Prerequisiti:
- Calcolare limiti e derivate di funzioni
- Studiare una funzione

Questa unità è indirizzata a tutte le scuole superiori. Gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali se ne occuperanno nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono:

- *avere consapevolezza del teorema d'inversione*
- *avere consapevolezza delle nozioni di integrale definito e di primitiva di una funzione*
- *essere in grado di elencare le primitive fondamentali*
- *saper enunciare e interpretare la condizione di integrabilità secondo Mengoli-Cauchy*
- *saper calcolare, in casi semplici, il valore di un integrale ricorrendo al teorema fondamentale*
- *saper riflettere criticamente sulla condizione di integrabilità delle funzioni*
- *risolvere semplici problemi*

Integrali
Unità 72

72.1 IL PROBLEMA DELLE AREE: INTEGRALE DEFINITO

72.1.1 Riprendiamo da dove abbiamo chiuso la precedente unità. A questo proposito consideriamo una funzione reale di variabile reale f(x), continua e provvisoriamente non negativa in un intervallo chiuso e limitato [a,b]. Si chiama **trapezoide** (o **rettangoloide**) di base [a,b] relativo alla funzione f(x), o anche **sottografico** di f(x) sull'intervallo [a,b], la regione piana T (Fig. 1) delimitata dal grafico di f(x), dall'asse x e dalle rette di equazioni x=a e x=b. In simboli: $T=\{(x,y)|a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$.

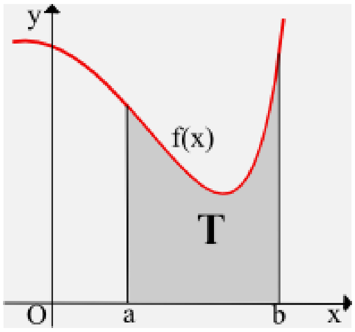

FIG. 1

Quello che abbiamo chiamato **teorema fondamentale** per il calcolo dell'area di un trapezoide è in realtà conseguenza di un altro teorema, detto ***teorema d'inversione***, in base al quale, per ogni funzione f(x), esiste sotto certe condizioni una funzione F(x) tale che F'(x)=f(x).

Come si dimostra il teorema d'inversione? Quali sono le condizioni di cui si parla? E soprattutto, ammesso di conoscere f(x), come si fa a trovare una funzione F(x) tale che F'(x)=f(x) ?

Sono interrogativi ai quali cercheremo di dare una risposta nelle prossime pagine.

72.1.2 Incominciamo con qualche considerazione preliminare. Alla formula dell'area del trapezoide T di base [a,b] relativo alla funzione f(x), si giunge operando secondo la seguente procedura, sulla quale al momento non forniamo spiegazioni (ci torneremo più avanti anche per chiarire un aspetto fondamentale della questione):

a) si suddivide l'intervallo [a,b] in un numero n di intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$ (dove i=1,2,...n, ed $a=x_0$, $b=x_n$) aventi tutti la medesima ampiezza $\Delta x=\frac{b-a}{n}$;

b) si indica con $\bar{x}_i$ un arbitrario punto dell'i-esimo intervallo $[x_{i-1}, x_i]$; il valore della funzione f(x) in $\bar{x}_i$ è evidentemente $f(\bar{x}_i)$;

c) la figura costituita dagli n rettangoli di basi $[x_{i-1}, x_i]$ ed altezze $f(\bar{x}_i)$, detta ***plurirettangolo***, ha area S_n tale che: $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x$;

d) il limite (per $n\to\infty$) di S_n – <u>che si dimostra esistere ed essere finito</u> – si assume come area S del trapezoide T:

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x\ .$$

72.1.3 Descriviamo una situazione esemplificativa, che in definitiva non è altro che un nuovo metodo di calcolo approssimato di un'area.

Consideriamo allora il trapezoide T (Fig. 2) tale che: $T=\{(x,y)|0\le x\le 2,\ 0\le y\le \frac{1}{2}x^2\}$.

La sua area esatta è: $S(T)=4/3$. La si può calcolare sia ricorrendo alla regola di Archimede:

$$S(T)=4-\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{4}{3}\ ;$$

sia constatando che una funzione la cui derivata è $\frac{1}{2}x^2$, è $F(x)=\frac{1}{6}x^3$, per cui:

$$S(T)=F(2)-F(0)=\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}.$$

Un'approssimazione di $S(T)$, esatta fino al 3° decimale, è evidentemente: $S(T)\approx 1{,}333$.

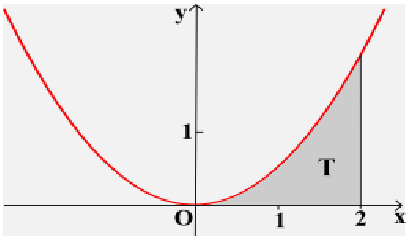

FIG. 2

Ci proponiamo di determinare due approssimazioni dell'area suddetta mediante la divisione dell'intervallo $[0,2]$ una volta in $n=4$ parti uguali e un'altra volta in $n=8$ parti uguali, prendendo ogni volta come valori della funzione $y=\frac{1}{2}x^2$ quelli che essa assume negli estremi sinistri dei vari intervallini ottenuti.

