''$, in virtù del teorema di Lagrange esiste $c\in]x',x''[$ tale che $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}=f'(c)$.
Ora, se $f'(x)>0$ per ogni $x\in I$, anche $f'(c)>0$ e perciò i due numeri $x''-x'$ ed $f(x'')-f(x')$ sono concordi. Siccome $x'<x''$ allora $f(x')<f(x'')$: $f(x)$ è strettamente crescente in I.
Se invece $f'(x)<0$ per ogni $x\in I$, anche $f'(c)<0$ e perciò i due numeri $x''-x'$ ed $f(x'')-f(x')$ sono discordi. Siccome $x'<x''$ allora $f(x'')>f(x')$: $f(x)$ è strettamente decrescente in I. [c.v.d.]

Come applicazione di questo teorema, ritorniamo a titolo di esempio sulla funzione $y=\frac{x^3-1}{x}$. Siccome $y'=\frac{2x^3+1}{x^2}$ abbiamo la situazione schematizzata nella tabella 1 (dove, riguardo al segno di y', il tratteggio indica che y'<0 e il tratto continuo che y'>0).



TAB. 1

Dalla tabella possiamo concludere che:
- per $x<-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ risulta $y'<0$ e quindi la funzione è strettamente decrescente;
- per $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<x<0$ e per $x>0$ risulta $y'>0$ e quindi la funzione è strettamente crescente.

Cosa che, d'altro canto, è confermata dall'andamento della funzione (rivedere fig. 15).

Quella precedente è, come precisato nell'enunciato del teorema, una condizione sufficiente. Non è pe-

rò necessaria. In altri termini, può accadere che una funzione f(x) sia strettamente crescente (o decrescente) in un intervallo I, pur non essendo $f'(x)>0$ (oppure $f'(x)<0$) in ogni x di I.
È, per esempio, strettamente crescente su tutto l'asse reale la funzione $f(x)=x^3$, e tuttavia $f'(0)=0$.

Ti proponiamo di verificare quanto hai appreso, risolvendo i seguenti esercizi.

1) Determina, ricorrendo al calcolo differenziale, gli intervalli in cui la funzione f(x) è crescente o decrescente sapendo che:
   A) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x-2$.   B) $f(x)=x^4-4x+1$.   C) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$.
   D) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.   E) $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$.   F) $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$.
   G) $f(x)=2^{\frac{x-1}{x}}$.   H) $f(x)=\ln\left(x^3-\frac{1}{2}x^2\right)$.   K) $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$.
2) Dimostra, ricorrendo eventualmente al calcolo differenziale, che:
   A) $x\,(x^2+2)\geq 2x$ per $x\geq 0$.   B) $2\sin x+\operatorname{tg} x\geq 3x$ per $0\leq x<\pi/2$.
3) Considerata la seguente equazione in x: $x^5+4x=2$, si esaminino le seguenti alternative:
   [A] L'equazione non ha soluzioni reali.
   [B] L'equazione ha una sola soluzione reale.
   [C] L'equazione ha 5 soluzioni reali.
   [D] Non è possibile stabilire quante sono le sue soluzioni reali.
   Dire qual è l'unica alternativa corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
4) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa e motivare la risposta:
   A) Se f(x) è strettamente crescente nell'intervallo I allora $f'(x)>0$ per ogni $x\in I$.
   B) Se $f'(x)<0$ per ogni $x\in I$ allora f(x) è strettamente decrescente in I.

68.3.3 Il teorema precedente fornisce un criterio per determinare i punti estremanti di una funzione f(x). È infatti evidente, ancora con riferimento all'esempio considerato, che per $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ la funzione in esame ha un minimo locale.

Va tuttavia rimarcato che **nei punti estremanti non è necessario che la funzione sia derivabile**. In altri termini, non è necessario che il suo grafico abbia tangente in questi punti.

A riprova di ciò basta considerare la funzione $y=|x^2-1|$. Dal suo grafico (Fig. 13) s'intuisce che nei punti −1 ed 1 essa ha dei minimi locali, entrambi uguali a 0 (che in realtà è anche minimo assoluto); eppure in tali punti la funzione non è derivabile.

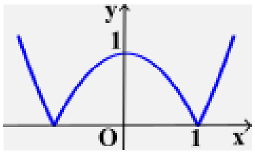


FIG. 13

Se, però, in un punto estremante, interno al suo dominio, la funzione è derivabile, allora questa derivata è nulla.

Infatti la tangente al grafico in detto punto, che questa volta esiste, non può che essere orizzontale.

ATTENZIONE. Da solo, il fatto che sia $f'(c)=0$ non autorizza a concludere che il punto c sia un estremante di f(x). Si possono verificare infatti le situazioni rappresentate in figura 14. Nei primi due casi (Fig. 14a, Fig. 14b) il punto c è, di fatto, un estremante di f(x): un minimo nel primo caso e un massimo nel secondo; negli altri due (Fig. 14c, Fig. 14d) non lo è.

Un punto c tale che $f'(c)=0$ si dice ***punto stazionario***, indipendentemente che sia un punto estremante o che non lo sia.

Vale dunque il seguente teorema.

♦ TEOREMA 1. Se una funzione f(x) è derivabile in un punto c, interno al suo dominio, **condizione necessaria ma non sufficiente** affinché c sia un estremante di f(x) è che c sia un punto stazionario, ossia che risulti $f'(c)=0$.

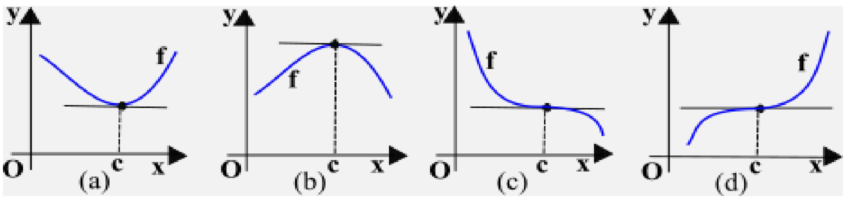


FIG. 14

Ciò detto, forniamo una condizione sufficiente, che però non è necessaria. Lo si capisce da quanto precede, in particolare dalla funzione rappresentata in figura 13.

♦ TEOREMA 2. **Condizione sufficiente** affinché il punto c, interno al dominio di una funzione f(x), sia un estremante di f(x) è che f(x) sia derivabile almeno due volte in c e risulti $f'(c)=0$ ed $f''(c)\neq 0$. In particolare:

- se $f''(c)<0$ allora c è un punto di massimo relativo;
- se $f''(c)>0$ allora c è un punto di minimo relativo.

DIMOSTRAZIONE. Siccome:

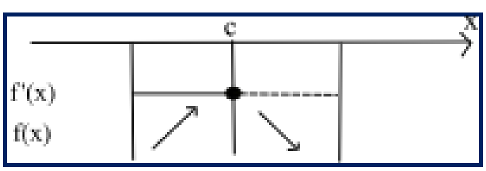
$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{x-c},$$

per il teorema della permanenza del segno esiste un conveniente intorno I di c in cui $\frac{f'(x)}{x-c}$ ha lo stesso segno di $f''(c)$. Di modo che:

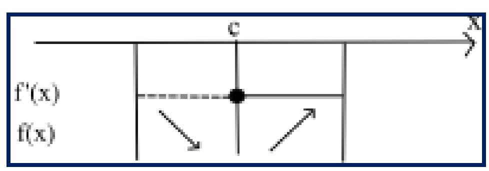
- se $f''(c)<0$ allora $f'(x)$ ed $x-c$ sono discordi in I (escluso naturalmente c), per cui:

$$x<c \to f'(x)>0 \quad \text{ed} \quad x>c \to f'(x)<0;$$

 dalla tabella 2, che riassume questi fatti, segue che f(x) ha in c un massimo relativo;



TAB. 2



TAB. 3

- se $f''(c)>0$ allora $f'(x)$ ed $x-c$ sono concordi in I (escluso naturalmente c), per cui:

$$x<c \to f'(c)<0 \quad \text{ed} \quad x>c \to f'(c)>0;$$

 dalla tabella 3, che riassume questi fatti, segue che f(x) ha in c un minimo relativo.

ESERCIZI.

1) Con riferimento alle stesse funzioni proposte in chiusura del paragrafo 68.3.2, es. 1, determina gli estremi relativi delle funzioni.

