Prerequisiti:
- Conoscenze di geometria intuitiva.
- Conoscenze di nozioni di calcolo.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:
- *disegnare segmenti e angoli servendosi di riga graduata e goniometro*
- *effettuare misure (approssimate) servendosi degli strumenti suddetti*
- *usando riga, compasso e goniometro, disegnare un triangolo quando sono note le misure di:*
  - *due lati e l'angolo compreso,*
  - *due angoli e il lato adiacente,*
  - *i tre lati*
- *distinguere i vari tipi di triangolo*
- *riconoscere quando due triangoli sono congruenti*
- *dimostrare:*
  - *che ogni lato di un poligono è minore del semiperimetro*
  - *che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°*
  - *che, se due rette formano angoli alterni interni congruenti con una trasversale, allora sono parallele*
  - *le proprietà di un parallelogramma (in particolare: di un rettangolo, di un rombo, di un quadrato)*
  - *che certe condizioni permettono di concludere che un quadrilatero è un parallelogramma (in particolare: un rettangolo, un rombo, un quadrato)*
- *fornire almeno un esempio di grandezze incommensurabili*
- *descrivere con proprietà i momenti storici più significativi nello sviluppo della geometria elementare*
- *distinguere tra verifica e dimostrazione*
- *distinguere tra il ruolo svolto da una "regola del gioco" e una proposizione dedotta*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Geometria: dall'intuizione alla dimostrazione

Unità 7

7.1 UNO SGUARDO AL PASSATO

Hai già fatto un primo studio della geometria nella scuola secondaria di 1° grado e, ancor prima, nella scuola primaria. Sarebbe un'ottima cosa se ricordassi ciò che hai già studiato o almeno qualcosa.
Ti dispiace se ti mettiamo alla prova? Speriamo di no. Ad ogni modo, non ti preoccupare se non ricordi qualcosa o addirittura se non ricordi quasi nulla: puoi sempre riprendere in mano il testo su cui allora hai studiato e ripassare ciò che ti serve.

Ecco dunque alcune domande, alle quali ti preghiamo di rispondere per quello che puoi prima di continuare a leggere:

- La prima riguarda gli *angoli opposti al vertice*. Quando sono chiamati così? Ricordi come sono tra loro?
- Ricordi quando un angolo si dice *piatto*?
- Ricordi nulla circa la *somma degli angoli interni di un triangolo*?
- L'ultima domanda ha a che fare col *teorema di Pitagora*. Ricordi a quale figura si applica? Sapresti enunciarlo?

7.2 METODO INTUITIVO. LABORATORIO DI MATEMATICA

7.2.1 Non sappiamo se hai risposto alle domande precedenti e se hai risposto correttamente. In ogni caso, in questo paragrafo troverai le risposte giuste.
Ma quello che prima di tutto ci preme farti notare è il modo con cui tu giungevi alla comprensione delle proprietà suddette: lo facevi per lo più partendo dall'osservazione e dalla sperimentazione. In altri termini, attraverso esperimenti concreti constatavi che determinati modelli materiali delle figure prese in esame soddisfacevano a certe proprietà.
Alcuni esempi contribuiranno a chiarirti quanto stiamo dicendo. Per questo ti preghiamo di <u>munirti di carta e forbici</u>, oltre che di riga graduata e matita. Si tratta, infatti, di <u>fare concretamente</u> alcune cose e <u>non di immaginare di farle</u>.

- ESEMPIO 1. Dopo aver disegnato su un cartoncino due rette secanti, ritaglia due angoli opposti al vertice (Fig. 1), cioè due angoli i cui lati sono gli uni i prolungamenti degli altri. Puoi constatare che possono sovrapporsi in modo da coincidere. Siccome questa circostanza si verifica ogni volta che viene effettuato l'esperimento (osserva cosa hanno ottenuto i tuoi compagni), si conclude che:

Due angoli opposti al vertice sono congruenti (o uguali).

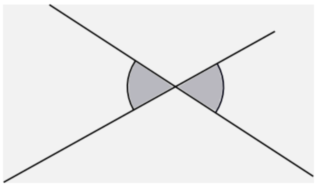

FIG. 1

- ESEMPIO 2. Da un cartoncino ritaglia un triangolo qualsiasi ABC (Fig. 2) e ripiegalo "a busta" (Fig. 3). Gli angoli del triangolo vengono a disporsi in modo da formare un angolo piatto, cioè un angolo i cui lati sono l'uno il prolungamento dell'altro.

Siccome la circostanza si verifica ogni volta che viene effettuato l'esperimento, si conclude che:

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto.

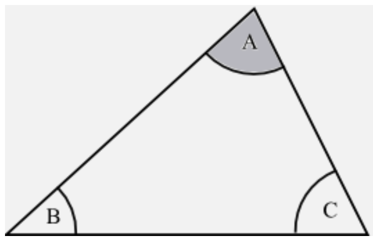

FIG. 2

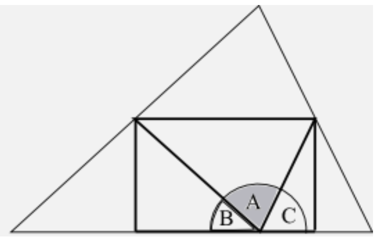

FIG. 3

- ESEMPIO 3. Da un cartoncino ritaglia 8 triangoli rettangoli congruenti [1] e due quadrati, pure congruenti, aventi per lato un segmento lungo quanto la somma dei due cateti di ogni triangolo (Fig. 4). Quindi disponi gli 8 triangoli, 4 su un quadrato e 4 sull’altro, come illustrato in figura 5.

La parte del primo quadrato rimasta scoperta è “evidentemente” equivalente (cioè ha la stessa area) alla somma delle due parti del secondo quadrato rimaste scoperte. Queste tre parti sono: la prima, il quadrato di lato lungo quanto l’ipotenusa di uno dei triangoli; le altre due, i quadrati di lati lunghi quanto i cateti del triangolo.

Siccome la circostanza si verifica tutte le volte che si esegue l’esperimento, si conclude che:

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’ipotenusa
è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Si tratta del celeberrimo **teorema di Pitagora**.

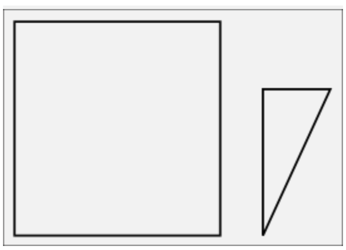

FIG. 4

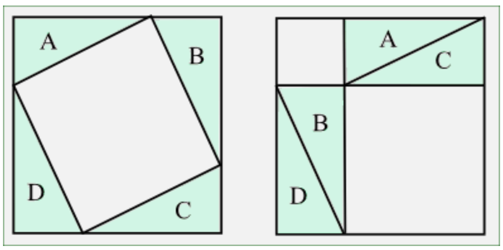

FIG. 5

7.2.2 I procedimenti che hai studiato a suo tempo per giungere alle conclusioni precedenti, se proprio non coincidono con quelli esposti, non se ne dovrebbero discostare molto.

Ad ogni modo, ciò che intendiamo rimarcare è che lo studio della geometria che hai svolto nei tuoi studi precedenti è stato prevalentemente uno studio “sperimentale”, basato per lo più sulla “evidenza intuitiva” dei fatti osservati.

7.3 INADEGUATEZZA DEL METODO INTUITIVO

7.3.1 Uno studio come quello suddetto porta talvolta a conclusioni errate o perlomeno strane.

ESEMPIO. Ritaglia un quadrato, poniamo di 8 quadratini per 8 quadratini, in quattro parti come indicato in figura 6 e disponile in modo da formare un rettangolo come in figura 7.

I quadratini, che prima erano 8×8, cioè 64, adesso sono 5×13, vale a dire 65. Dunque $64=65$?!

È chiaro che da qualche parte c’è un errore e lo scoprirai da te, magari con l’aiuto dell’insegnante; ma per questo devi eseguire l’esperimento con molta precisione e attenzione. Togliti, poi, dalla testa di po-

[1] Per il momento ci accontentiamo di considerare “congruenti” (o “uguali”) due figure geometriche se si possono sovrapporre l’una all’altra in modo da coincidere.

ter individuare l’errore ragionando sui disegni: lo potrai fare e lo farai in futuro [2], ma non adesso.

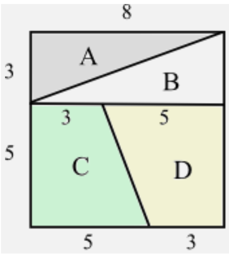

FIG. 6

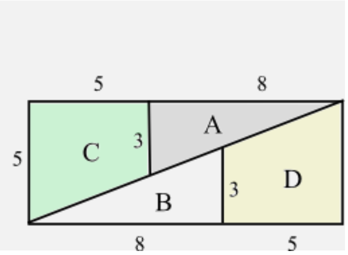

FIG. 7

7.3.2 Le conclusioni basate affrettatamente sull’evidenza intuitiva, dunque, non sempre vanno bene. Si potrebbe pensare che esse non funzionino poiché non si è stati sufficientemente attenti nel trarre le conclusioni e che, di conseguenza, una maggiore attenzione sia sufficiente ad evitare l’errore. In realtà, questo è possibile in molte situazioni ed anche nel caso appena trattato; ma non sempre lo è.
Due esempi, in verità più complessi dei precedenti, dovrebbero contribuire a rendere più chiaro ciò che vogliamo dire [3].

- ESEMPIO 1. Considera un segmento AB (Fig. 8a) e, internamente ad esso, un punto P, scelto arbitrariamente. Dividi il segmento AB in due parti congruenti. Dividi poi ciascuna di queste a sua volta in due parti congruenti e ognuna delle parti ottenute dividila ancora in due parti congruenti. E così finché vuoi.

Domanda: uno dei punti di divisione finirà prima o poi per cadere in P?
Rifletti bene prima di continuare la lettura.

(a) (b)

FIG. 8

Siamo pronti a scommettere che la stragrande maggioranza (tutti?) dei tuoi compagni ha risposto SÌ, giacché a questa conclusione porta per l’appunto l’intuizione. Fa’ allora attenzione alle seguenti argomentazioni.
Supponiamo che il segmento AB sia lungo 1. Questo significa che, considerando la retta AB come retta dei numeri, al punto A è possibile associare il numero 0 ed al punto B il numero 1 (Fig. 8b).
Al primo punto di divisione, cioè al punto medio M del segmento AB, è associato allora il numero $1/2$. Al punto medio del segmento AM è associato il numero $1/2^2$, cioè 1/4, a quello del segmento MB è associato il numero $3/2^2$, cioè 3/4. In generale, ai punti di divisione – costruiti nel modo suddetto – sono associati numeri del tipo $a/2^n$, dove $a,\ n$ sono numeri interi positivi con $a<2^n$. Sicché, solo se al punto P è associato un numero di questo tipo, è affermativa la risposta alla domanda precedente.

---

[2] Cfr.: Unità 19: Rette nel piano cartesiano, sezione “verifiche”, esercizio N° 19.
[3] In questi due esempi l’aiuto del professore è fondamentale. Se gli argomenti dei due esempi fossero comunque di difficile comprensione, si può rinviarne lo studio a tempi più idonei.

Ma i numeri compresi fra 0 ed 1 sono solo di questo tipo? Pensa a questi numeri: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$.

- ESEMPIO 2. Considera i segmenti AB e CD e il segmento u (Fig. 9). Nel primo il segmento u è contenuto esattamente 3 volte, nel secondo è contenuto esattamente 5 volte: si dice che i due segmenti AB e CD sono commensurabili.

In generale, due segmenti si dicono **commensurabil**i se esiste almeno un segmento che è contenuto esattamente un numero intero di volte nell'uno e un altro numero intero di volte nell'altro.
Ci domandiamo: esistono segmenti non commensurabili (o **incommensurabili**), cioè tali che non esista alcun segmento che sia contenuto un numero intero di volte nell'uno e un altro numero intero di volte nell'altro? Sapresti dare una risposta convincente? Se sì, bene. In ogni caso continua a leggere.