2) Determina gli estremi relativi delle seguenti funzioni:

$$\text{A)}\ y = x^4 - x^3 - x^2 + \frac{1}{2}\,. \quad \text{B)}\ y = \frac{\sqrt{x-1}}{2x}\,. \quad \text{C)}\ y = \sin^2 x - \sin x \text{ con } 0 \le x \le 2\pi\,.$$

3) Dire se la seguente affermazione è vera o è falsa, motivando la risposta:

A) Se $f'(c)=0$ allora $f(x)$ ha un estremo in c.

B) Se c è un estremante per $f(x)$ allora $f(x)$ è derivabile in c ed è $f'(c)=0$.

C) Se $f(x)$ è derivabile in c ed in c ha un estremo allora $f'(c)=0$.

D) Le condizioni $f'(c)=0$ ed $f''(c)\neq 0$ sono necessarie per concludere che c è un estremante per $f(x)$.

E) La condizione $f'(c)=0$ è necessaria per concludere che $f(x)$ ha un minimo in c.

4) Trovare per quale valore del parametro reale k l'equazione $x^3-3x^2+k=0$ ha una ed una sola radice reale.

[**R**. Si possono seguire due strade: 1) Studiare come variano le curve di equazione $f(x)=x^3-3x^2+k$ al variare di k; 2) Studiare come variano le intersezioni della curva di equazione $y=-x^3+3x^2$ con le rette $y=k$ al variare di k]

5) Nella figura sottostante (Fig. 15) è rappresentata la funzione $y=ax^3+bx+2$, con a, b numeri reali fissati. Quale delle seguenti affermazioni è quella giusta?

[A] $a>0, b>0$. [B] $a>0, b<0$. [C] $a<0, b>0$. [D] $a<0, b<0$.

Fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

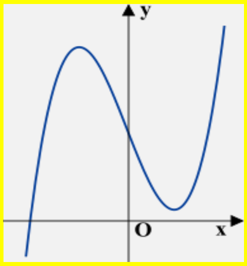


FIG. 15

68.4 CONCAVITÀ E FLESSI

68.4.1 Considerata una curva $\gamma \equiv y=f(x)$, sia $P(c, f(c))$ un punto, interno alla curva, in cui essa ammette tangente t non verticale. Come dire che esiste finita $f'(c)$. L'equazione di t è, come sai:

$$y = f'(c)\,(x-c) + f(c).$$

Consideriamo inoltre due <u>qualsiasi</u> punti A e B, aventi la stessa ascissa x, con $A\in\gamma$ e $B\in t$, vale a dire due punti situati su una medesima perpendicolare all'asse x. Ammettiamo però che tale ascissa x appartenga ad un conveniente intorno di c, con $x\neq c$. Siano y_A e y_B le ordinate di tali punti.

- Se $y_A>y_B$ (Fig. 16), la curva γ si dice **concava verso l'alto** in P. La stessa funzione $f(x)$ si dice concava verso l'alto in c.
- Se $y_A<y_B$ (Fig. 17), la curva γ si dice **concava verso il basso** in P. La stessa funzione $f(x)$ si dice concava verso il basso in c.
- Se $y_A>y_B$ per $x>c$ e $y_A<y_B$ per $x<c$ (Fig. 18a) oppure $y_A<y_B$ per $x>c$ e $y_A>y_B$ per $x<c$ (Fig. 18b), allora si dice che la curva γ ha in P un **punto di flesso** (o semplicemente un **flesso**) e la retta t si chiama ***tangente inflessionale***. La stessa funzione $f(x)$ si dice che ha un flesso in c.

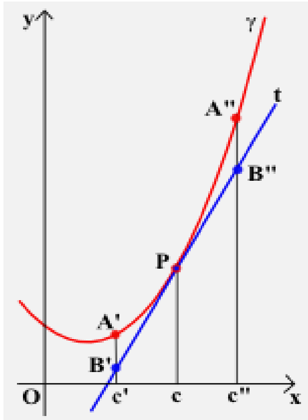


FIG. 16

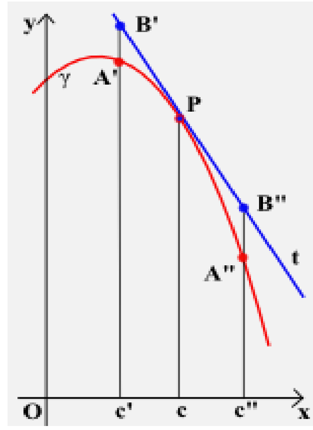


FIG. 17

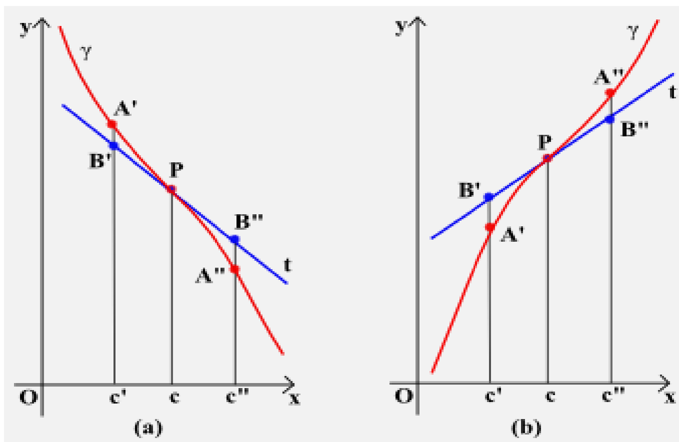


FIG. 18

In altre parole, in un suo punto interno $P(c, f(c))$ in cui ammette tangente t, la curva γ di equazione $y=f(x)$:

- è concava verso l'alto in un conveniente intorno di c se, a parte il punto P, è situata al di sopra di t (Fig. 16);
- è concava verso il basso in un conveniente intorno di c se, a parte il punto P, è situata al di sotto di t (Fig. 17);
- ha un flesso se t attraversa γ, vale a dire se a destra di P la curva è situata da una parte rispetto alla tangente t ed a sinistra di P è situata dall'altra parte (Fig. 18).

Se, poi, una curva è concava (verso l'alto o verso il basso) in ogni punto di un intervallo I, allora essa si dice concava (verso l'alto o verso il basso) in I, mentre **i flessi sono i punti in cui una curva cambia la propria concavità.**

NOTA BENE 1. In realtà, la definizione di concavità di una curva in un intervallo può essere data in modo più generale nella maniera seguente:
Una curva di equazione $y=f(x)$, continua in un dato intervallo, si dice concava verso l'alto (risp.: verso il basso) in quell'intervallo se, presi due qualsiasi punti del suo grafico – $A\big(a, f(a)\big)$ e $B\big(b, f(b)\big)$ – il segmento AB è situato tutto al di sopra (risp.: al di sotto) del grafico, ovviamente nell'intervallo $]a,b[$.

Questa definizione non richiede la derivabilità di f(x). E ciò permette di concludere, per esempio, che la curva di equazione $y=|x|$ è concava verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$.
Si dimostra tuttavia che se la derivabilità c'è, allora si cade nella definizione data sopra.

NOTA BENE 2. Spesso, invece di parlare di concavità verso l'alto o verso il basso, si parla semplicemente di convessità e concavità. Precisamente, se una curva (o una funzione):

- è *concava verso l'alto* in un dato intervallo si dice più semplicemente che è *convessa* in quell'intervallo (Fig. 16);
- è *concava verso il basso* in un dato intervallo si dice più semplicemente che è *concava* in quell'intervallo (Fig. 17).

Cosicché, per esempio, la parabola di equazione $y=x^2$, concava verso l'alto su tutto l'asse reale, sarebbe semplicemente una curva convessa; mentre la parabola di equazione $y=-x^2$, concava verso il basso su tutto l'asse reale, sarebbe semplicemente una curva concava.

A noi comunque va bene l'impostazione che abbiamo data e continueremo a parlare di concavità verso l'alto o verso il basso.

68.4.2 Il seguente teorema fornisce un criterio per determinare le concavità di una curva e, nel medesimo tempo, assegna un significato geometrico alla derivata seconda di una funzione.

♦ TEOREMA. Se una funzione f(x) è derivabile almeno due volte in un punto c, **condizione sufficiente** affinché sia:
- concava verso l'alto in c è che risulti $f''(c)>0$;
- concava verso il basso in c è che risulti $f''(c)<0$.

DIMOSTRAZIONE. Diciamo A, B due punti aventi la stessa ascissa x, presa in un conveniente intorno I di c, con A appartenente al grafico γ della funzione f(x) e B appartenente alla tangente t a γ nel punto P(c, f(c)).
Consideriamo la differenza $\delta(x)$ tra y_A e y_B, ricordando che t ha equazione: $y = f'(c)(x-c)+f(c)$. Si ha:

$$\delta(x) = y_A-y_B = f(x)-[f'(c)(x-c)+f(c)].$$

Osserviamo che:

$$\delta'(x)=f'(x)-f'(c) \quad \text{e} \quad \delta''(x)=f''(x).$$

Sicché, per $x=c$:

$$\delta'(c)=0 \quad \text{e} \quad \delta''(c)=f''(c).$$

Per un precedente teorema (teorema 2 in n. 68.3.3) questo significa che la funzione $\delta(x)$ ha in c:
1) un minimo locale se $\delta''(c)>0$ e perciò $f''(c)>0$;
2) un massimo locale se $\delta''(c)<0$ e perciò $f''(c)<0$.

Siccome $\delta(c) = f(c)-[f'(c)(c-c)+f(c)] = 0$, allora:
- nel 1° caso: in ogni $x\in I-\{c\}$ risulta $\delta(x)>0$ e perciò $y_A>y_B$: γ è concava verso l'alto;
- nel 2° caso: in ogni $x\in I-\{c\}$ risulta $\delta(x)<0$ e perciò $y_A<y_B$: γ è concava verso il basso.

68.4.3 Dal teorema precedente si desume che, se in un punto c la funzione f(x) ha un flesso, deve risultare $f''(c) = 0$, giacché:
- se fosse $f''(c)>0$ la curva sarebbe concava verso l'alto in c;

- se fosse $f''(c)<0$ lo sarebbe verso il basso.

In altri termini vale il seguente teorema:

♦ TEOREMA. **Condizione necessaria** affinché una funzione $f(x)$ abbia un flesso in un punto c è che risulti $f''(c)=0$.

Questa condizione **non è sufficiente** per concludere che $f(x)$ abbia un flesso in c.

Per provarlo basta prendere la funzione $y=x^4$. Siccome $y'=4x^3$ e $y''=12x^2$, è chiaro che $y''=0$ per $x=0$. Tuttavia nel punto 0 la funzione non ha un flesso, giacché per ogni $x\neq 0$ risulta $y''>0$ e quindi essa volge la concavità verso l'alto in tutto l'intervallo reale.

68.4.4 Ritorniamo per un momento sulla funzione $y=\frac{x^3-1}{x}$ (cfr. n. 68.2.5). Già dal grafico parziale (rivedere Fig. 11) s'intuisce che essa ha almeno un flesso per $x>0$. Siccome $y'=\frac{2x^3+1}{x^2}$ e da qui: $y''=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$, risulta $y''=0$ per $x=1$. Sicché il grafico ha al più un flesso.

Riassumiamo: dal grafico parziale s'intuisce che, per ragioni di continuità, la funzione ha almeno un flesso; dalle soluzioni dell'equazione $y''=0$ si desume che essa ha al più un flesso.

Conclusione: la funzione ha un flesso ed uno soltanto, per $x=1$. Il corrispondente punto del grafico della funzione è $A(1,0)$. La tangente inflessionale ha equazione: $y-y_A=y'(x_A)(x-x_A)$, ossia, essendo $y'(x_A)=y'(1)=3$, $y=3x-3$.

ESERCIZIO. Determina gli intervalli in cui le seguenti funzioni volgono la concavità verso l'alto, quelli in cui la rivolgono verso il basso ed i relativi flessi con le corrispettive tangenti inflessionali:

$$\text{A)}\ y=\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{9}x^3\,. \qquad \text{B)}\ y=\frac{x^3+1}{x}\,. \qquad \text{C)}\ y=\frac{x}{x^2+1}\,.$$

68.4.5 Quanto è stato esposto nelle pagine precedenti, circa il legame tra una funzione $f(x)$ e le sue derivate prima e seconda, può essere visualizzato attraverso la rappresentazione grafica delle tre funzioni $f(x), f'(x), f''(x)$ sullo stesso riferimento cartesiano (Oxy).

Per esempio, riguardo alla funzione:

$$y=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+1\,,$$

le cui derivate prima e seconda lasciamo calcolare a te, otteniamo i grafici di figura 19.

Si può constatare che, di fatto:

- $f(x)$ cresce negli intervalli in cui $f'(x)>0$ e decresce negli intervalli in cui $f'(x)<0$;
- nei punti in cui $f'(x)=0$ il grafico di $f(x)$ presenta o un minimo locale o un flesso con tangente orizzontale;
- la funzione $f(x)$ è concava verso l'alto negli intervalli in cui $f''(x)>0$ ed concava verso il basso negli intervalli in cui $f''(x)<0$;
- nei punti in cui $f''(x)=0$ ci sono dei flessi (attenzione: in altre situazioni potrebbero non esserci).

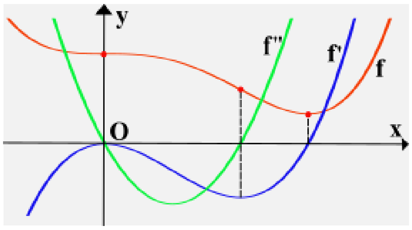


FIG. 19

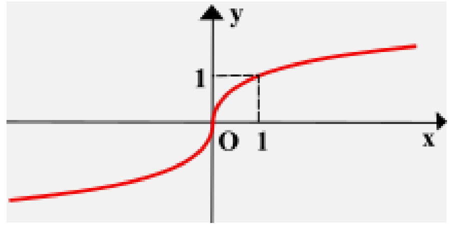


FIG. 20

68.4.6 NOTA BENE. Dal modo in cui abbiamo introdotto l'argomento, si desume che si può parlare di punto di flesso di una curva solo se in quel punto essa ammette tangente non verticale. In realtà, la conclusione cui siamo giunti – che in un punto di flesso la curva cambia la sua concavità – autorizza ad estendere il concetto di punto di flesso anche al caso in cui la tangente alla curva nel punto è verticale. Il che accade, come noto, quando, detta f(x) la funzione e c il punto, il limite di $f'(x)$ risulta uguale a $+\infty$ o a $-\infty$ quando $x \to c$ In effetti, in questo caso (cfr. fig. 20, dove $f(x)=\sqrt[3]{x}$), il grafico cambia la propria concavità nel punto di contatto con la tangente. Questo punto è, pertanto, un punto di flesso: si dice, più propriamente che è un **flesso con tangente verticale**.

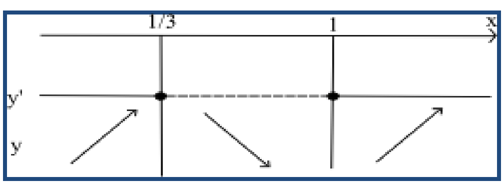
68.5 ESERCIZI SULLO STUDIO DELLE FUNZIONI

68.5.1 Incominciamo con un paio di problemi risolti.

- PROBLEMA 1. Si disegni il grafico della funzione: $y = x^3-2x^2+x+a$, attribuendo ad a un valore particolare a scelta del candidato. Si dica come deve essere scelto a perché la curva rappresentativa incontri l'asse delle ascisse in uno, due o tre punti.

[Tratto dalla Maturità Scientifica 1984 – Sessione suppletiva]

RISOLUZIONE. Per ogni a reale la funzione rappresenta una parabola del 3° ordine (o parabola cubica).
La curva rappresentativa K(a) interseca l'asse y nel punto A(a, 0).
Inoltre, essendo $y' = 3x^2-4x+1$, gli intervalli in cui essa cresce o decresce e le ascisse dei punti in cui ha minimo o massimo locali non dipendono da a.
Precisamente, siccome $3x^2-4x+1=0$ per $x=1/3$ oppure $x=1$, il segno di y' e i conseguenti intervalli di crescenza o di decrescenza della funzione sono schematizzati nella tabella 4.



TAB. 4

Da essa si deduce che ogni curva K(a):

- cresce per $x<1/3$ e per $x>1$ e decresce per $1/3<x<1$;
- ha un massimo locale nel punto B di ascissa $x_B=1/3$ ed un minimo locale nel punto C di ascissa $x_C=1$.

Le ordinate di questi punti sono: $y_B=y\left(\frac{1}{3}\right)=a+\frac{4}{27}$, $y_C=y(1)=a$.