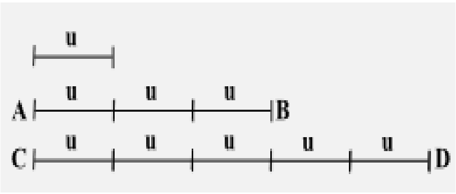

FIG. 9

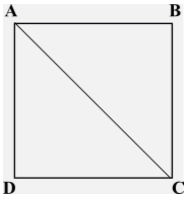

FIG. 10

Considera il lato AB e la diagonale AC di un quadrato ABCD (Fig. 10). L'intuizione porta a pensare che esista un segmento, sufficientemente piccolo, che, preso un numero intero m di volte, ricopra esattamente AC e, preso un altro numero intero n di volte, ricopra esattamente AB. È davvero così?
Ragioniamo. Se esistesse un tale segmentino, posto di assumere uguale ad 1 la sua misura, le misure di AC ed AB sarebbero m ed n. E quindi, in virtù del teorema di Pitagora:

$$m^2 = n^2 + n^2, \quad \text{ossia: } m^2 = 2\,n^2 .$$

Sembra che non ci sia nulla di strano, che sia tutto normale, eppure l'ultima uguaglianza scritta non può sussistere, come già abbiamo spiegato in altra unità [4].
Da questo si desume che l'ammissione di partenza è falsa: non esiste, cioè, un segmento, comunque piccolo, che sia contenuto esattamente un certo numero intero di volte nella diagonale del quadrato e un altro numero intero di volte nel lato. Detto in altri termini:

il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono incommensurabili.

7.3.3 In due situazioni quello che l'intuizione faceva apparire scontato, quasi banale, al contrario è risultato impossibile. L'accertamento di questa impossibilità, però, non è frutto di una constatazione sperimentale, che anzi faceva intuire proprio il contrario, ma di un tipo di controllo diverso: un controllo basato sul cosiddetto *ragionamento deduttivo*.
Lo utilizzeremo spesso in futuro, ma in realtà abbiamo già avuto modo di utilizzarlo in passato.

7.4 METODO RAZIONALE

7.4.1 Abbiamo fatto vedere come il ricorso all'intuizione possa condurre talvolta a conclusioni sbagliate. Ciò significa allora che esso debba essere bandito dalla matematica? No. Tutt'altro. L'intuizione, infatti, consente a volte di "indovinare" il risultato, ma, per essere sicuri della sua validità, che altrimenti rimarrebbe a livello di semplice congettura, la "scoperta" va controllata attraverso uno strumento più

[4] Cfr.: Unità 3: Numeri reali, N° 3.1.1 o anche "Complementi" in chiusura dell'unità medesima.

affidabile: per l'appunto il **ragionamento deduttivo**. Esso è un tipo di argomentazione che segue questo schema:

SE … ALLORA,

SE questo è vero **ALLORA** è vero quest'altro**.**

Insomma col ragionamento deduttivo la verità di una proposizione è accertata (si dice più propriamente: **dimostrata**) deducendola da quella di altre proposizioni, già dimostrate o anche assunte per vere come se fossero le regole di un gioco.

7.4.2 In questo nostro approccio alla geometria **ammettiamo che le "regole del gioco" siano certe proprietà delle figure, che accettiamo come vere perché la loro evidenza ci convince**.

Faremo vedere come da tali proprietà se ne possano dedurre molte altre, non già col ricorso a prove o controlli sperimentali, ma per l'appunto col ragionamento deduttivo. E lo faremo con la tua collaborazione, che ti chiediamo da subito. In primo luogo, perché faremo affidamento su alcuni ricordi di geometria che ti porti dagli studi precedenti, come i concetti di segmento, di semiretta, di angolo, di triangolo, di quadrilatero. In secondo luogo, perché ti coinvolgeremo in alcune vere e proprie dimostrazioni, sia durante lo svolgimento dell'unità sia nella sezione "verifiche".

Insomma, lo sviluppo di questa unità richiede una tua massiccia collaborazione.

7.5 MISURE DI SEGMENTI E ANGOLI. PERIMETRO DI UN POLIGONO

7.5.1 Per prima cosa vogliamo riportarti ai concetti di **misura** di un segmento (chiamata anche **lunghezza** del segmento) e di **misura** di un angolo (chiamata anche **ampiezza** dell'angolo).

Fra tutti i segmenti ne scegliamo in maniera arbitraria uno, purché non sia nullo, e lo chiamiamo ***unità di misura dei segmenti*** (o ***segmento unitario*** o ***lunghezza unitaria***). Per esempio potrebbe essere:

- il segmento che congiunge le punte del mignolo e del pollice della tua mano destra, quand'è distesa al massimo;
- il segmento che congiunge due tacche che hai inciso su un'asta di legno;
- un certo segmento che hai tracciato sul tuo foglio da disegno;
- un altro segmento qualsiasi.

Capisci da te che se ognuno si scegliesse una sua unità di misura si finirebbe per creare una gran confusione. Per evitare ciò, la Conferenza Generale di Pesi e Misure, riunita a Parigi nel 1983, ha convenuto di scegliere come lunghezza unitaria il **metro**, definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $\frac{1}{299\,792\,458}$ di secondo [5]. Si indica con la scrittura:

$$\mathbf{1\ m}\ .$$

Nella pratica sono usate anche sottomultiple o multiple del metro. Per esempio il *centimetro*, il *millimetro*, il *chilometro*, definite in questo modo:

$$1\ \text{cm}=10^{-2}\ \text{m},\quad 1\ \text{mm}=10^{-3}\ \text{m},\quad 1\ \text{km}=10^{3}\ \text{m}.$$

A titolo di curiosità vogliamo segnalare due particolari lunghezze:

- la prima si chiama *angström* (Å) ed è usata per misurare distanze "piccolissime" (per esempio le distanze

[5] In realtà, già da molto tempo il metro era stato assunto come segmento unitario e precisamente dall'anno 1799, ma la sua definizione non soddisfaceva le esigenze di precisione che la Conferenza richiedeva. In base a quella definizione, un metro era pari alla 40 milionesima parte del meridiano terrestre.

tra le particelle che compongono un atomo, come elettroni, protoni, neutroni, ecc.):

$$1 \text{ angström} = 10^{-10} \text{ m} ;$$

- la seconda si chiama *anno-luce* (a.l.), equivale allo spazio percorso dalla luce in un anno ed è usata per misurare distanze “grandissime” (per esempio le distanze tra i corpi celesti):

$$1 \text{ anno-luce} \approx 9{,}46 \times 10^{15} \text{ m} .$$

Per misurare le distanze tra i corpi del sistema solare è usata normalmente un’altra particolare unità di misura: si tratta della distanza media della Terra dal Sole ed è chiamata *unità astronomica* (u.a.). In realtà questa distanza è circa 149,59 milioni di chilometri. Tenendola allora presente, ti proponiamo di completare la seguente tabella (Tab.1):

Tab. 1 – Distanze medie dei pianeti dal Sole.

Pianeta	Terra	Mercurio	Venere	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno	Plutone [6]
Distanza in milioni di chilometri	149,59		108,16		779,25		2.857,3		5.900,1
Distanza in unità astronomiche	1	0,387		1,524		9,939		30,06	

ESERCIZIO. Di recente (febbraio 2017), gli scienziati hanno scoperto che esiste un sistema solare simile al nostro, situato a circa 39 anni luce dalla Terra. a) A quanti chilometri corrisponde tale distanza? b) A quante unità astronomiche? [**R.** a) $\approx 3{,}7 \times 10^4$ km; b) $\approx 2{,}5 \times 10^6$ u.a.]

7.5.2 Vediamo adesso come si misura un segmento particolare AB, per esempio quello che congiunge gli estremi del bordo del tuo tavolo da lavoro più vicino a te (Fig. 11).
Hai valutato ad occhio nudo che esso, giusto per fissare le idee, è lungo più di 1 m ma meno di 2 m.
Prendi, allora, un’asta di un metro, graduata in decimetri, che diciamo genericamente “metro” (Fig. 12), e riportala sul bordo AB in modo che la tacca “0” coincida con l’estremo A. Ammettiamo che la tacca “10” finisca in C.

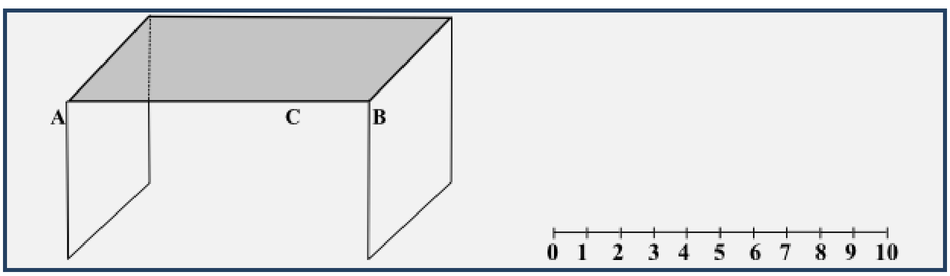

FIG. 11 FIG. 12

Sposta adesso la tacca “0” in modo che cada in C e supponiamo che l’estremo B del bordo del tavolo cada fra le tacche “2” e “3”. Possiamo intanto dire che il bordo AB ha una misura compresa fra 1,2 m e 1,3 m.
Se non disponiamo di uno strumento più sensibile dobbiamo accontentarci di questo risultato.
Se invece il nostro “metro” fosse graduato in centimetri, potremmo arrivare fino alla 2ª cifra decimale ed ottenere, ammettiamo, una misura compresa fra 1,24 m e 1,25 m.
Se addirittura (come in pratica accade quasi sempre con questi strumenti) il metro fosse graduato in millimetri, potremmo spingerci fino alla 3ª cifra decimale ed ottenere, tanto per dire, una misura compresa fra 1,248 m e 1,249 m.

[6] Nel 2006 l’Unione Astronomica Internazionale ha declassato Plutone a “pianeta nano”.

In teoria potremmo spingerci fino ad una cifra decimale di ordine qualsiasi: basta disporre di uno strumento adatto, ammesso che esista. (A dire il vero, le cose non sono così semplici e banali, ma per comodità facciamo finta che lo siano.) Otterremmo così, come misura del segmento, un numero decimale illimitato. Il che ci autorizza a concludere che:

La misura di un segmento è un numero reale.

Chiaramente, nella pratica, non esistono strumenti così sensibili da darci la precisione che vogliamo; per cui la misura di un dato segmento è espressa, con approssimazione, da un numero decimale finito, con il numero di cifre significative che la sensibilità dello strumento consente. A titolo di esempi:

- il *metro da sarto* permette di ottenere misure approssimate fino ai millimetri, vale a dire fino a 10^{-3} m, ma non oltre;
- il *calibro* è idoneo a misurare lunghezze fino al centesimo di millimetro, vale a dire fino a 10^{-5} m.

7.5.3 La misura di un segmento AB – detta anche **distanza dei due punti A, B** – si indica con una delle scritture seguenti:

$$\overline{AB},\ \ d(A,B),\ \ dist(A,B).$$

A volte, se non si creano equivoci, semplicemente con AB. Due segmenti, AB e A'B', aventi la stessa misura, cioè tali che $d(A,B)=d(A',B')$, si dicono **congruenti** (o **uguali**), Si scrive:

$$\mathbf{AB \cong A'B'}.$$

Oppure semplicemente **AB=A'B'**.

Se invece $d(A,B)\neq d(A',B')$, dei due segmenti si dice **maggiore** quello che ha misura maggiore e **minore** quello che ha misura minore.

In particolare, se il segmento AB è maggiore di A'B' si scrive $d(A,B)>d(A',B')$, o anche $AB>A'B'$; analogamente, se AB è minore di A'B' si scrive $d(A,B)<d(A',B')$ oppure $AB<A'B'$.

7.5.4 La misura degli angoli comporta maggiori difficoltà che non quella dei segmenti.

Qui ci basta ricordare che una ***unità di misura degli angoli*** (o ***angolo unitario*** o ***ampiezza unitaria***) è il **grado sessagesimale** (o semplicemente **grado**), ottenuto dividendo il cerchio in 360 parti uguali [7] e prendendone una. Un *grado* si indica con la scrittura: **1°**.

Sono suoi sottomultipli:

- il *primo*, pari a 1/60 di grado, che si indica con **1′**;
- il *secondo*, pari a 1/60 di primo, che si indica con **1"**.

LABORATORIO DI MATEMATICA. Un angolo la cui misura α è 30 gradi, 18 primi e 47 secondi, si dice in maniera più sintetica che ha la seguente misura:

$$\alpha = 30°18'47''.$$

Un altro angolo ha misura β tale che:

$$\beta = 13°35'28''.$$

Devi calcolare le ampiezze: $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$. Come pensi di procedere?

Dopo aver risolto la questione, calcola i valori $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$ per i seguenti angoli:

$\alpha = 75°15'27'',\ \beta = 38°22'20''$; $\alpha = 135°27'42'',\ \beta = 22°35'45''$;

---

[7] Questa suddivisione sembra debba attribuirsi a **Ipparco** di Nicea, vissuto nel II sec. a.C.. Per lo meno secondo alcuni storici, mentre secondo altri l'attribuzione va fatta al suo contemporaneo **Ipsicle** di Alessandria.

$\alpha = 87°23'36''$, $\beta = 60°40'$; $\alpha = 95°24'12''$, $\beta = 84°53''$.
Ti può essere utile ricordare che $1° = 60'$ e $1' = 60''$.