Il punto C si trova quindi sulla parallela all'asse x condotta per A.
Siccome $y''=6x-4$, è chiaro che K(a) è concava verso l'alto per $x>2/3$ ed è concava verso il basso per $x<2/3$. Quindi essa ha un flesso nel punto D di coordinate:

$$x_D = \frac{2}{3}\,,\quad y_D = y\left(\frac{2}{3}\right) = a + \frac{2}{27}\,.$$

Ai fini del disegno di una delle curve $K(a)$, è conveniente scegliere $a=0$. In questo caso abbiamo la curva $K(0) \equiv y=x(x-1)^2$ e si constata subito che i punti particolari precedentemente trovati, diventano questi:

$$A'(0,0),\quad B'\left(\frac{1}{3},\frac{4}{27}\right),\quad C'(1,0),\quad D'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right).$$

La curva $K(0)$ (Fig. 21 – dove si è preferito scegliere un riferimento non monometrico) assume un'importanza decisiva, riguardo alla discussione dell'ultima parte del problema.

Un'altra curva determinante si ottiene traslando $K(0)$ verso il basso fino a che il punto di massimo relativo non si trovi sull'asse x.

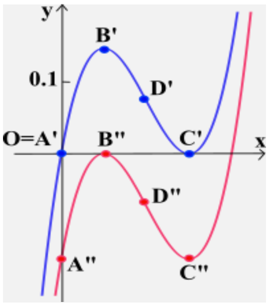


FIG. 21

Per questa seconda curva si ha evidentemente $y_B=0$ e perciò: $a=-4/27$. Pertanto: $y_{A''} = y_{C''} = -4/27$.

A questo punto, dall'esame della figura 24, ricordando che il punto A della generica curva $K(a)$ ha ordinata a, si desume quanto segue:

- La curva $K(a)$ seca l'asse x in un solo punto quando $y_A<y_{A''}$ oppure $y_A>y_{A'}$, ossia quando: $a<-4/27$ oppure $a>0$.
  Indicata con x l'ascissa del punto in cui $K(a)$ seca l'asse x, nel primo caso $x>x_E=4/3$, nel secondo caso $x<x_{A'}=0$.
- La curva $K(a)$ interseca l'asse x in tre punti quando $y_{A''} \le y_A \le y_{A'}$, vale a dire quando: $-4/27\le a\le 0$. In particolare:
  - quando $a=-4/27$ due di questi punti coincidono col punto B' di ascissa $1/3$ e l'altro è il punto E di ascissa $4/3$;
  - quando $a=0$ due dei tre punti coincidono col punto C' di ascissa 1 e l'altro è il punto A' di ascissa 0;
  - quando infine $-4/27<a<0$ i tre punti sono distinti e le loro ascisse sono comprese una fra 0 e $1/3$, una fra $1/3$ e 1 ed una fra 1 e $4/3$.

- PROBLEMA 2. Studiare la funzione:

$$y=x\,e^{1/x}$$

e disegnarne il grafico. Specificare qual è la sua immagine.

RISOLUZIONE. Si tratta di una funzione trascendente, continua su tutto $\mathbb{R}$, eccetto che nel punto 0.

Risulta precisamente:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\,e^{1/x}\right)=+\infty \;\text{ e }\; \lim_{x\to 0^-}\left(x\,e^{1/x}\right)=0\,;$$

di conseguenza la retta $x=0$ è, per il grafico G della funzione, un asintoto superiore al quale G si accosta quando x tende a 0 da destra, mentre quando x tende a 0 da sinistra la curva G si accosta al punto $O(0,0)$. Ai fini di una maggiore completezza, è opportuno stabilire come G si accosti al punto O da sinistra. A que-

sto riguardo osserviamo che $\lim_{x\to 0^-} y' = 0$, per cui G esce da O, verso sinistra, con tangente orizzontale.
Osserviamo ancora che risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{1/x}\right)=+\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{1/x}\right)=-\infty \ \text{ e inoltre } \ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x\,e^{1/x}}{x}\right)=1 \ \text{ e } \ \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\,e^{1/x}-x\right)=1\,;$$

pertanto la retta di equazione $y = x+1$ è un asintoto completo per G.
Troviamo adesso i punti in cui G ha tangente orizzontale. Anzitutto:

$$y'=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\,;$$

siccome $y'=0$ solo per $x=1$, il grafico G ha soltanto un punto con tangente orizzontale, il punto $A(1,e)$.
Dopo aver costatato che G non interseca l'asse x né l'asse y, riuniamo gli elementi fin qui emersi su un grafico parziale (Fig. 22).

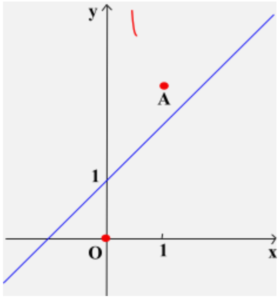


FIG. 22

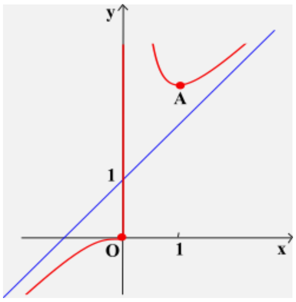


FIG. 23

Da esso si desume che, per ragioni di continuità, il punto A è senz'altro un punto di minimo locale.
Tuttavia, giacché non siamo in grado di risolvere il sistema formato dalle equazioni di G e del suo asintoto obliquo, per vedere se hanno punti comuni, non possiamo prevedere come G si accosti a quest'asintoto ragionando sulla base delle sole informazioni fin qui acquisite. È allora indispensabile studiare le concavità di G. Anzitutto:

$$y''=\frac{e^{1/x}}{x^3}\,;$$

dunque $y''>0$ per $x>0$ e $y''<0$ per $x<0$. Il che, mentre da un lato conferma che A è un minimo locale, dall'altro ci dice che G non ha flessi e che volge la concavità verso l'alto per $x>0$ e verso il basso per $x<0$.
In conclusione, l'andamento della funzione assegnata è quello rappresentato in figura 23. Se ne desume che la sua immagine è costituita dall'insieme $]-\infty,0]\cup[e,+\infty[$.

68.5.2 Ti proponiamo alcuni esercizi al fine di verificare il livello del tuo apprendimento.

1. Studia le seguenti funzioni e disegnane i grafici. Di ogni funzione specifica anche qual è l'insieme immagine. Controlla con un apposito software matematico se hai operato correttamente.
   a) $y = x^3 - 2x^2$. b) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$. c) $y = \frac{1}{4}x^4(2-x)$.
   d) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$. e) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. f) $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.
   g) $y = \sqrt{x-2}$. h) $y = \sqrt{x^2-1}$. i) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.
   l) $y = \sqrt[3]{x^2}$. m) $y = \sqrt[3]{x^3-2x^2}$.
   n) $y = \sin^2 x - \sin x$ con $0 \le x \le 2\pi$. o) $y = \cos 2x - \cos x$ con $-\pi \le x \le \pi$.

p) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ con $0\le x\le 2\pi$. q) $y=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$ con $0\le x\le 2\pi$.

r) $y=x\,e^{x}$. s) $y=e^{-x^2}$. t) $y=x^2e^{-x}$.

u) $y=\ln|x|$. v) $y=|\ln x|$. z) $y=\ln|x^2-1|$.

2. Nella figura sottostante (Fig. 24) è rappresentata una parabola cubica. Trovarne l'equazione. Determinare quindi le sue intersezioni con gli assi cartesiani. $\left[\mathbf{R.}\ \ldots\,;\ldots\,,\ \frac{3}{2}\left(1\pm\sqrt{3}\right)\right]$

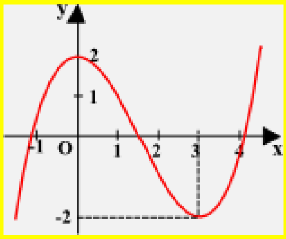


FIG. 24

3. Trova una funzione continua su $\mathbb{R}$, ma non lineare, il cui grafico passi per l'origine del sistema cartesiano di riferimento e abbia pendenza maggiore di 1 in ogni suo punto e disegnane l'andamento.
4. Scrivi due funzioni reali di variabile reale, entrambe definite nell'intervallo [0,1; 3,5], una ivi positiva assieme alle sue derivate prima e seconda e l'altra negativa assieme alle sue derivate prima e seconda. Disegna i grafici di tali funzioni.
5. È data l'equazione $x^2-kx-(k+2)=0$, dove k è un parametro reale. Si vuole studiare la realtà ed il segno delle sue radici al variare di k. Per questo si esprime k in funzione di x e, dopo aver posto k=y, si traccia il grafico della funzione y=f(x) ottenuta e se ne studiano le intersezioni con le rette y=k al variare di k. [**R.** $k<-2$: $x_1<x_2<0$; $k=-2$: $x_1<x_2=0$; ...]
6. Risolvi la stessa questione dell'esercizio precedente con riferimento all'equazione: $x^2-kx+(k+2)=0$. [**R.** $k<-2$: $x_1<0<x_2$; $k=-2$: ... ; $-2<k<2-2\sqrt{3}$: $x_1<x_2<0$; ...]
7. Risolvi la stessa questione dell'esercizio precedente con riferimento all'equazione:
$$kx^2-x+(k+1)=0.$$
$$\left[\mathbf{R.}\ k<-\frac{1+\sqrt{2}}{2}:\ \text{radici non reali};\ k=-\frac{1+\sqrt{2}}{2}:\ x_1=x_2=\ldots;\ -\frac{1+\sqrt{2}}{2}<k<-1:\ x_1<x_2<0;\ \ldots\right]$$
8. Considera la funzione $f(x)=x^3-3x+k$, dove k è un parametro reale. Trova per quali valori di k essa ammette uno ed un solo zero reale. Trova inoltre almeno un valore di k per il quale l'unico zero reale è razionale.

68.5.3 Da quanto è stato appreso fin qui sullo studio delle funzioni si potrebbe concludere che di ogni funzione reale di variabile reale sia possibile la rappresentazione grafica. Non è così e per provarlo basta l'esempio della seguente funzione, definita per ogni x reale:
$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ se x è irrazionale}\\ 1 \text{ se x è razionale}\end{cases}$$
nota come *funzione di Dirichlet*. Di essa effettivamente non è possibile fornire una rappresentazione grafica, essendo questa rappresentazione costituita dai punti dell'asse x (y=0) di ascisse irrazionali e dai punti della retta y=1 di ascisse razionali.

Lo stesso dicasi della funzione seguente, definita anch'essa per ogni x reale:
$$f(x)=\begin{cases}x \text{ se x è irrazionale}\\ 1 \text{ se x è razionale}\end{cases}$$

68.6 DERIVAZIONE GRAFICA

68.6.1 Assegnato il grafico di una funzione reale di variabile reale $f(x)$, può essere importante talora costruire il grafico della funzione derivata f ’(x) al fine di poter determinare direttamente, ancorché con approssimazione, il valore della derivata della funzione in ogni punto del suo dominio. Quest’operazione è fondamentale, in particolare, quando il grafico della funzione è stato ottenuto sperimentalmente per punti e non si conosce l’espressione analitica della funzione che esso rappresenta.

L’operazione è chiamata **derivazione grafica** e qui ne vogliamo fare un breve cenno.

Sia allora disegnato, in un piano cartesiano (Oxy), il grafico γ di una funzione f(x) (Fig. 25). Chiamato $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ un suo generico punto, si traccia la tangente t a γ in P e si conduce per il punto $A(-1, 0)$ la parallela t’ alla retta t fino a intersecare in B l’asse y. L’equazione della retta AB, di coefficiente angolare $f'(x_0)$, è evidentemente: $y = f'(x_0)(x + 1)$. Di modo che il punto B ha coordinate $\big(0, f'(x_0)\big)$. Pertanto, conducendo per P la parallela all’asse y e per B la parallela all’asse x, si ottiene, come intersezione di queste due rette, il punto $Q\big(x_0, f'(x_0)\big)$, che è evidentemente un punto del grafico γ’ della derivata della funzione f(x).

Scegliendo su γ un conveniente numero di punti e ripetendo il procedimento descritto, si ottengono quanti punti si vogliono del grafico γ’, che così può essere rappresentato con buona approssimazione. Per una migliore approssimazione del grafico della derivata conviene suddividere il grafico γ (o quantomeno l’arco che interessa) in archetti di uguale lunghezza e ragionare sui punti estremi di tali archi. Naturalmente, fanno comodo le relazioni fra la monotonia della funzione e l’andamento del suo grafico, in particolare per quanto riguarda gli intervalli in cui esso cresce o decresce.

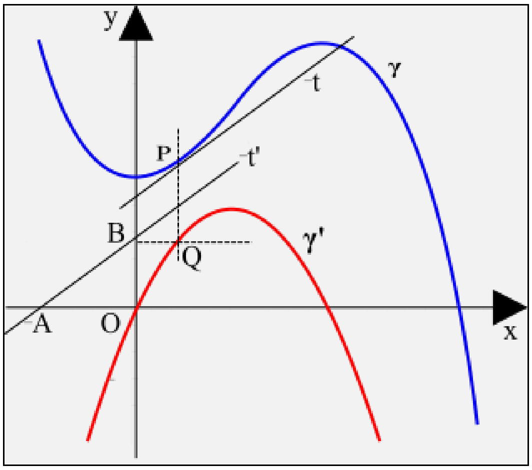


FIG. 25

68.6.2 Nelle sottostanti figure 26 e 27 sono disegnati i grafici di due funzioni e il punto A di coordinate $(-1, 0)$. Costruire i grafici delle derivate delle funzioni medesime.

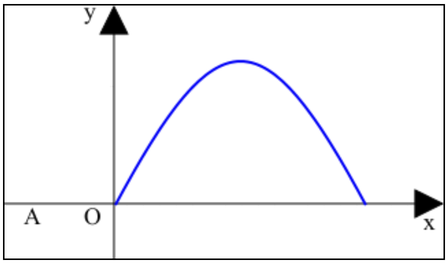


FIG. 26

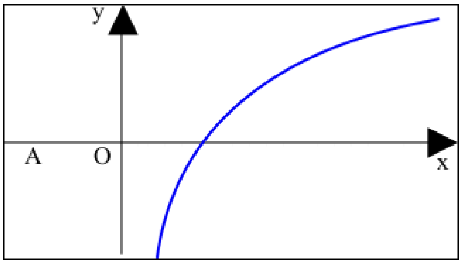


FIG. 27

Ti proponiamo, inoltre, di rappresentare la retta di equazione $y = 2x + 3$ nell'intervallo $[0, 4]$ e di costruire il grafico della funzione derivata: ovviamente verificherai che si tratta della retta di equazione $y = 2$ nel medesimo intervallo.

VERIFICHE [5] [6]

Funzioni lineari in seno e coseno (nn. 1-3).

1. Dopo aver disegnato l'andamento della funzione $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ si utilizzi il grafico trovato allo scopo di determinare per quali valori del parametro reale k il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sin x-\sqrt{3}\cos x=k \\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ha soluzioni e quante ne ha. [**R.** 1 soluzione per $1\le k<\sqrt{3}$; 2 soluzioni per $\sqrt{3}\le k\le 2$]

2. Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y=4\sin x+3\cos x$, lo si utilizzi al fine di determinare per quali valori del parametro reale k il seguente sistema ha soluzioni e quante ne ha:

$$\begin{cases} 4\sin x+3\cos x=k \\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\left[\textbf{R.}\ 1\text{ soluzione per } \dfrac{3}{2}\le k<2;\ 2\text{ soluzioni per } 2\le k\le \dfrac{5}{2}\right]$

3. I cateti AB ed AC del triangolo rettangolo BAC hanno per misura rispettivamente 1 e 2. Condurre per il vertice A una retta r non secante il triangolo in modo che, sempre rispetto al segmento AB, sia k la misura del segmento B'C' che si ottiene proiettando ortogonalmente su di essa l'ipotenusa BC. Discutere i risultati (al variare di k).

[Il problema è tratto dall'esame di maturità scientifica, 1934, 2ª sessione]

$\left[\textbf{R.}\ \text{Posto } C\hat{A}C'=x,\ \ldots \text{ si tratta di risolvere e discutere il sistema } \begin{cases} \sin x+2\cos x=k \\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.\right.$

$\left.\text{Pertanto: 1 sol. per } 1\le k<2;\ 2\text{ sol. per } 2\le k\le\sqrt{5}\right]$

---

[5] **Nota per i Licei Scientifici**. Le tracce complete dei temi assegnati negli esami di Stato del Liceo Scientifico, a partire dall'anno 1997, sono rintracciabili in gran parte nel sito web www.matmedia.it ed a questo sito perciò rimandiamo. In questa sezione riproporremo comunque alcune di quelle tracce, quelle che a nostro giudizio sono le più interessanti, così come di alcune tracce relative ad esami anteriori al 1997, ma con alcune modifiche, riguardanti per lo più la loro struttura.