7.5.5 Per misurare un angolo si ricorre nella pratica ad un particolare strumento detto *goniometro* (Fig. 13).

FIG. 13

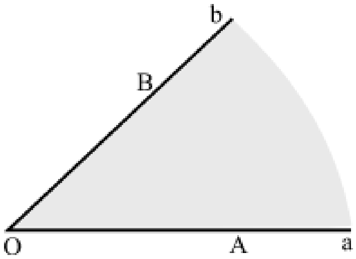

FIG. 14

Ricordiamo che un angolo di vertice O e di lati le semirette Oa e Ob si indica con la scrittura $a\hat{O}b$; o anche, se A e B sono punti presi rispettivamente sul primo e sul secondo lato, con la scrittura $A\hat{O}B$ (Fig. 14).
Alcuni usano anche le scritture seguenti: $\angle aOb$, $\angle AOB$.
Tra gli angoli ricordiamo quelli che hanno misure particolari:
- un *angolo retto* misura 90° (Fig. 15);
- un *angolo piatto* misura 180° (Fig. 16);
- un *angolo giro* misura 360° (Fig. 17).

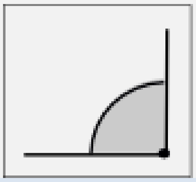
FIG. 15

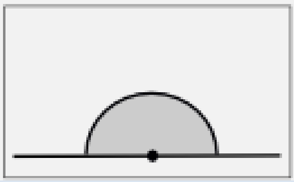
FIG. 16

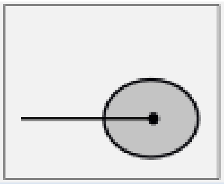
FIG. 17

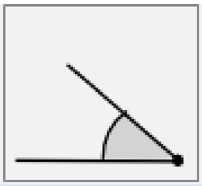
FIG. 18

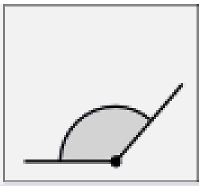
FIG. 19

Ricordiamo poi che:
- un angolo si dice *acuto* se ha una misura compresa fra 0° e 90° esclusi (Fig. 18);
- un angolo si dice *ottuso* se ha una misura compresa fra 90° e 180° esclusi (Fig. 19).

Ti proponiamo, per esercizio, di calcolare le misure degli angoli formati dalle due lancette di un orologio quando segna le ore:

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Quali di essi sono acuti? Quali ottusi? C'è un angolo retto? C'è un angolo piatto?

La misura (o ampiezza) di un angolo $A\hat{O}B$ può essere indicata ancora con $A\hat{O}B$ oppure, se si teme di creare equivoci, si può utilizzare la scrittura: $a(A\hat{O}B)$.
Due angoli $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$, aventi la stessa misura, cioè tali che $a(A\hat{O}B)=a(A'\hat{O}'B')$, si dicono **congruenti** (o **uguali**). Si scrive:

$$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}'B'.$$

Oppure semplicemente $A\hat{O}B=A'\hat{O}'B'$.
Se invece $a(A\hat{O}B)\neq a(A'\hat{O}'B')$, dei due angoli si dice **maggiore** quello che ha ampiezza maggiore e **minore** quello che ha ampiezza minore.

Se l'angolo AÔB è maggiore di A'Ô'B' si scrive a(AÔB)>a(A'Ô'B') o anche AÔB>A'Ô'B'; analogamente, se AÔB è minore di A'Ô'B' si scrive a(AÔB)<a(A'Ô'B'), oppure AÔB<A'Ô'B'.

7.5.6 Presi in maniera arbitraria tre punti – A, B, C – appare evidente che, solo se essi sono allineati (appartengono cioè alla stessa retta) e C si trova fra A e B inclusi (Fig. 20), risulta: $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$.
In ogni altro caso (Fig. 21) invece: $\overline{AB}<\overline{AC}+\overline{CB}$.

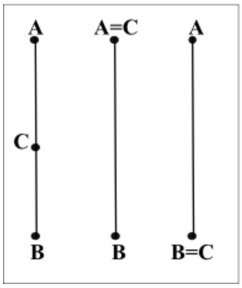

FIG. 20

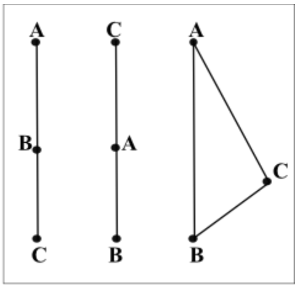

FIG. 21

Assumiamo questo fatto come una delle regole del gioco che vogliamo costruire, la 1ª regola.

R_1: Comunque vengano presi tre punti – A, B, C – risulta:
- **$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$ se e solo se C appartiene ad [AB],**
- **$\overline{AB}<\overline{AC}+\overline{CB}$ se e solo se C non appartiene ad [AB].**

Con la scrittura [AB] indichiamo il segmento AB, compresi gli estremi A, B. Per indicare il segmento AB, esclusi gli estremi, scriviamo]AB[. Invece la scrittura [AB[indica sempre il segmento AB, incluso A ed escluso B; e la scrittura]AB] indica ancora il segmento AB, ma escluso A ed incluso B.

7.5.7 Dalla regola R_1 possiamo ricavare le prime conseguenze. Prima però è necessario rinfrescare alcuni tuoi ricordi.
I triangoli sono elementi particolari di un insieme più ampio di figure geometriche: **i poligoni**.
Per la precisione: il *triangolo* è un poligono di 3 lati, il *quadrilatero* è un poligono di 4 lati, il *pentagono* è un poligono di 5 lati.
A seconda del numero dei lati il poligono prende nomi diversi. Per esempio, continuando con l'elenco:

il poligono di 6 lati si dice *esagono*, il poligono di 7 lati si dice *ettagono*,
il poligono di 8 lati si dice *ottagono*, il poligono di 9 lati si dice *ennagono*,
il poligono di 10 lati si dice *decagono*, il poligono di 12 lati si dice *dodecagono*,
il poligono di 20 lati si dice *icosagono*.

In genere, in un poligono non ci sono particolari relazioni fra i lati né fra gli angoli, salvo alcune relazioni – peraltro importanti – che vedremo nel proseguimento di questa unità.
Può capitare, però, che un poligono abbia i lati tutti congruenti fra loro (sia, cioè, ***equilatero***) e gli angoli tutti congruenti fra loro (sia, cioè, ***equiangolo***). In tal caso il poligono si dice ***regolare***.

In un poligono, oltre ai lati e agli angoli, si considerano altri segmenti particolari: le *diagonali*.
Diagonale di un poligono è ogni segmento avente per estremi due vertici del poligono non appartenenti allo stesso lato. Quante diagonali si possono condurre per ciascun vertice di un poligono di n lati?
Se hai risposto correttamente alla precedente domanda, sei in grado di calcolare quante sono le diago-

nali di un poligono di n lati.
Infatti, per ciascun vertice si possono condurre tante diagonali quanti sono i vertici, esclusi il vertice dal quale si conducono le diagonali ed i due vertici appartenenti ai lati del poligono uscenti da quel vertice, ossia n–3 diagonali. Considerato che vi sono n vertici, si potrebbe concludere che le diagonali sono n(n–3). Ma bisogna tener conto del fatto che, con tale ragionamento, ogni diagonale sarebbe conteggiata 2 volte. Possiamo allora concludere che **le diagonali di un poligono di n lati sono in numero di** $\mathbf{\frac{n(n-3)}{2}}$.

Ecco adesso una prima proprietà dei poligoni:

♦ **T_1: In ogni poligono la lunghezza di ciascun lato è minore della somma delle lunghezze dei lati rimanenti.**

DIMOSTRAZIONE. Se il poligono è un triangolo – poniamo il triangolo ABC – la dimostrazione è un’immediata conseguenza di R_1. Infatti, dal momento che i tre punti A, B, C non sono allineati, risulta chiaramente: $\overline{AB}<\overline{AC}+\overline{CB}$, $\overline{AC}<\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{BC}<\overline{BA}+\overline{AC}$.
Se il poligono ha più di tre lati è sufficiente condurre per un suo vertice tutte le possibili diagonali e, considerando i triangoli ottenuti, rifarsi alla conclusione precedente.

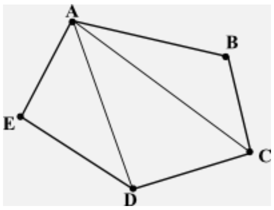

FIG. 22

Per esempio, con riferimento al pentagono ABCDE (Fig. 22), nel quale sono state condotte le diagonali AC e AD, esaminando i tre triangoli ABC, ACD, ADE, risulta:

$$\overline{AB}<\overline{BC}+\overline{AC}, \quad \overline{AC}<\overline{CD}+\overline{AD}, \quad \overline{AD}<\overline{DE}+\overline{EA},$$

da cui, sommando membro a membro e semplificando, segue:

$$\overline{AB}<\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}.$$

Analogamente si ragiona per gli altri lati.

La somma delle lunghezze dei lati di un poligono si definisce **perimetro** del poligono. Ma, a volte, con il termine *perimetro* si intende pure il *contorno* (o *frontiera*) del poligono. Dal contesto si capisce se ci si riferisce all’una concezione o all’altra.
Vale la seguente proprietà, che è un’immediata conseguenza della precedente:

♦ **T_2: In ogni poligono la lunghezza di ciascun lato è minore del semiperimetro del poligono.**

Di questa proprietà si chiede a te la dimostrazione. Se non ce la fai chiedi aiuto a qualche tuo compagno o al tuo professore. Per aiutarti, ti diciamo che, tanto per cominciare, dovresti ricorrere alla seguente proprietà delle disuguaglianze tra numeri: se $a<b$ allora $a+m<b+m$ e tenere presente la proprietà T_1.

ESERCIZIO. Un triangolo in cui non ci sono due lati congruenti (si definisce **triangolo scaleno**) ha perimetro uguale a 15 cm. Le misure dei suoi lati, espresse in cm, sono numeri interi, il cui prodotto non supera 100. Quali sono queste misure?

7.6 ALTRE REGOLE DEL GIOCO E ALTRE CONSEGUENZE

7.6.1 Affiniamo il nostro gioco, introducendo altre regole. Di esse scopriremo pure delle interessanti conseguenze ed altre ne scoprirai tu risolvendo gli esercizi posti nella successiva sezione "complementi ed esercizi". Incominciamo con alcune definizioni, che sono necessarie perché altrimenti il discorso diventerebbe troppo prolisso e involuto.

- Una retta a si dice **parallela** ad una retta b se le due rette non hanno punti comuni (Fig. 23). Si scrive: a∥b.
- Due rette a, b secate da una trasversale t (Fig. 24) formano 8 angoli; gli angoli 1-2 (oppure 3-4), presi assieme, si dicono ***alterni interni***.

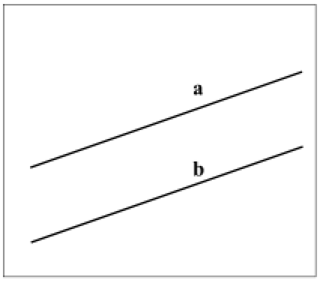

FIG. 23

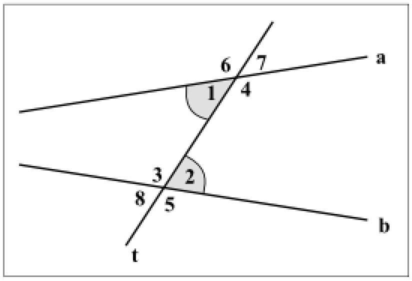

FIG. 24

Assumiamo ora le seguenti regole:

R2: Dati una retta r ed un punto P esterno ad essa, per P si può condurre una ed una sola retta s parallela ad r (Fig. 25)**.**

R3: Due rette parallele, secate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti (Fig. 26)**.**

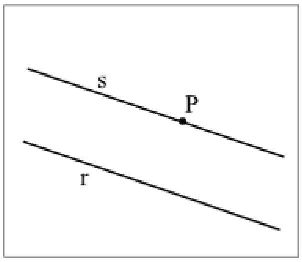

FIG. 25

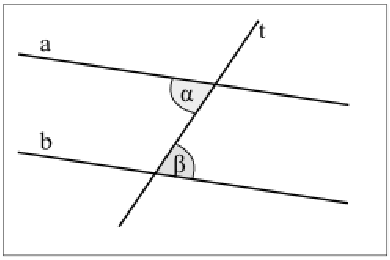

FIG. 26

7.6.2 Vediamo quali conseguenze si desumono da esse.

♦ **T3: La somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°.**

DIMOSTRAZIONE. Di questa proprietà conosci una verifica sperimentale. Adesso imparerai a dimostrarla, cioè a dedurla da quanto ammesso fin qui.