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2 – Unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Studio delle funzioni, luoghi geometrici e questioni varie.

4. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnati i punti $A(0,3)$, $B(3,3)$, $C(6,3)$. Detta r la retta passante per i punti O e C, si trovi il luogo geometrico dell'ortocentro del triangolo PAB al variare del punto P sulla retta r e se ne studi l'andamento. $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{2x^2-9x+18}{6-x}\right]$

5. Si studi la funzione $y=\cos^2 x+a\sin 2x$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ dopo aver determinato a in modo che il grafico stesso presenti un flesso nel punto di ascissa $5\pi/12$ di un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy). $\left[\mathbf{R.}\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

6. La funzione g(x) è derivabile almeno due volte su $\mathbb{R}$ ed è concava verso l'alto in tutto il suo dominio di esistenza. Dimostrare che la funzione $f(x) = g(x)-g'(x)(x-1)$ ha un estremo nel punto di ascissa 1 e dire se si tratta di un massimo o di un minimo. Provare a fornire un esempio di funzione f(x) con le caratteristiche suddette.

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione (*parabole cubiche*): $y=ax^3+bx^2+cx+d$, dove a, b, c, d sono numeri reali con $a\neq 0$.
Verificare che ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso, che è anche centro di simmetria per la curva. Successivamente, fra le curve date, determinare quella che ha il flesso nel punto di ascissa $\frac{2}{3}$ e la cui tangente inflessionale ha equazione $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{27}$ e che inoltre ha un estremo nel punto di ascissa 0. $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{1}{2}x^3-x^2\right]$

8. È data la famiglia di funzioni f_a tali che $f_a(x)=x^3+ax+1$, dove a è un parametro reale.

1. A) Dimostrare che tutte le funzioni f_a presentano lo stesso punto di flesso che è centro di simmetria per il grafico di ciascuna di esse.
   B) Calcolare, se ce ne sono, i punti estremanti delle f_a.
2. A) Utilizzare i risultati precedenti per disegnare i grafici delle funzioni corrispondenti ai valori $a=2$ ed $a=-2$, determinando anche i loro punti comuni.
   B) Il luogo geometrico dei punti estremanti delle f_a, quando esistono, è una curva K: determinarne l'equazione.

9. È data la famiglia di funzioni f_a tali che:

$$f_a(x) = \frac{a+x^2}{2-x^2}$$

dove a è un parametro reale.

1. A) Determinare il campo di esistenza delle funzioni e specificare se i grafici corrispondenti presentano particolari simmetrie.
   B) Se tra le f_a vi sono funzioni che ammettono zeri reali, determinare tali zeri.
   C) Studiare il comportamento di tali funzioni, distinguendo i vari casi, agli estremi del dominio di esistenza e nei punti di discontinuità e trovare, se ce ne sono, gli asintoti, i punti estremanti ed i punti di flesso.
2. A) Utilizzare i risultati precedenti per disegnare i grafici delle funzioni corrispondenti ai valori $a=1$ ed $a=-1$, facendo vedere che non hanno punti comuni ma si avvicinano indefinitamente per $x\to+\infty$, per $x\to-\infty$, per $x\to 1$, per $x\to -1$.
   B) Qual è l'insieme dei valori assunti da f_1?
   C) Trovare l'equazione della retta t tangente al grafico di f_1.

D) Trovare l'ulteriore punto in cui la retta t interseca f_1.

10. È data la famiglia di funzioni f_a tali che $f_a(x)=\ln(a+x^2)$, dove a è un parametro reale.

1. A) Determinare, distinguendo i vari casi al variare di a, i campi di esistenza delle funzioni e specificare se i grafici corrispondenti presentano particolari simmetrie.
   B) Se tra le f_a vi sono funzioni che ammettono zeri reali, specificare quali sono queste funzioni e determinare tali zeri.
   C) Studiare il comportamento di tali funzioni, distinguendo i vari casi, agli estremi del dominio di esistenza e nei punti di discontinuità e trovare, se ce ne sono, gli asintoti, i punti estremanti ed i punti di flesso.
2. A) Utilizzare i risultati precedenti per disegnare i grafici delle funzioni corrispondenti ai valori $a=1$ ed $a=-1$, facendo vedere che non hanno punti comuni ma si avvicinano indefinitamente per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.
   B) Trovare quali, tra le f_a ammettono punti di flesso. Il luogo geometrico di questi punti è una curva K: determinarne l'equazione e dimostrare che esiste un'affinità che la trasforma nel grafico di una funzione della famiglia.

11. È data la famiglia di funzioni f_a tali che:

$$f_a(x)=\frac{3-x^2}{a+x^2},$$

dove a è un parametro reale.

1. A) Determinare, distinguendo i vari casi, i campi di esistenza delle funzioni e specificare se i grafici corrispondenti presentano particolari simmetrie.
   B) Se tra le f_a vi sono funzioni che ammettono zeri reali, specificare quali sono queste funzioni e determinare tali zeri.
   C) Studiare il comportamento di tali funzioni, distinguendo i vari casi, agli estremi del dominio di esistenza e nei punti di discontinuità e trovare, se ce ne sono, gli asintoti, i punti estremanti ed i punti di flesso.
2. A) Utilizzare i risultati precedenti per disegnare i grafici delle funzioni corrispondenti ai valori $a=1$ ed $a=-1$, facendo vedere che non hanno punti comuni ma si avvicinano indefinitamente per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.
   B) Qual è l'insieme dei valori assunti da f_1?
   C) Trovare quali, tra le f_a ammettono punti di flesso. Il luogo geometrico di questi punti è una curva K: determinarne l'equazione e dimostrare che esiste una traslazione che la trasforma nel grafico di una funzione della famiglia.

12. Si studi la funzione: $y=\sin x+\tan x+1$, con $-\pi/2<x<\pi/2$, e se ne disegni il grafico in un piano cartesiano ortogonale (Oxy).

13. Considerata la funzione $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$, verificare che i grafici delle funzioni:

$$f_1:\ y=f'(x)\quad \text{e}\quad f_2:\ y=\frac{f(x)}{x}$$

s'intersecano nel punto di minimo di f_2.

14. Sono assegnate le curve aventi le seguenti equazioni:

$$\text{(a)}\ y=\frac{1}{x},\qquad \text{(b)}\ y=\frac{1}{x^2},\qquad \text{(c)}\ y=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

considerate tutte e tre per $x>0$.

Disegnare ciascuna di esse in un proprio sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Trovare quindi per ognuna di esse l'equazione della retta tangente alla curva in un suo generico punto P e indicare con A il punto in cui tale tangente interseca l'asse x.
Indicata infine con B la proiezione ortogonale di P sull'asse x, verificare le seguenti relazioni:

- per la curva (a): $\overline{OB}=\overline{BA}$; - per la curva (b): $\overline{OB}=2\,\overline{BA}$; - per la curva (c): $\overline{BA}=2\,\overline{OB}$.

15. Un cateto di un triangolo rettangolo ha lunghezza unitaria. Esprimere, in funzione della lunghezza x dell'ipotenusa, il rapporto fra l'altro cateto e l'ipotenusa stessa e studiare la funzione ottenuta, disegnandone l'andamento indipendentemente dalla questione geometrica. $\left[\textbf{R.}\ y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]$

16. Su una semicirconferenza di centro O e di diametro AB, lungo 2r, si consideri un punto P e si conduca la tangente alla semicirconferenza parallela alla retta AP. Detto M il punto di contatto e chiamato Q il punto in cui questa tangente seca quella condotta per P, si esprima per mezzo dell'ampiezza x dell'angolo PÂO il rapporto tra l'area del triangolo AOP e quella del quadrilatero OPQM. Si studi la funzione così ottenuta e, dopo aver fatto vedere che è periodica, se ne disegni l'andamento in un suo periodo, prescindendo dalla questione geometrica. [**R.** $y=\cos^2 x$.]

17. Tra le parabole di equazione: $x=ay^2+by+c$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), si chiami p quella che passa per O ed ha nel punto $(1,1)$ tangente di coefficiente angolare $1/2$.
Chiamati V, F, P rispettivamente il vertice, il fuoco ed un generico punto di p, trovare l'equazione del luogo geometrico descritto dall'ortocentro del triangolo VFP quando P varia su p e disegnarne l'andamento. $\left[\textbf{R.}\ p\equiv x=y^2;\ y^2=\frac{1}{16}x(4x-1)^2\right]$

18. È data la curva γ di equazione $y=\frac{5}{x^2+1}$. Disegnarne l'andamento in un sistema di assi cartesiani. Successivamente, sull'arco di γ situato nel primo quadrante, determinare un punto P(x,y) tale che in esso risulti:

$$y'\cdot\frac{x}{y}=1.$$

Trovare quindi l'equazione della retta tangente a γ in P e verificare che il segmento di essa, contenuto nel primo quadrante, ha come punto medio il punto avente la stessa ascissa di P.

19. Risolvere la medesima questione dell'esercizio precedente con riferimento alla curva γ di equazione $y=12-x^2$.

20. Tracciare il grafico della funzione. $y=x\,e^{-x}$.
La funzione rappresenti per $x\geq 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla ed in quale istante l'accelerazione è nulla.
[Tratto dall'esame di maturità scientifica, 1990, sessione ordinaria]

21. È assegnata la seguente equazione nell'incognita x:

$$x^2-kx+3k-5=0\,,$$

dove k è un parametro reale. Siano x' ed x" le sue radici nel campo complesso.

a) Dimostrare che, indipendentemente da k, risulta:

$$(x'-3)(x''-3)=4\,.$$

b) Determinare se esistono valori di k per i quali le radici x' ed x" sono numeri interi.

c) Studiare la realtà e il segno delle radici dell'equazione.

[**R.** a) … ; b) Se x' ed x" sono interi, anche x'–3 ed x"–3 lo sono, per cui, considerato che deve essere $(x'-3)(x''-3)=4$, i casi possibili sono …, e pertanto le due radici sono 4 e 7 oppure 5 contata 2 volte. In corrispondenza si ha k=… e k=… ; c) …]

22. È assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Disegnare su uno stesso piano i grafici della funzione stessa e della sua derivata $f'(x)$, controllando in particolare che f(x) cresce negli intervalli in cui $f'(x)>0$ e decresce negli intervalli in cui $f'(x)<0$.

23. Si consideri l'angolo retto $x\hat{O}y$ e sia AB un'asta rigida, di lunghezza assegnata a, avente l'estremo A sulla semiretta Ox e l'estremo B sulla semiretta Oy. L'estremo A scorre lungo la semiretta Ox con una velocità costante V. Calcolare la velocità di scorrimento $v(t)$ dell'estremo B lungo la semiretta Ox in funzione del tempo t.

Nell'ipotesi che sia $a=8$ m e $V=2$ m/s e che nell'istante $t=0$ il punto A coincida con O, disegnare l'andamento della funzione $v=v(t)$ nell'intervallo che va dall'istante 0 all'istante in cui B giunge in O. Che linea descrive il punto medio di AB in quest'intervallo?

24. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la famiglia di parabole di equazione:

$$y = (a-1)\,x^2 - 2ax + a^2-1,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

1. A) Determinare le due parabole della famiglia che hanno il vertice nel punto di ascissa a.
   B) Spiegare perché queste due parabole sono congruenti.
2. A) Trovare le equazioni dell'isometria che trasforma la parabola corrispondente al minore dei valori di a nell'altra.
3. A) Determinare il luogo dei vertici delle parabole assegnate.
   B) Disegnarne l'andamento sullo stesso piano delle due parabole suddette.

$$\left[\textbf{R.}\ \ldots;3A)\ \ y=\frac{-x^3+x^2+2x-1}{(x-1)^2}\right]$$

25. La funzione $2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

[Quesito tratto dall'esame di Stato 2003, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

26. Considerata l'equazione $x^5+x+34=0$, spiegare con una dimostrazione o una interpretazione geometrica che ammette una ed una sola soluzione reale. Stabilire, inoltre, se tale soluzione è o no razionale.

27. È data l'equazione $x^3+kx^2-1=0$, dove k è un parametro reale. Si vuole studiare la realtà ed il segno delle sue radici al variare di k. Per questo si esprima k in funzione di x e, dopo aver posto $k=y$, si tracci il grafico della funzione $y=f(x)$ ottenuta e se ne studino le intersezioni con le rette $y=k$ al variare di k.

$$\left[\textbf{R.}\ \ k<\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\ \text{:una sola radice reale positiva; } k=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}:x_1=x_2=\ldots,\ x_3>0;\ k>\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}:x_1<x_2<0<x_3\right]$$

28. Nella figura sottostante (Fig. 28) è rappresentato il grafico della funzione f(x) (linea rossa).

1. A) Disegnare il grafico della funzione derivata $f'(x)$ senza esplicitare la funzione f(x).
   B) Calcolare l'area e il perimetro della regione piana delimitata dal grafico assegnato e dall'asse x.
2. A) Trovare l'espressione analitica della funzione f(x).
   B) Trovare l'espressione analitica della funzione $f'(x)$.

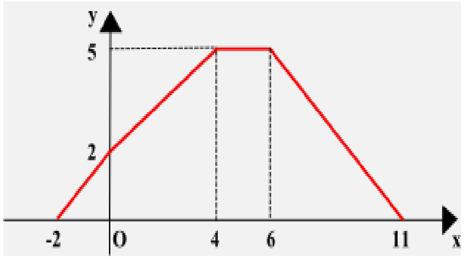


FIG. 28

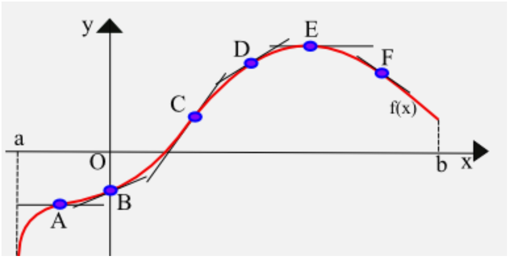


FIG. 29

29. In figura 29 è rappresentata la funzione f(x), la quale risulta essere derivabile almeno due volte nell'intervallo [a,b]. Stabilire il segno della derivata prima e della derivata seconda di f(x) in ciascuno dei punti A, B, C, D, E, F.

30. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x-k\,,$$

dove k è un parametro reale.

1. Ricorrendo, se occorre, all'interpretazione geometrica:
   A) spiegare perché l'equazione $f(x)=0$ ammette almeno una radice reale per ogni k;
   B) trovare per quali valori di k l'equazione $f(x)=0$ ammette tre radici reali.
2. A) Dimostrare che quando l'equazione $f(x)=0$ ammette tre radici reali allora tra due di esse cade almeno una radice dell'equazione $f'(x)=0$.
   B) Verificare questo fatto nel caso particolare in cui $k=3/2$.

$\left[\textbf{R.}\ \ldots;1B)\ \frac{4}{3}\leq k\leq\frac{5}{3};\ 2A)\ \text{Conviene far ricorso al teorema di Rolle}\right]$

31. La funzione f(x) è derivabile su $\mathbb{R}$ tranne che nel punto 0, dove comunque è continua ed assume valore 1. Si sa poi che la sua derivata si annulla solo per $x=2$. Inoltre $f(x)\to 2$ per $x\to-\infty$ ed $f(x)\to 0$ per $x\to+\infty$. Detto G il grafico di f(x), spiegare in maniera esauriente quali delle seguenti eventualità sono certe, quali impossibili e quali possibili.

[A] f(x) è limitata.
[B] G ammette esattamente un massimo locale.
[C] G non interseca l'asse x.
[D] G presenta un asintoto orizzontale completo.
[E] G non presenta asintoti verticali.
[F] G presenta più di un flesso.

32. Quanti sono gli zeri reali del seguente polinomio in x:

$$(x^2-2)\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}\right)\ ?$$

[A] 1 . [B] 3 . [C] 4 . [D] 5 .