Consideriamo allora il triangolo ABC (Fig. 27), i cui angoli interni abbiano ampiezze α, β, γ, e conduciamo per A la retta DE parallela alla retta BC. (Lo possiamo fare in virtù della regola R2). In forza della regola R3, l'angolo $B\hat{A}D$ ha ampiezza β e l'angolo $C\hat{A}E$ ha ampiezza γ. Sicché $\alpha+\beta+\gamma$ è l'ampiezza di un angolo piatto, ossia 180°. Come volevamo dimostrare.

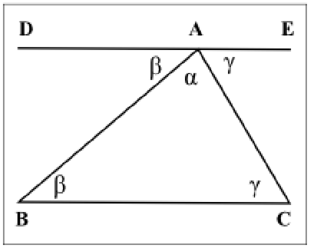

FIG. 27

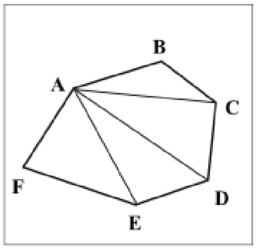

FIG. 28

♦ T_4: La somma degli angoli interni di un poligono di n lati misura (n–2) 180°.

DIMOSTRAZIONE. Considerato un poligono qualunque di n lati (Fig. 28 – dove n=6), si conducano per un suo vertice, per esempio A, tutte le possibili diagonali. Queste dividono il poligono in n-2 triangoli. Per cui … [continua da solo.]

NOTA BENE. La proprietà T_4 vale sia se il poligono è convesso sia se è concavo ma non intrecciato.
Precisiamo al riguardo che un poligono si dice ***convesso*** se la retta di ciascuno dei suoi lati lascia da una stessa parte il poligono medesimo (Fig. 28). Altrimenti si dice ***concavo*** (Fig. 29). In particolare un poligono concavo è ***intrecciato*** se due o più lati si secano in un punto diverso dai vertici (Fig. 30).
Salvo avviso contrario noi ci riferiremo sempre e soltanto a poligoni convessi.

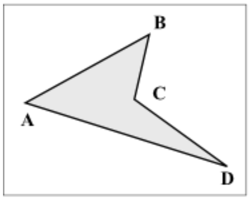

FIG. 29

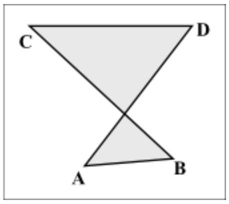

FIG. 30

Alcune domande per te.

- Se un triangolo ha tutti gli angoli congruenti fra loro, quanto misura ciascuno di essi?
- Se un quadrilatero ha tutti gli angoli congruenti fra loro, quanto misura ciascuno di essi?
- Se un pentagono ha tutti gli angoli congruenti fra loro, quanto misura ciascuno di essi?

♦ T_5: Due rette risultano parallele se, secate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione richiede un'attenzione speciale.
Consideriamo le rette a, b, secate dalla trasversale t (Fig. 31): formano gli angoli alterni interni di ampiezze α, β, che per ipotesi sono uguali.
Ammettiamo per un momento che le due rette non siano parallele. Questo significa che si secano in un punto P formando il triangolo PAB.
Siccome l'angolo $P\hat{A}B$ forma, con l'angolo α, un angolo piatto, anche $P\hat{A}B+\beta$ è uguale ad un angolo piatto. Ne consegue che, nel triangolo PAB, la somma degli angoli $P\hat{A}B$ e $P\hat{B}A$ misura da sola 180°, vale a dire senza contare l'angolo $A\hat{P}B$, che pure qualcosina misurerà. E ciò non può essere accettato perché in precedenza avevamo concluso che quella somma è esattamente 180° (vedi T_3).
A questa situazione contraddittoria si è giunti per aver ammesso che le due rette a, b non fossero parallele. Dunque, siccome vogliamo evitare la contraddizione, dobbiamo concludere che le due rette sono

parallele. Il che è quanto volevamo provare.

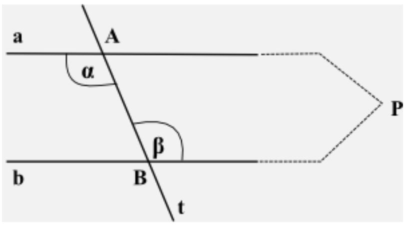

FIG. 31

7.7 NUOVE REGOLE DEL GIOCO E NUOVE CONSEGUENZE

7.7.1 Incominciamo con una definizione.

Due angoli si dicono **supplementari** se la somma delle loro ampiezze è 180°.

Quanto misura un angolo supplementare di un angolo di 30°? E il supplementare di 46°15'?

Adesso alcune proprietà.

♦ **T_6: Due angoli supplementari di uno stesso angolo o di due angoli congruenti sono congruenti.**

DIMOSTRAZIONE. Diciamo α, β le ampiezze di due angoli supplementari di un angolo di ampiezza μ (o di due angoli congruenti di ampiezza μ). Allora: $\alpha+\mu=180°$, $\beta+\mu=180°$. Da qui segue:

$$\alpha=180°-\mu,\quad \beta=180°-\mu$$

e perciò:

$$\alpha=\beta.$$

Sicché i due angoli, avendo la stessa ampiezza, sono congruenti.

♦ **T_7: Due angoli opposti al vertice sono congruenti.**

La dimostrazione, immediata conseguenza della proprietà T_6, è lasciata a te. Ricordi che anche di questa proprietà hai fatto a suo tempo una verifica sperimentale?

7.7.2 COMPLEMENTI ED ESERCIZI.

A) Con riferimento alla figura 24, che ti suggeriamo di riprodurre:
- gli angoli 5-6 (oppure 7-8), presi assieme, si dicono ***alterni esterni***;
- gli angoli 1-4 (oppure 2-3), presi assieme, si dicono ***coniugati interni***;
- gli angoli 5-8 (oppure 6-7), presi assieme, si dicono ***coniugati esterni***;
- gli angoli 1-8 (oppure 2-7 oppure 3-6 oppure 4-5) si dicono ***corrispondenti***.

Ti proponiamo di dimostrare le seguenti proprietà:

1) Due rette parallele, secate da una trasversale, formano:
- **angoli alterni esterni congruenti;**
- **angoli corrispondenti congruenti;**
- **angoli coniugati interni (ed esterni) supplementari;**

2) Due rette risultano parallele se, secate da una trasversale, formano:
- **angoli alterni esterni congruenti;**
- **angoli corrispondenti congruenti;**
- **angoli coniugati interni (od esterni) supplementari.**

B) Si dice ***angolo esterno di un poligono*** un angolo formato da un lato col prolungamento del consecutivo.

Dimostra che: **Ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.**

7.7.3 Come detto sopra, la proprietà T_7 è quella che, introducendo questa unità (Esempio 1, n. 7.2), avevamo verificato per via sperimentale. In precedenza abbiamo avuto modo di dimostrare un'altra proprietà delle figure piane (la T_3) che all'inizio (Esempio 2, n. 7.2) abbiamo pure verificato sperimentalmente. Ci proponiamo di giungere ad una dimostrazione anche della proprietà enunciata e verificata in esempio 3, n. 7.2 (teorema di Pitagora). Ma per questo ci vuole più tempo e abbiamo bisogno di introdurre nuove regole nel nostro gioco e di determinarne le conseguenze, o almeno quelle che interessano il raggiungimento del nostro scopo. Tuttavia, prima di procedere, vogliamo coinvolgerti in una attività di tipo sperimentale.

LABORATORIO DI MATEMATICA.

- ESERCIZIO 1. Servendoti di un goniometro tarato in gradi e di una riga tarata in millimetri, disegna un triangolo ABC in cui:
  1) $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 12$ cm, $B\hat{A}C = 60°$;
  2) $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 9$ cm, $B\hat{A}C = 120°$.

Valuta la misura del lato BC con la precisione di 1 mm e le misure degli angoli $A\hat{B}C$ ed $A\hat{C}B$ del triangolo con la precisione di 1°.

Attenzione: L'angolo $B\hat{A}C$ può avere qualsiasi misura o deve sottostare a qualche condizione?

- ESERCIZIO 2. Con gli stessi strumenti dell'esercizio precedente disegna un triangolo ABC in cui:
  1) $\overline{BC} = 5$ cm, $A\hat{B}C = 30°$, $A\hat{C}B = 80°$;
  2) $\overline{BC} = 4$ cm, $A\hat{B}C = 40°$, $A\hat{C}B = 25°$.

Valuta le misure dei lati AB e AC con la precisione di 1 mm e la misura dell'angolo $B\hat{A}C$ con la precisione di 1°.

Attenzione: Gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ possono avere misure qualsiasi o devono sottostare a qualche condizione?

- ESERCIZIO 3. Servendoti dei soliti strumenti (con l'aggiunta del compasso) disegna un triangolo ABC in cui:
  1) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CA} = 3$ cm;
  2) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm, $\overline{CA} = 15$ cm.

Valuta le misure degli angoli interni del triangolo con la precisione di 1°.

Attenzione: I lati del triangolo possono avere misure qualsiasi o devono sottostare a qualche condizione?

Nella risoluzione dei tre esercizi precedenti, a parte la difficoltà di costruzione riscontrata nell'ultimo di essi, ma certamente superata (magari con qualche suggerimento), e nel rispetto delle condizioni che devono essere imposte nella scelta delle misure dei lati e degli angoli del triangolo, hai potuto constatare che in ognuno dei casi esaminati sono determinati gli elementi incogniti del triangolo: questo lo sai perché anche i tuoi compagni, pur avendo lavorato su triangoli "distinti" dai tuoi e non sullo stesso triangolo, hanno ottenuto misure pressoché uguali alle tue. Eventuali differenze di misure rientrano nei cosiddetti "limiti degli errori di sperimentazione". Dunque si può affermare che:

- se due (o più) triangoli hanno congruenti ordinatamente due lati e l'angolo compreso allora hanno con-

gruenti i rimanenti elementi (questo in base ai risultati dell'esercizio 1);
- se due (o più) triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e gli angoli ad esso adiacenti allora hanno congruenti i rimanenti elementi (questo in base ai risultati dell'esercizio2);
- se due (o più) triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati allora hanno congruenti gli angoli (questo in base ai risultati dell'esercizio 3).

Ora, vale la seguente definizione: Due triangoli, aventi ordinatamente congruenti i lati e gli angoli (Fig. 32), si dicono **congruenti** (o **uguali**).

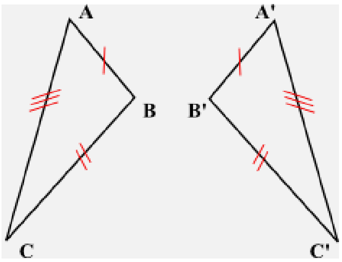

FIG. 32

Di modo che le conclusioni precedenti costituiscono dei veri e propri ***criteri*** per riconoscere se due triangoli sono congruenti, senza essere costretti a controllare ogni volta la congruenza di tutti e tre i loro lati e di tutti e tre i loro angoli.

Noi, si capisce, abbiamo verificato sperimentalmente questi criteri, non li abbiamo dimostrati; non li abbiamo cioè dedotti con ragionamento dalle altre proprietà fin qui acquisite. Ebbene, da qui in poi assumeremo questi criteri come nuove regole del gioco che stiamo costruendo passo dopo passo.

Per la precisione tali regole sono le seguenti:

♦ **R_4: Se due triangoli hanno congruenti ordinatamente due lati e l'angolo compreso allora sono congruenti**.

♦ **R_5: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli adiacenti allora sono congruenti**.

♦ **R_6: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati allora sono congruenti.**

Queste regole sono più conosciute nell'ordine come **PRIMO, SECONDO E TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI**.

7.7.4 Altra definizione. Si chiama **parallelogramma** ogni quadrilatero avente i lati opposti paralleli (Fig. 33).

Adesso due nuove proprietà.

♦ **T_8: In ogni parallelogramma:**
1) i lati opposti sono congruenti;
2) gli angoli opposti sono congruenti;
3) le diagonali si bisecano.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il parallelogramma ABCD (Fig. 34), tracciamo la sua diagonale AC e prendiamo in esame i due triangoli, ACB ed ACD, in cui essa divide il quadrilatero. Essi sono congruenti per la regola R_5 (secondo criterio di congruenza dei triangoli). Infatti hanno:
- il lato AC in comune;
- gli angoli $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ congruenti perché angoli alterni interni formati dalle parallele AB e DC secate

dalla trasversale AC;
- gli angoli $B\hat{C}A$ e $D\hat{A}C$ congruenti per un motivo analogo.