Individuare l'alternativa corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

33. In figura 30 è rappresentata la funzione $y=f(x)$. Prova a disegnare il grafico della funzione $y=1-f(-x)$.

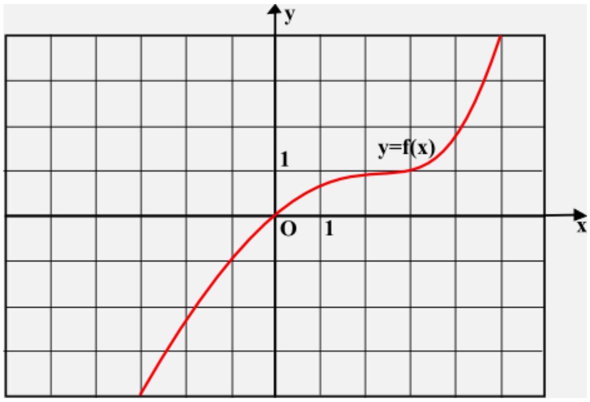


FIG. 30

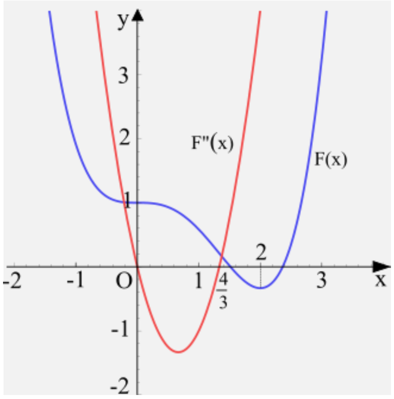


FIG. 31

34. In figura 31 sono rappresentate la funzione F(x) e la sua derivata seconda F”(x).
Rispondi alle seguenti domande riguardanti la derivata prima F’(x):

a) Per quali x risulta F’(x)=0?
b) Per quali x risulta F’(x)>0? Per quali F’(x)<0?
c) È possibile stabilire se F’(x) ammette estremanti? Eventualmente per quali x?
d) È possibile stabilire se F’(x) ammette flessi? Eventualmente per quali x?

35. Sono date le funzioni $f_k(x)$ tali che:

$$f_k(x)=\begin{cases} x^2-3x \ \text{ per } \ x\leq 3 \\ \dfrac{k(x-3)}{(x-2)} \ \text{ per } \ x<3 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

a) Dimostrare che tutte le funzioni $f_k(x)$ sono continue su tutto l’asse reale, mentre una ed una soltanto di esse è derivabile su tutto l’asse reale. Indicare con $f_{\bar{k}}(x)$ tale funzione.
b) Spiegare perché nel punto x=3 la funzione $f_{\bar{k}}(x)$ presenta un flesso e disegnarne il grafico dopo aver trovato fra l’altro la tangente inflessionale.

36. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la semicirconferenza k avente il centro nel punto (1,0) e passante per O e la retta t di equazione x=2. Condotta per O una generica retta r, di pendenza m≥0, si dicano T e K i punti in cui essa interseca rispettivamente la retta t e ulteriormente la semicirconferenza k. Sia infine P il punto tale che $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{KT}$.

a) Trovare l’equazione cartesiana del luogo descritto dal punto P al variare di m e tracciarne il grafico γ_1.
b) Disegnare quindi il grafico γ_2 simmetrico di γ_1 rispetto all’asse x.
c) L’unione dei grafici γ_1 e γ_2 è la rappresentazione di una curva γ, nota come ***cissoide di Diocle*** [7]: scriverne l’equazione.

$$\left[\mathbf{R.}\ \dots,\ \ c)\ y^2=\frac{x^3}{1-x}\right]$$

37. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta a di equazione x=1. Condotta per O una generica retta r, di pendenza m≥0, si dica A il punto in cui essa interseca la retta a e si chiami B il punto in cui la perpendicolare b alla retta r, condotta per A, interseca l’asse x. Per B si conduca quindi la parallela c alla retta r e si indici con C il punto in cui essa in-

[7] **Diocle** di Caristo, matematico greco, 240-180 a.C.

terseca la retta a. Sia infine P il quarto vertice del rettangolo ABCP.

a) Trovare l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto P al variare di m e tracciarne il grafico γ_1.

b) Disegnare quindi il grafico γ_2 simmetrico di γ_1 rispetto all'asse x.

c) L'unione dei grafici γ_1 e γ_2 è la rappresentazione di una curva γ, nota come ***parabola nodata***: disegnarla e scriverne l'equazione.

[**R.** … , c) $y^2=x^2(1-x)$]

38. ® È data la seguente funzione:

$$f(x) = x^{1/x}.$$

a) Studiarla e disegnarne un andamento approssimato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver determinato, oltre al suo campo di esistenza e al suo campo di derivabilità, il suo punto di massimo e il suo asintoto destro, compreso il punto in cui questo asintoto interseca il grafico della funzione, e inoltre la tangente con cui il grafico esce dall'origine O.

b) Uno strumento di calcolo automatico consente di stabilire quale dei seguenti numeri è il maggiore:

$$1)\ 1{,}2^{1{,}3} \text{ e } 1{,}3^{1{,}2}\ ; \quad 2)\ e^{\pi} \text{ e } \pi^{e}; \quad 3)\ 100^{120} \text{ e } 120^{100}.$$

Provare a spiegare questo fatto, utilizzando il grafico della funzione assegnata e senza coinvolgere strumenti di calcolo automatico.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1 Qual è il periodo della funzione $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$?

2 È vero che se la funzione f(x) è crescente in un intervallo I allora risulta $f'(x)>0$ per ogni $x\in I$?

3 È vero che se la derivata di una funzione è positiva in un dato intervallo allora la funzione è crescente in ogni punto dell'intervallo?

4 Cosa s'intende per punto stazionario di una funzione reale di variabile reale?

5 Sia f(x) una funzione reale di variabile reale. È continua in un intervallo [a,b], tranne che nel punto $x_0\in]a,b[$ dove presenta una discontinuità; ed è derivabile, con derivata nulla, in ogni punto di $]a,b[-\{x_0\}$. Si può concludere che f(x) è costante nel dominio $[a,b]-\{x_0\}$?

6 È vero che se $f'(a)=0$ allora la funzione f(x) ha un estremante in a?

7 È vero che se c è un estremante per la funzione f(x) allora la funzione è derivabile in c e tale derivata è nulla?

8 È vero che la condizione $f''(a)=0$ è necessaria, ma non sufficiente, per concludere che f(x) ha un flesso in a?

9 È vero che la condizione $f''(x)>0$ per $a<x<b$ è sufficiente per concludere che f(x) volge la concavità verso l'alto nell'intervallo]a,b[?

10 Sei in grado di indicare almeno una funzione il cui grafico ha come asintoto destro la retta di equazione $y=x$ e come asintoto sinistro la retta di equazione $y=-x$?

11 Esiste qualche funzione $y=f(x)$ il cui grafico ha come asintoti completi le rette $y=x$ e $y=-x$?

RISPOSTE.

1. Il periodo della funzione è $2\pi/3$.
2. No. Basti pensare alla funzione $f(x)=x^3$, crescente in tutto $\mathbb{R}$, eppure tale che $f'(0)=0$.
3. Sì.
4. Punto stazionario di una funzione reale di variabile reale, che sia però derivabile in quel punto, è un punto in cui la derivata della funzione è nulla. Come dire che il grafico della funzione ha, in quel punto, tangente orizzontale. Punto che può essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso (appunto con tangente orizzontale).
5. No. In realtà, come conseguenza del teorema di Lagrange, f(x) è costante in un intervallo [a,b], solo se essa è continua in [a,b] e derivabile in]a,b[, senza eccezioni. Ma i dati non dicono questo. Basti pensare alla funzione $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ se } x<0\\ 1 \text{ se } x\geq 0\end{cases}$: essa è definita in ogni x reale, è discontinua nel punto 0 ed è derivabile, con derivata nulla, in ogni $x\neq 0$; nel punto 0, essendo discontinua, non è derivabile. La funzione, com'è evidente, non è costante.
   In generale, di una funzione come quella descritta nella traccia, eventualmente anche con altri punti di discontinuità appartenenti all'intervallo [a,b], tutto quello che si può dire è che è costante negli intervalli di continuità, contenuti in [a,b]: vale a dire, è una "funzione costante a tratti".
6. No. Il punto a potrebbe essere un flesso con tangente orizzontale: basti considerare la funzione $f(x)=x^3$, crescente in tutto $\mathbb{R}$, eppure tale che $f'(0)=0$.
7. No. Basti pensare alla funzione $f(x)=|x|$, avente un estremante per $x=0$ ma non derivabile in 0. Tuttavia, se la funzione fosse derivabile in c, effettivamente la derivata sarebbe nulla.
8. Sì. Questo significa che i flessi di f(x) si trovano tra i valori che risolvono l'equazione $f''(x)=0$, ma non è detto che tutti questi valori siano necessariamente flessi di f(x): possono esserlo o no.
9. Sì.
10. Per esempio è tale la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.
11. Certamente no, giacché se un asintoto completo (non verticale) esiste, esso è unico.