Di conseguenza: $AB \cong DC$, $BC \cong AD$, $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$.
Ripetendo lo stesso ragionamento, ma con l’altra diagonale BD, si dimostra che $B\hat{A}D \cong B\hat{C}D$.
Restano così provate le prime due proposizioni dell’enunciato.

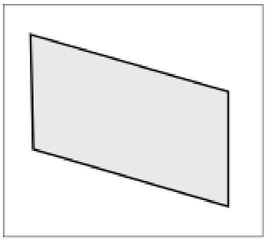
FIG. 33

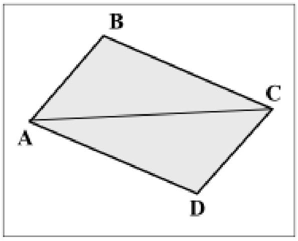

FIG. 34

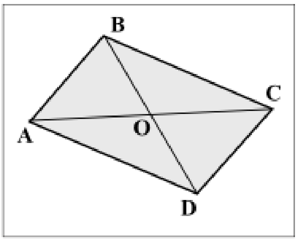

FIG. 35

Per dimostrare la terza diciamo O il punto in cui si secano le diagonali AC e BD del parallelogramma (Fig. 35) e osserviamo che i due triangoli AOB e COD sono congruenti per la regola R_5. Essi, infatti, hanno: $AB \cong DC$, $A\hat{B}O \cong C\hat{D}O$, $B\hat{A}O \cong D\hat{C}O$. Perciò: $OA \cong OC$, $OB \cong OD$.

♦ **T_9: Un quadrilatero è un parallelogramma se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:**
1) **i lati opposti sono congruenti;**
2) **gli angoli opposti sono congruenti;**
3) **le diagonali si bisecano;**
4) **due lati opposti sono paralleli e congruenti.**

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo la prima proposizione dell’enunciato (il quadrilatero ha i lati opposti congruenti) lasciando a te il compito di dimostrare le altre. Ti ricordiamo soltanto che in ogni caso bisogna giustificare che i lati opposti del quadrilatero sono paralleli per poter concludere che si tratta di un parallelogramma oppure rifarsi a qualche proprietà già dimostrata.

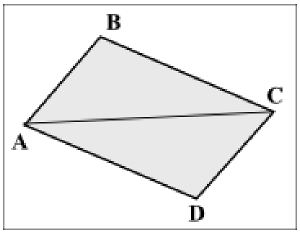

FIG. 36

Sia allora ABCD un quadrilatero in cui $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$ (Fig. 36). Condotta la diagonale AC, osserviamo che i due triangoli ABC e ADC risultano congruenti per la regola R_6 (terzo criterio di congruenza dei triangoli). Conseguentemente: $C\hat{A}B \cong A\hat{C}D$ e $A\hat{C}B \cong C\hat{A}D$.
Pertanto le rette AB e DC, secate dalla trasversale AC, formano angoli alterni interni congruenti e quindi, per la proprietà T_5, sono parallele. Parimenti sono parallele le rette AD e BC giacché con la medesima trasversale formano esse pure angoli alterni interni congruenti.
In definitiva il quadrilatero considerato, avendo i lati opposti paralleli, è un parallelogramma.

Un esercizio per te. Sono dati due segmenti disuguali.
a) Si può costruire un parallelogramma che abbia i segmenti come lati consecutivi? In che modo? Se ne

può costruire uno solo?

b) Si può costruire un parallelogramma che abbia i segmenti come diagonali? In che modo? Se ne può costruire uno solo?

7.8 PERPENDICOLARITÀ. RETTANGOLI E ROMBI.

7.8.1 Due angoli, le cui misure hanno per somma quella di un angolo retto, si dicono **complementari**.

Un angolo di 30° ed uno di 60° sono complementari? Lo sono un angolo di 38° ed uno di 90°?
Calcola le misure degli angoli complementari dei seguenti angoli:

15° 45° 50° 13°45' 48°30'27" 53°36' 89°15'27"

Dimostra, per esercizio, la seguente proprietà:

♦ **T_{10}: Due angoli complementari di uno stesso angolo o di due angoli congruenti sono congruenti.**

La dimostrazione è analoga a quella di T_6.

7.8.2 Una retta a si dice **perpendicolare** (o **ortogonale**) ad una retta b se le due rette si secano formando un angolo retto (Fig. 37).
Dimostra per esercizio:

♦ **T_{11}: Se due rette secanti formano un angolo retto allora anche gli altri tre angoli sono retti.**

Per indicare che la retta a è perpendicolare alla retta b scriviamo: **a⊥b**.
Ammettiamo quest'altra regola del gioco che stiamo conducendo:

♦ **R_7: Dati un punto P ed una retta r, per P si può condurre una ed una sola retta p perpendicolare ad r.**

Il punto in cui si secano le due rette r e p si chiama *piede della perpendicolare* condotta da P ad r o anche *proiezione ortogonale* (o semplicemente *proiezione*) del punto P sulla retta r.

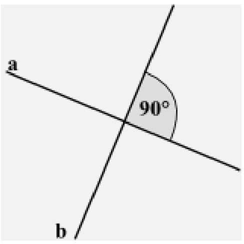

FIG. 37

7.8.3 LABORATORIO DI MATEMATICA.

Le dimostrazioni delle proprietà enunciate in questo paragrafo sono affidate integralmente a te per esercizio. Se trovi difficoltà cerca di superarle con l'aiuto di qualche tuo compagno, prima di rivolgerti al professore.

♦ **T_{12}: Ogni triangolo ha almeno due angoli acuti.**

Ricorda T_4 e la definizione di angolo acuto.

Da questa proprietà e da T_4 discende che il terzo angolo del triangolo può essere: retto (Fig. 38), acuto (Fig. 39), ottuso (Fig. 40). Il triangolo si dice nell'ordine: ***triangolo rettangolo***, ***triangolo acutangolo***, ***triangolo ottusangolo***.

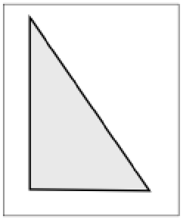
FIG. 38

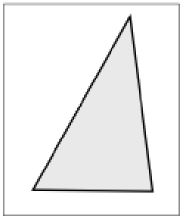
FIG. 39

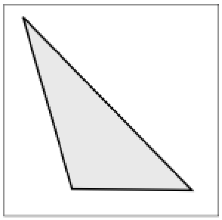
FIG. 40

♦ **T_{13}: Se un quadrilatero ha i quattro angoli congruenti allora ognuno di tali angoli è retto.**

Ricorda T_4 e la definizione di angolo retto.

Ogni quadrilatero con i quattro angoli retti (Fig. 41) si chiama **rettangolo**.

♦ **T_{14}: Ogni rettangolo è un parallelogramma.**

Ricorda T_9.

♦ **T_{15}: Le diagonali di un rettangolo sono congruenti.**

Ogni rettangolo avente i 4 lati congruenti si chiama **quadrato**.

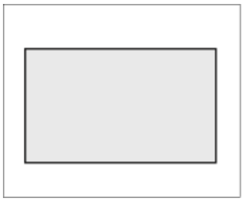
FIG. 41

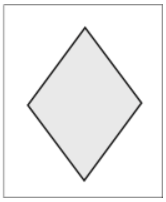
FIG. 42

Il quadrato è l'unico quadrilatero regolare.

Un generico quadrilatero con i 4 lati congruenti non è necessariamente un rettangolo ma, come puoi facilmente spiegare (ricorda T_9), è sicuramente un parallelogramma (Fig. 42): si chiama **rombo** (o **losanga**).

♦ **T_{16}: Le diagonali di un rombo sono perpendicolari.**

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Si può affermare che le diagonali di un quadrato sono perpendicolari? Perché?
2. Assegnati due punti distinti A e B, disegna tutti i quadrati aventi due vertici in tali punti.
3. Dimostra che le bisettrici degli angoli interni di un parallelogramma, che non sia un rombo, intersecandosi individuano un rettangolo.
4. È dato il parallelogramma ABCD. Siano M il punto del lato AB ed N il punto del lato CD tali che AM≅MB e DN≅NC. Si prenda un punto E sul lato AD ed un punto F sul lato BC in modo che risulti AE≅CF.
   a) Dimostra che anche il quadrilatero convesso EMFN è un parallelogramma.
   b) È possibile che tale quadrilatero sia un rombo? È possibile che sia un rettangolo?

7.9 COMPLEMENTI ED ESERCIZI

7.9.1 Un triangolo avente due lati congruenti si dice **isoscele**. Il terzo lato si chiama ***base*** del triangolo. Dimostra che:

1) gli angoli adiacenti alla base di un triangolo isoscele sono congruenti;
2) se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele e la sua base è il lato cui quei due angoli sono adiacenti.

DIMOSTRAZIONE (guidata). Considerato il triangolo ABC, possiamo confrontarlo con se stesso mettendo in corrispondenza i vertici secondo la seguente tabella:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$$

Per cui è come se avessimo due triangoli, ABC e ACB, in cui in ogni caso è: $B\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ e $BC \cong CB$.
Ora, se il triangolo è isoscele sulla base BC, risulta: ….. $\cong$ ….. ; per cui, in virtù della regola R_4 (primo criterio di congruenza dei triangoli), i due triangoli ABC e ACB sono congruenti; di conseguenza: .... ; perciò gli angoli alla base del triangolo sono congruenti.
Se, viceversa, gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ del triangolo dato sono congruenti, per la regola R_5 risulta: .... e, di conseguenza: ....; sicché il triangolo ABC ha due lati congruenti e perciò è isoscele ed ha per base il terzo lato, cioè quello al quale risultano adiacenti i due angoli congruenti.

7.9.2 Come conseguenza immediata di questa proprietà dimostra quest'altra:

Un triangolo *equilatero* (cioè avente i tre lati congruenti) è *equiangolo* (cioè ha i tre angoli congruenti) e viceversa.

Il triangolo equilatero è l'unico triangolo regolare.

Più in generale, il triangolo è l'unico poligono che, se è equilatero è anche equiangolo e se è equiangolo è anche equilatero. Ogni altro poligono può essere equilatero senza essere equiangolo e può essere equiangolo senza essere equilatero.

Prova, per esercizio, a costruire:
- un quadrilatero equilatero ma non equiangolo e un quadrilatero equiangolo ma non equilatero;
- un pentagono equilatero ma non equiangolo e un pentagono equiangolo ma non equilatero.

7.9.3 Dimostra la seguente proprietà notevole dei triangoli:

Se un triangolo ha due lati disuguali anche gli angoli opposti sono disuguali ed al lato maggiore risulta opposto l'angolo maggiore; e viceversa.

DIMOSTRAZIONE (guidata). Considerato un triangolo ABC, supponiamo che sia $AB>AC$. Ci proponiamo di dimostrare che $A\hat{C}B > A\hat{B}C$.
A questo proposito prendiamo il punto $D \in [AB]$ tale che $AD \cong AC$. Il triangolo ADC allora è ……, per cui $A\hat{C}D \cong A\hat{D}C$.
Siccome $A\hat{C}B > A\hat{C}D$ e (perché?) $A\hat{D}C > A\hat{B}C$ allora …... .
Dimostriamo adesso la seconda parte: se $A\hat{C}B > A\hat{B}C$ allora $AB>AC$.
Se così non fosse si avrebbe $AB \cong AC$ oppure $AB<AC$. In entrambi i casi si avrebbe un assurdo. Infatti ...

7.9.4 Dimostra che:

Due triangoli isosceli risultano congruenti se hanno congruenti:
- **l'angolo al vertice ed uno dei lati congruenti;**
- (oppure) **la base ed uno dei lati congruenti;**
- (oppure) **la base ed uno degli angoli congruenti.**

7.9.5 Tieni presenti la seguente definizione:

punto medio di un segmento è il punto che divide il segmento in due parti congruenti,

e dimostra le seguenti proprietà notevoli dei triangoli:

1) Se dal punto medio M del lato AB del triangolo ABC si conduce la corda MN parallela a BC allora:
- **N è il punto medio del lato AC;**
- **la corda MN è lunga la metà di BC.**

2) La corda che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato ed è lunga la metà di esso.

DIMOSTRAZIONE (guidata).

1) Condotta per N la corda NP parallela ad AB, il quadrilatero MNPB, avendo i lati opposti paralleli, è un ....; per cui: .... , ... ; sicché anche AM≅NP.

Siccome gli angoli $A\widehat{M}N$ ed $N\widehat{P}C$ sono congruenti perché entrambi congruenti all’angolo $A\widehat{B}C$ in quanto .... e gli angoli $M\widehat{A}N$ e $P\widehat{N}M$ sono congruenti perché ...., i due triangoli ...... e ..... sono congruenti per .... Ne discende che:

AN≅NC (e quindi N è il punto medio di AC),

MN≅PC (e quindi BP≅PC, per cui MN è lunga la metà di BC).

2) Chiamati M ed N i punti medi dei lati AB ed AC nell’ordine, conduciamo per M la parallela a BC e diciamo N' il punto in cui essa seca AC. Per quanto dimostrato al punto 1), N' è il punto medio del lato AC e perciò coincide con N. Quindi MN è parallela a BC.

Per dimostrare che la corda MN è lunga la metà di BC basta ripetere il ragionamento esposto al precedente punto 1).

ESERCIZI.

1. Dimostra che il segmento che unisce i punti medi dei due lati obliqui di un trapezio è lungo la metà della somma delle basi [(8)].
2. I due segmenti AB e CD si secano nel loro punto medio. Esiste un triangolo in cui AC è un lato e i due segmenti assegnati sono due corde [(9)] ?
3. Di un triangolo sono fissati i punti medi dei lati. Costruisci il triangolo.

7.9.6 Tieni presenti la definizione di ***punto medio di un segmento*** e quest’altra definizione:

bisettrice di un angolo è la semiretta che ha l’origine nel vertice dell’angolo
e divide l’angolo in due parti congruenti.

In ogni triangolo vi sono dei segmenti speciali relativi a ciascuno dei tre lati:

- l’***altezza*** è il segmento perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto;
- la ***mediana*** è il segmento che unisce un vertice col punto medio del lato opposto;
- la ***bisettrice*** è il segmento di bisettrice di un angolo compreso fra il vertice dell’angolo e il lato opposto.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

- Disegna tre triangoli, uno acutangolo, uno ottusangolo ed uno rettangolo, e in ciascuno di essi traccia

---

[8] Per la definizione di trapezio, qualora non la ricordassi dagli studi precedenti, vedi unità 8, paragrafo 8.1.5.

[9] ***Corda*** di un poligono è ogni segmento i cui estremi appartengono a due distinti lati del poligono. Ogni diagonale è una particolare corda.

l’altezza, la mediana e la bisettrice, uscenti dal vertice di uno degli angoli acuti.

- Dimostra che le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono l’una il prolungamento dell’altra. Quindi dimostra che le bisettrici degli angoli formati da due rette secanti formano quattro angoli retti, per cui sono perpendicolari.
- Dimostra che i**n ogni triangolo isoscele:**
  - **coincidono l'altezza, la mediana e la bisettrice relative alla base del triangolo;**
  - **le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti;**
  - **le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti;**
  - **le bisettrici relative ai lati congruenti sono congruenti.**

7.9.7 Vale il seguente **CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI**:

Due triangoli rettangoli sono congruenti se, oltre all’angolo retto, hanno congruenti due altri elementi non entrambi angoli.

DIMOSTRAZIONE (guidata). Diamo delle indicazioni soltanto in relazione al caso in cui i due elementi congruenti siano l’ipotenusa e un cateto. Gli altri casi si riconducono facilmente ai criteri di congruenza di due generici triangoli.

Siano dunque ABC e A'B'C' due triangoli rettangoli in A e in A’ rispettivamente. Sia inoltre:

$$AB \cong A'B',\ BC \cong B'C'.$$

Sul prolungamento del cateto C’A’, dalla parte di A’, prendiamo il punto D tale che A’D≅AC.

I due triangoli rettangoli ABC e A’B’D sono congruenti. Infatti ... .

Di conseguenza BC≅B’D.

Siccome allora ..., il triangolo B’C’D è isoscele sulla base DC’ e perciò i suoi angoli alla base risultano ... . Dunque gli angoli $B\hat{C}A$ e $B'\hat{C}'A'$ sono congruenti. Di conseguenza ... .

7.9.8 Dimostra che:

Il segmento perpendicolare condotto da un punto ad una retta è il minore tra i segmenti che hanno un estremo nel punto e l'altro sulla retta.

La lunghezza del segmento perpendicolare condotto da un punto P ad una retta r si chiama ***distanza del punto dalla retta***. Si indica con d(P, r) o anche con dist(P,r) (Fig. 43).

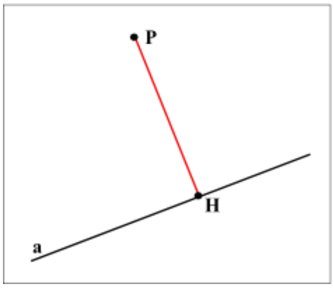

FIG. 43

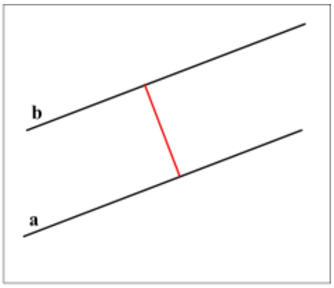

FIG. 44

Dimostra che:

Se due rette a, b sono parallele, la distanza di un punto P di a da b non varia al variare di P su a.

Questo invariante si chiama ***distanza delle due parallele***. Si indica con d(a,b) o anche con dist(a,b) (Fig. 44).

7.9.9 Siano dati un punto P e due rette a, b non parallele (Fig. 45).
Condotta per P la parallela r alla retta b, r interseca a in un punto Q, il quale si chiama **proiezione di P su a secondo la direzione di b.**
Se b⊥a il punto Q, come già detto, si chiama **proiezione ortogonale** (o semplicemente **proiezione**) di P su a.
Consideriamo adesso un segmento AB e due rette r, s non parallele (Fig. 46). Proiettati su r secondo la direzione di s i punti A, B nei punti A’, B’, il segmento A’B’ si chiama **proiezione di AB su r secondo la direzione di s**. Se s⊥r allora A’B’ si chiama **proiezione ortogonale** di AB su r (o più semplicemente **proiezione** di AB su r).

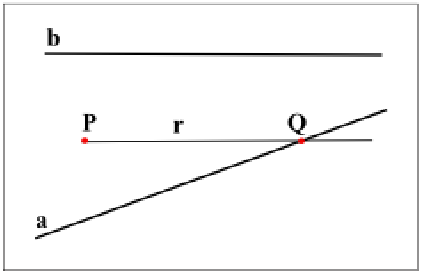

FIG. 45

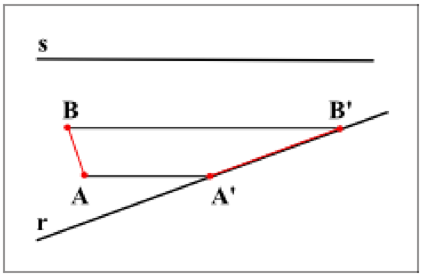

FIG. 46

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. ® Assegnato un quadrilatero Q qualsiasi, considera il quadrilatero Q’ avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero dato (Fig. 47).
   Il quadrilatero Q’ è un quadrilatero particolare?
   Il quadrilatero Q’ può essere un rettangolo? Sotto quale condizione?
   Il quadrilatero Q’ può essere un rombo? Sotto quale condizione?
   Il quadrilatero Q’ può essere un quadrato? Sotto quali condizioni?
   Discutine in classe con i tuoi compagni e, se del caso, chiedi suggerimenti al tuo professore.
2. ® Ti proponi di ricoprire il pavimento di una stanza utilizzando mattonelle uguali, aventi la forma di poligoni regolari dello stesso numero di lati. Lo puoi fare con mattonelle della forma di triangoli equilateri (Fig. 48).
   Lo puoi fare pure con mattonelle della forma di quadrati?
   Lo puoi fare con mattonelle aventi la forma di un qualsiasi poligono regolare?
   Discutine in classe con i tuoi compagni e, se del caso, chiedi suggerimenti al tuo professore.

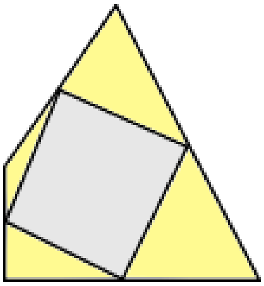
FIG. 47

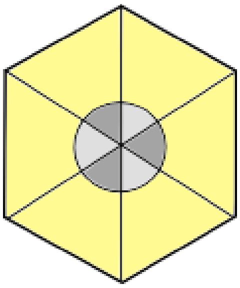
FIG. 48

7.10 UNA RIFLESSIONE CRITICA

Come all’inizio di questa unità abbiamo premesso e promesso, la “verità” di molte proprietà geometriche è stata dedotta senza ricorrere a fatti sperimentali ma basandola su altre proprietà ammesse per vere. A ben riflettere, tuttavia, abbiamo utilizzato per le varie dimostrazioni alcuni fatti che, in realtà, non sono stati dichiarati esplicitamente. Come, per esempio, questi fatti:

- *una retta ha tanti punti quanti ne servono;*
- *per due punti distinti passa una e una sola retta;*
- *nel piano v’è almeno una retta e v’è almeno un punto che non le appartiene.*

Inoltre ci siamo serviti di alcuni termini, come quelli di *punto*, *retta*, *piano* senza sapere cosa fossero esattamente. Abbiamo ammesso implicitamente altre cose.

L’abbiamo fatto perché, in fondo, pensiamo di sapere cosa siano gli enti che non abbiamo definito e di non aver dubbi sulle cose che non abbiamo ammesso esplicitamente. E pensiamo questo perché, in realtà, rimaniamo ancorati pur sempre all’evidenza intuitiva. Non è proprio corretto fare così, ma l’abbiamo fatto per comodità.

Su questa faccenda potremmo avviare un lungo e complicato discorso, per far vedere come anche le inesattezze su evidenziate si possano correggere. A questo punto dei tuoi studi, però, troveresti difficoltà a seguirlo con consapevolezza. Per questo ci esimiamo dal farlo e interrompiamo qui il nostro gioco [10]. Il tuo insegnante valuterà se sarà il caso di riprendere questo discorso sui fondamenti della geometria, ma soltanto verso la fine degli studi superiori.

VERIFICHE

1. Il metodo intuitivo.

1.1 Ricordi quando un triangolo si dice isoscele? Dopo aver disegnato e ritagliato da un cartoncino un triangolo isoscele, realizza un esperimento che ti permetta di trarre conclusioni circa gli angoli alla base del triangolo.

1.2 Ricordi cos’è un parallelogramma? Dopo aver disegnato e ritagliato da un cartoncino un parallelogramma, realizza un esperimento che ti permetta di trarre conclusioni circa gli angoli opposti e i lati opposti del parallelogramma.

2. Il metodo razionale.

2.1 Ti ricordiamo che due segmenti si dicono ***consecutivi*** se hanno soltanto un estremo in comune e si dicono ***adiacenti*** se sono consecutivi e sono contenuti nella stessa retta.
Per ognuna delle coppie di segmenti MN, PQ (Fig. 49) contrassegnarla con la lettera:
- A se i segmenti sono consecutivi ma non adiacenti;
- B se sono adiacenti;
- C se non sono consecutivi.

[10] NOTA. Riteniamo opportuno far presente che il sistema di assiomi di riferimento per ciò che abbiamo esposto riguardo alla geometria piana è esplicitato in un’unità successiva, da svilupparsi preferibilmente nell’ultima classe in sede di sistemazione assiomatica di qualcuno dei segmenti affrontati negli studi precedenti.

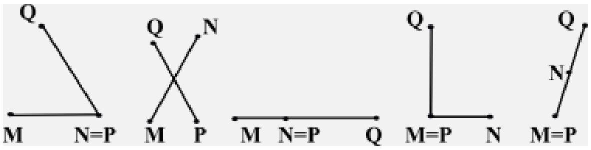

FIG. 49

2.2 Per ciascuna delle due seguenti affermazioni dire se è vera o falsa:
- se due segmenti sono consecutivi allora sono adiacenti;
- se due segmenti sono adiacenti allora sono consecutivi.

2.3 Ti ricordiamo che due <u>angoli</u> si dicono ***consecutivi*** se hanno soltanto il vertice e un lato in comune, si dico ***adiacenti*** se sono consecutivi e i lati non comuni sono due *semirette opposte* (cioè due semirette che hanno l'origine in comune e formano una retta o, detto altrimenti, due semirette che sono l'una il prolungamento dell'altra).
Per ognuna delle coppie di angoli α, β (Fig. 50) contrassegnarla con la lettera:
- A se gli angoli sono consecutivi ma non adiacenti;
- B se sono adiacenti;
- C se non sono consecutivi.

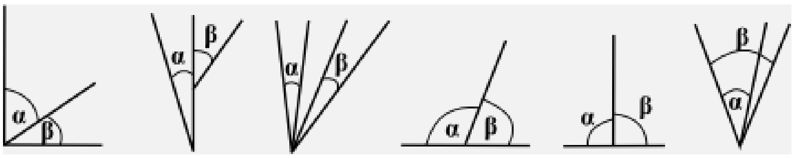

FIG. 50

2.4 Per ciascuna delle due seguenti affermazioni dire se è vera o falsa:
- se due angoli sono consecutivi allora sono adiacenti;
- se due angoli sono adiacenti allora sono consecutivi.

2.5 Diamo una definizione più generale di figura convessa o concava. Una <u>figura geometrica</u> si dice ***convessa*** se, comunque vengano presi due suoi punti, il segmento che li unisce è tutto contenuto nella figura; altrimenti si dice ***concava***.
Di ciascuna delle figure disegnate sotto (Fig. 51), dire se è convessa o concava.

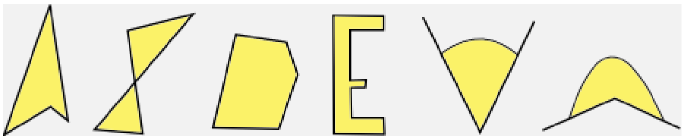

FIG. 51

2.6 Dei quattro angoli formati da due rette secanti, uno ha ampiezza α. Calcolare le ampiezze degli altri tre angoli nei seguenti casi:

$$\alpha=30° \qquad \alpha=120° \qquad \alpha=45°50' \qquad \alpha=48°32'46'' .$$

2.7 Di tre segmenti assegnati, il secondo misura il doppio del primo e il terzo misura il doppio del secondo. Con i tre segmenti si può costruire un triangolo?

2.8 Dimostra che, se un poligono ha i vertici sul contorno di un altro poligono, il perimetro del primo non supera quello del secondo. Tali perimetri possono essere uguali?

2.9 Dimostra che due rette, entrambe parallele ad una terza retta, sono parallele fra di loro.
[**R**. Se le rette non fossero parallele allora … . Questo contraddice … . Quindi … .]

2.10 Dimostra che un poligono convesso ha al più tre angoli interni acuti.

2.11 Esiste un poligono tale che la somma dei suoi angoli interni è $720°$? Se sì determina il numero dei suoi lati.

2.12 Sia l'esagono regolare ABCDEF. Quanto misura l'angolo $C\widehat{A}E$?

2.13 Sia il pentagono regolare ABCDE. Quanto misura l'angolo $C\widehat{A}D$?

2.14 Dimostra che due angoli con i lati rispettivamente paralleli sono congruenti o supplementari. Quando sono congruenti? Quando supplementari?

2.15 Considerato un triangolo qualunque ABC, traccia per B la parallela alla bisettrice AD del triangolo fino a secare in E la retta CA. Dimostra che la mediana AM del triangolo è perpendicolare ad AD.

2.16 Considerato un segmento AA', traccia la perpendicolare p ad esso per il suo punto medio. Detto quindi B un qualsiasi punto posto dalla stessa parte di A rispetto alla retta p, indica con C il punto in cui la retta A'B seca p. Dimostra che, per ogni punto P di p, diverso da C, risulta: $\overline{AP}+\overline{PB}>\overline{AC}+\overline{CB}$.

2.17 Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, conduci la bisettrice dell'angolo in B e chiama D il punto in cui essa interseca AC. Traccia quindi la corda DE del triangolo parallela a BC. Dimostra che i triangoli BDE e CDE sono congruenti e isosceli.

2.18 Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC e il suo angolo al vertice misura 36°. Dimostra che i due triangoli in cui il triangolo dato è diviso dalla bisettrice dell'angolo in B sono entrambi isosceli.

2.19 Dimostra che la bisettrice dell'angolo esterno adiacente all'angolo al vertice di un triangolo isoscele è parallela alla base del triangolo e che, viceversa, se la bisettrice dell'angolo esterno di un triangolo è parallela al lato opposto, il triangolo è isoscele ed ha per base quel lato.

2.20 Due rette distinte, passanti per il punto intersezione delle diagonali di un parallelogramma, intersecano i suoi lati in quattro punti. Dimostra che questi punti sono a loro volta vertici di un parallelogramma.

2.21 Dimostra che i segmenti che congiungono i punti medi dei tre lati di un triangolo qualunque ripartiscono il triangolo in quattro triangoli congruenti.

2.22 Dimostra che se due rette sono parallele allora ogni retta perpendicolare all'una lo è anche all'altra.

2.23 Dimostra che due rette perpendicolari a due rette secanti sono secanti.

2.24 Dimostra che due angoli con i lati mutuamente perpendicolari sono congruenti o supplementari. Quando sono congruenti? Quando supplementari?

2.25 Dimostra che i punti medi dei lati di un triangolo rettangolo e il vertice dell'angolo retto sono i vertici di un rettangolo.

2.26 L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 36°. Dimostra che la bisettrice di uno degli angoli alla base divide il triangolo in due triangoli isosceli, il minore dei quali ha gli angoli congruenti a quelli del triangolo dato.

2.27 Per uno dei vertici di un triangolo conduci una retta r che non lo attraversi. Dimostra che la somma delle distanze dei vertici del triangolo dalla retta r è uguale alla somma delle distanze, sempre da r, dei punti medi dei lati del triangolo.

2.28 Sulla retta r sono presi i punti A, B, C in modo che risulti AB<AC. Sulla perpendicolare alla retta r condotta per A è preso un punto O distinto da A. Stabilire quale relazione di disuguaglianza sussiste fra i segmenti OA, OB, OC.

2.29 Due rette sono perpendicolari. Delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

[A] Ogni retta perpendicolare ad una di esse è pure perpendicolare all'altra.

[B] Ogni retta parallela ad una di esse è pure parallela all'altra.

[C] Ogni retta parallela ad una di esse è perpendicolare all'altra.
[D] Le tre affermazioni precedenti sono tutte false.

2.30 Di un quadrilatero (convesso) si sa solo che ha le diagonali perpendicolari. Delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] È un rombo. [B] È un quadrato.
[C] È un rettangolo. [D] Le tre affermazioni precedenti sono tutte false.

2.31 Gli angoli α, β sono angoli coniugati interni di due rette parallele tagliate da una trasversale. Dimostrare che le loro bisettrici sono perpendicolari.

2.32 Dato un parallelogramma P, si consideri il quadrilatero Q avente per vertici i punti in cui si intersecano le bisettrici dei suoi angoli interni.
a) Il quadrilatero Q esiste qualunque sia il parallelogramma P?
b) Nel caso in cui il quadrilatero Q esista, si tratta di un quadrilatero generico o di un quadrilatero particolare?

2.33 PROBLEMA RISOLTO. Considerato un trapezio rettangolo e detto O un suo qualunque punto interno, costruire una retta per O in modo che, indicati con P e Q i punti in cui essa interseca le rette dei lati non paralleli del trapezio, il punto O risulti il punto medio del segmento PQ.

[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Considerato il trapezio rettangolo ABCD (Fig. 52) e detto O un suo qualunque punto interno, ammettiamo che esista una retta per O che intersechi la retta AB in P e la retta CD in Q in modo che O risulti il punto medio del segmento PQ. Detto allora R il punto in cui si secano le rette AB e CD e indicato con S il simmetrico di R rispetto ad O, è evidente che il quadrilatero PRQS è un parallelogramma e perciò PS è parallela a CD e QS è parallela ad AB.
A questo punto la costruzione è bell'e fatta. Questi ne sono i passaggi in sequenza, una volta assegnato il trapezio ABCD e detto O un suo qualsiasi punto interno:
a) si costruisce il punto R in cui si secano le rette AB e CD dei lati non paralleli;
b) si costruisce il punto S simmetrico di R rispetto ad O;
c) si conducono per S la parallela a CD e la parallela ad AB e si chiamano P il punto in cui la prima seca la retta AB e Q il punto in cui la seconda seca la retta CD;
d) il quadrilatero PRQS è evidentemente un parallelogramma e le sue diagonali PQ ed RS si bisecano, per cui PQ passa per O;
e) la retta PQ è la retta cercata.

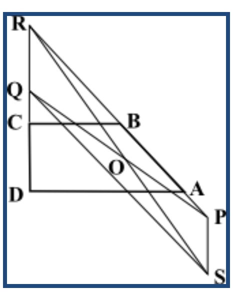

FIG. 52

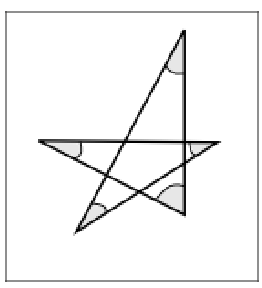
FIG. 53

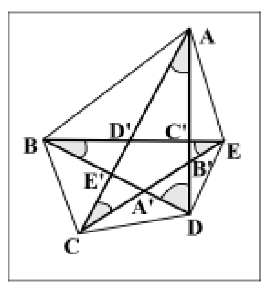

FIG. 54

2.33 PROBLEMA RISOLTO. Considerata la stella a 5 punte (Fig. 53), calcolare la somma delle ampiezze degli angoli aventi i vertici nelle "punte" e ombreggiati in figura.

[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Osserviamo anzitutto che la stella in questione è un pentagono intrecciato. Descriviamo uno dei possibili procedimenti. A questo proposito congiungiamo i vertici delle "punte" in modo da costruire un pentagono convesso ABCDE (Fig. 54). I lati del pentagono ABCDE possono essere considerati come le basi di cinque triangoli (ABD', BCE', CDA', DEB', EAC') aventi come vertici i vertici del pentagono convesso A'B'C'D'E' individuato dalla stella. D'altronde gli angoli aventi i vertici nei vertici suddetti sono ordinatamente uguali agli angoli interni del pentagono A'B'C'D'E', in quanto angoli opposti al vertice. Abbiamo così tutti gli elementi per calcolare la somma S delle ampiezze degli angoli delle cinque punte. Questa somma è, infatti, uguale alla somma degli angoli interni del pentagono ABCDE (vale a dire: 3×180°) diminuita della somma s degli angoli adiacenti ai lati AB, BC, CD, DE, EA dei cinque triangoli descritti sopra. Siccome questa somma s è, per parte sua, uguale alla differenza fra 5 angoli piatti e la somma degli angoli interni del pentagono A'B'C'D'E' (che è ancora 3×180°), si ha: s = 3×180°– (5×180°–3×180°) = 180°.

2.34 Si consideri la bisettrice AD del triangolo ABC. Stabilire se ed eventualmente sotto quali condizioni il triangolo ABD può risultare isoscele: 1) sulla base AB, 2) sulla base AD, 3) sulla base BD.

2.35 PROBLEMA RISOLTO. Considerato un parallelogramma P, si costruiscano sui suoi lati ed esternamente ad esso quattro quadrati e si consideri il quadrilatero Q avente per vertici i centri di tali quadrati.

a) Se il parallelogramma P è un quadrato, la figura Q è un quadrilatero particolare?
b) E se P è un rettangolo oppure un rombo?
c) E se, infine, P è un parallelogramma generico?

Fornire una dimostrazione di tutte le affermazioni fatte.

[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Il quadrilatero Q è un quadrato in ogni caso. Lo dimostriamo soltanto per il caso c) in quanto negli altri casi la dimostrazione è abbastanza semplice.

Sia allora il parallelogramma ABCD e siano M, N, R, S i centri dei quadrati costruiti sui suoi lati ed esternamente ad esso (Fig. 55).

Prendiamo in considerazione i triangoli AMS e BMN: è evidente che AS≅BN ed AM≅BM; inoltre:

$$S\widehat{A}M = S\widehat{A}D + B\widehat{A}M + D\widehat{A}B = 90° + D\widehat{A}B \;\text{ e }\; M\widehat{B}N = M\widehat{B}E + F\widehat{B}N + E\widehat{B}F = 90° + E\widehat{B}F\,;$$

d'altro canto: $D\widehat{A}B$ ed $E\widehat{B}F$ sono congruenti, essendo supplementari dell'angolo $A\widehat{B}C$; dunque: $S\widehat{A}M \cong M\widehat{B}N$. Di conseguenza i due triangoli AMS e BMN sono congruenti.

Allo stesso modo si dimostra che sono congruenti a questi triangoli anche i triangoli CRN e DRS.

Possiamo intanto concludere che i segmenti SM, MN, NR, RS sono congruenti e, pertanto, il quadrilatero MNRS è un rombo. Basta dimostrare che un suo angolo è retto per concludere che è un quadrato.

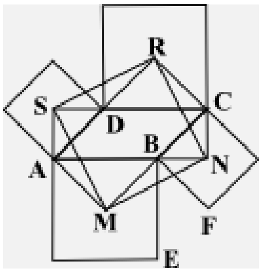

FIG. 55

2.36 PROBLEMA RISOLTO. Gli organizzatori sostenevano che a quel corteo, che si stava dipanando per le vie di Roma, stavano partecipando circa 2 milioni di persone. Dagli uffici della Questura ribattevano che i partecipanti erano al più duecentomila. Il commentatore TV, che dava la notizia, mediava dicendo che forse i manifestanti ammontavano a circa un milione.

Secondo te è possibile stabilire con un margine di errore chi la racconta giusta?

RISOLUZIONE. Facciamo delle supposizioni sulla conformazione del corteo. Ammettiamo, in particolare, che i partecipanti siano disposti su n file, distanziate di 1 m l'una dall'altra (in verità nei cortei le distanze tra due file consecutive sono più ampie, anche di 4-5 metri l'una dall'altra), e che ogni fila occupi una larghezza di 20 m, per cui su ogni fila ci vanno circa 40 persone (Fig. 56). Supponiamo che sia L la lunghezza del corteo.

Ebbene, 2 milioni di persone occuperebbero 2.000.000:40=50.000 file, per cui la lunghezza L del corteo sarebbe di 50.000 m = 50 km. Forse è un po' troppo.

Se le persone fossero 200.000, la lunghezza del corteo sarebbe di 5 km. Non è poco, ma certamente è una misura più credibile.

Evidentemente un milione di persone si distribuirebbe su una colonna di 25 km. Sono sempre tantissimi. Lasciamo a te le conclusioni.

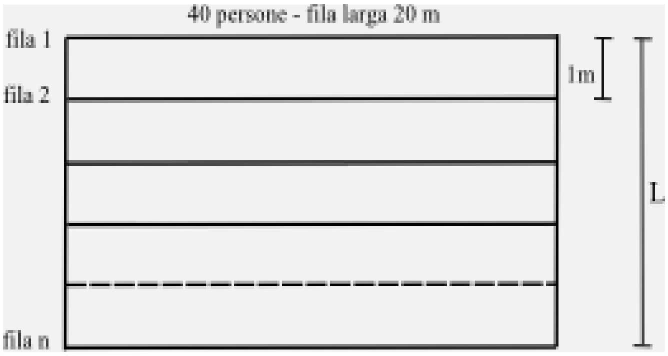

FIG. 56

2.37 L'angolo $a\hat{O}b$ è acuto ed *Om* è la sua bisettrice. Da un qualsiasi punto *B*, distinto da *O*, del lato *OB* si conduca la perpendicolare al lato *Oa* e siano *A* ed *M* i punti in cui essa interseca le semirette *Oa* ed *Om*. Dimostrare che *AM*<*MB*.

2.38 Costruire il triangolo i cui lati hanno come punti medi i vertici di un qualunque triangolo assegnato. Esiste un quadrilatero i cui lati hanno come punti medi i vertici di un qualunque quadrilatero assegnato?

2.39 Con riferimento alla figura a fianco (Fig. 57), quanto vale la somma degli angoli x ed y?

[A] 80°. [B] 85°. [C] 90°. [D] 100°.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

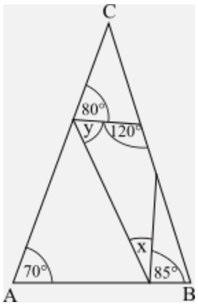

FIG. 57

2.40 Nel trapezio ABCD gli angoli aventi i vertici negli estremi C e D della base maggiore misurano rispettivamente 30° e 45°. Si chiami E il punto in cui la parallela condotta per A al lato BC interseca CD e si chiami F il punto in cui interseca CD la parallela condotta per B al lato AD.

a) Quale delle seguenti alternative è vera?

[A] EC=DF. [B] EC>DF. [C] EC<DF.

b) Indicato con G il punto comune alle rette AE e BF, stabilire se il triangolo GAB è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Due rette distinte, assegnate in uno stesso piano, sono perpendicolari ad una terza: è vero che le due rette sono perpendicolari fra loro?
2. È vero che due angoli consecutivi sono anche adiacenti?
3. Come si definisce una figura convessa?
4. È vero che due angoli aventi i lati rispettivamente paralleli sono congruenti?
5. Esiste un triangolo in cui il secondo lato è doppio del primo e il terzo è doppio del secondo?
6. Sono assegnate le misure seguenti: a cm, 5 cm, 7 cm. Possono essere assunte come misure dei lati di uno stesso triangolo per qualsiasi valore positivo di a?
7. Un triangolo isoscele può essere equilatero?
8. Un triangolo rettangolo può essere scaleno? Può essere isoscele? Può essere equilatero?
9. Sono assegnati gli angoli di ampiezze, in gradi sessagesimali: a°, 115°, 40°, 60°. Possono essere assunte come ampiezze degli angoli interni di uno stesso quadrilatero per ogni valore di a?
10. Un poligono quando si dice regolare?
11. È corretto definire irregolare un poligono se ha gli angoli interni disuguali e i lati disuguali?
12. È possibile costruire un poligono convesso avente 4 angoli interni acuti?
13. Quali relazioni legano la corda che unisce i punti medi di due lati di un triangolo e il terzo lato?
14. Utilizzando soltanto mattonelle a forma di pentagono regolare è possibile pavimentare una sala?
15. È possibile pavimentare una sala utilizzando mattonelle a forma di ottagono regolare e mattonelle a forma di quadrato?
16. Un quadrilatero ha le diagonali congruenti. Che tipo di quadrilatero è quello che ha per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero dato?
17. Il circoncentro e l'incentro di un qualsiasi triangolo sono punti interni al triangolo. È vero o è falso?

RISPOSTE.

1. No. Sono parallele. Se, infatti, non lo fossero avrebbero un punto in comune, per il quale si potrebbero condurre due rette perpendicolari ad una stessa retta e questo è assurdo.
2. No. Due angoli consecutivi non sono necessariamente adiacenti, mentre sono certamente consecutivi due angoli adiacenti.
3. Una figura si dice convessa se il segmento che unisce due suoi qualsiasi punti è tutto contenuto nella figura.
4. Solo se i due angoli sono entrambi acuti o entrambi ottusi. Se uno è acuto e l'altro ottuso i due angoli sono supplementari.
5. No. In effetti, indipendentemente dalla scelta dell'unità di misura, i lati di questo ipotetico triangolo dovrebbero misurare 1, 2 e 4. Il che non è possibile dal momento che non è soddisfatta la condizione in base alla quale ogni lato è minore della somma degli altri due.

6. No. Deve risultare in ogni caso $0<a<12$.

7. Sì. Un triangolo si dice isoscele quando ha due lati congruenti. Se in un tale triangolo, il terzo lato è congruente agli altri due, esso è evidentemente equilatero. In caso contrario non lo è.

8. Un triangolo rettangolo è di solito scaleno. Può eccezionalmente essere isoscele (quando i due cateti sono congruenti, nel qual caso i due angoli acuti misurano ciascuno 45°), ma giammai può essere equilatero, giacché dovrebbe essere anche equiangolo ed i tre angoli dovrebbero misurare ciascuno 90°, il che è assurdo.

9. No. Deve risultare $a+215=360$ e perciò $a=145$.

10. Un poligono si dice regolare se ha gli angoli interni uguali ed i lati uguali.

11. Non è corretto. Bisogna dire invece che un poligono è irregolare se ha almeno due angoli interni disuguali e/o due lati disuguali. La figura sottostante (Fig. 58), benché riferita al pentagono, chiarisce bene il concetto.

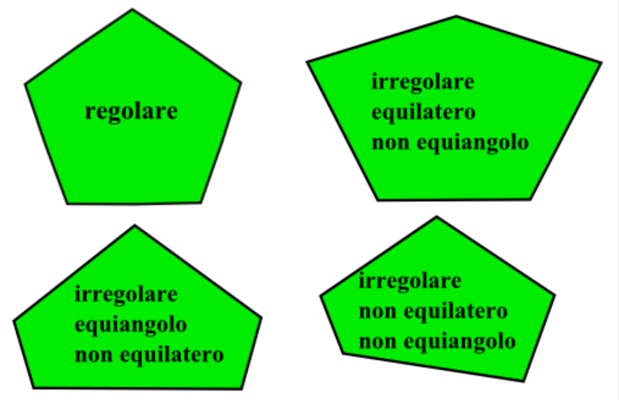

FIG. 58

12. No. Ogni poligono ha al più tre angoli acuti. Intanto è evidente che questo ipotetico poligono non può essere un quadrilatero, dal momento che la somma dei suoi angoli interni sarebbe minore di 2 angoli piatti. Potrebbe essere un poligono con un numero n di lati maggiore di 4. Ebbene, se in un poligono siffatto gli angoli acuti fossero almeno 4, la somma degli $n-4$ angoli rimanenti dovrebbe essere maggiore di $(n-4)$ angoli piatti, per cui almeno un angolo del poligono dovrebbe superare un angolo piatto. Il che è assurdo.

13. La corda è parallela al terzo lato ed è lunga la metà di esso.

14. No. Non è infatti possibile coprire esattamente un angolo giro con gli angoli interni di un pentagono regolare. Tre sono pochi: $108°\times3=324°$; quattro sono troppi: $108°\times4=432°$.

15. Sì, purché abbiano lati congruenti. Basta che in un vertice concorrano due ottagoni e un quadrato. In questo caso, infatti, la somma degli angoli che concorrono in ogni vertice è $360°$.

16. Si tratta di un rombo. In generale: il quadrilatero Q' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero Q qualsiasi è un parallelogramma; se il quadrilatero Q ha le diagonali congruenti, Q' è un rombo; se Q ha le diagonali perpendicolari, Q' è un rettangolo; ovviamente se Q ha le diagonali congruenti e perpendicolari, Q' è un quadrato.

17. È vero per l'incentro, ma è falso per il circocentro, che può essere interno al triangolo (se questo è acutangolo), sull'ipotenusa del triangolo (se questo è rettangolo) o esterno al triangolo (se questo è ottusangolo).

LETTURA

SUGLI IRRAZIONALI

Sulla irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri dello stesso tipo abbiamo proposto una dimostrazione a suo tempo. In realtà il problema, anche se in termini leggermente diversi, è assai vecchio e risale agli antichi Greci. A questo riguardo proponiamo un brano di uno dei *Dialoghi* di **Platone** (filosofo ateniese, 428-437 a. C.), il ***Teeteto*** e, a seguire, l'interpretazione che ne dà il matematico e storico italiano Attilio Frajese [11].
Nel dialogo con Socrate, Platone fa dire al giovane **Teeteto** (circa 415-369 a.C.), matematico di scuola pitagorica, seguace di **Teodoro** di Cirene (attivo intorno al 390 a.C.):
« Il nostro Teodoro ci disegnava qualcosa intorno alle potenze e precisamente intorno a quella di tre piedi e a quella di cinque piedi, dimostrando che non erano commensurabili in lunghezza col piede e così via, considerandole una per una, fino a quella di diciassette piedi, e a questa, comunque sia, si fermò ».
Frajese spiega che col termine “potenze” Teodoro dovesse indicare *« quelle linee tali che i quadrati su di esse costruiti risultavano avere l’area 3, l’area 5 e così via, fino all’area 17 (il quadrato di area 2 viene già presupposto presso i predecessori: il quadrato di area 4 viene esplicitamente tralasciato, e altrettanto riteniamo per fermo che abbia fatto Teodoro per i quadrati di area 9 e di area 16: infatti i lati dei quadrati tralasciati avevano lunghezza esatta 2, 3, 4 e non presentavano quindi alcun interesse) ».*
Le linee delle quali Teodoro vuole dimostrare la commensurabilità, o meno, con l’unità di misura - chiarisce Frajese - sono dunque lati di quadrati di area 3, di area 5, e così via fino al lato di area 17.
« Non si conosce con esattezza quale metodo abbia usato Teodoro nelle sue dimostrazioni: ad ogni modo dovevano essere condotte con perfetto rigore, e dovevano essere anche tali […] da essere adottate, e adattate, caso per caso: altrimenti non si spiegherebbe la menzione separata di 3, 5, …, 17, né d’altra parte si adatterebbe all’andamento del Dialogo l’osservazione di Teeteto. Per la fermata al quadrato di area 17 […] Teodoro si sarebbe servito delle costruzioni fondate sul teorema di Pitagora, ottenendo il lato del quadrato di area 2 come ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti 1 e 1, il lato del quadrato di area 3 come ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti il lato del quadrato di area 2 e l’unità di misura 1, e così via: questa sorta di figura a chiocciola (Fig. 59) che così si ottiene si richiuderebbe su se stessa, con una sovrapposizione, se si andasse oltre il quadrato di area 17: quale migliore occasione, dunque, per troncare la trattazione? »

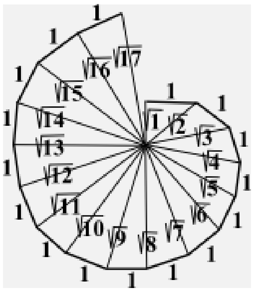

FIG. 59

[11] Il brano è tratto da: Attilio FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Editrice Studium, 1963.