- Per $n=4$ si ha, dunque (Fig. 3):

$$x_0=0,\ \ x_1=\frac{1}{2},\ \ x_2=1,\ \ x_3=\frac{3}{2}.$$

In corrispondenza:

$$y(x_0)=0,\ \ y(x_1)=\frac{1}{8},\ \ y(x_2)=\frac{1}{2},\ \ y(x_3)=\frac{9}{8}.$$

Pertanto:

$$S(T)\approx\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\right)=\frac{7}{8}=0{,}785\ .$$

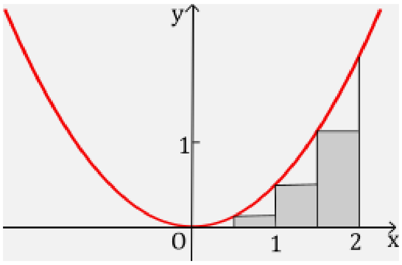

FIG. 3

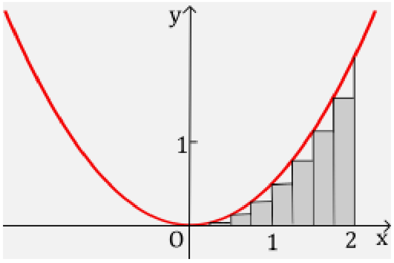

FIG. 4

- Per $n=8$ si ha (Fig. 4):

$$x_0=0,\ \ x_1=\frac{1}{4},\ \ x_2=\frac{1}{2},\ \ x_3=\frac{3}{4},\ \ x_4=1,\ \ x_5=\frac{5}{4},\ \ x_6=\frac{3}{2},\ \ x_7=\frac{7}{4}\ .$$

In corrispondenza:

$$y(x_0)=0,\ \ y(x_1)=\frac{1}{4},\ \ y(x_2)=\frac{1}{8},\ \ y(x_3)=\frac{9}{32},\ \ y(x_4)=\frac{1}{2},\ \ y(x_5)=\frac{35}{32},\ \ y(x_6)=\frac{9}{8},\ \ y(x_7)=\frac{49}{32}.$$

Pertanto:

$$S(T)\approx\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{9}{32}+\frac{1}{2}+\frac{25}{32}+\frac{9}{8}+\frac{49}{32}\right)=\frac{35}{32}\approx 1{,}094\ .$$

Puoi notare come nel secondo caso (n=8) l'approssimazione sia migliore del primo (n=4), anche se in entrambi i casi essa è piuttosto grossolana. Nel primo caso si commette infatti un errore relativo:

$$\varepsilon_r' = \frac{\frac{4}{3} - 0{,}785}{\frac{4}{3}} \approx 41\% \,;$$

nel secondo un errore relativo:

$$\varepsilon_r'' = \frac{\frac{4}{3} - 1{,}094}{\frac{4}{3}} \approx 18\% \,.$$

L'approssimazione migliorerebbe se aumentassimo il numero n di parti in cui si divide l'intervallo [0,2]. Al limite, per $n\to\infty$:

$$S(T) \to \frac{4}{3}\,.$$

72.1.4 Sia dunque una funzione f(x), continua e provvisoriamente non negativa in un intervallo [a,b]. Il limite della somma $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x$ quando $n\to\infty$, vale a dire l'area del trapezoide di base [a,b], relativo alla funzione f(x), si definisce anche **integrale definito** di f(x) sull'intervallo [a,b]. Nel medesimo tempo si dice pure che la funzione f(x) è **integrabile** su [a,b].

L'integrale definito di f(x) su [a,b] si indica con una delle scritture seguenti:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}\,, \quad \boldsymbol{\int_{[a,b]} f(x)dx}$$

ciascuna delle quali si legge: «integrale di f(x)dx tra a e b» [1].

In definitiva possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\,.$$

Gli estremi a, b dell'intervallo [a,b] – detto ***intervallo di integrazione*** – si chiamano ***primo*** *e* ***secondo estremo di integrazione***. La funzione f(x) si chiama ***funzione integranda***.

La lettera x che figura nella scrittura $\int_{[a,b]} f(x)dx$ è detta ***variabile di integrazione***. Si tratta di una variabile cosiddetta ***muta*** (o ***apparente***) giacché l'integrale, una volta calcolato, non dipende più da essa, essendo un numero ben determinato. Per questo motivo al posto di $\int_{[a,b]} f(x)dx$ si può scrivere una qualunque delle seguenti forme equivalenti: $\int_{[a,b]} f(t)dt$, $\int_{[a,b]} f(u)du$, eccetera.

72.1.5 L'esistenza dell'integrale definito di una data funzione su un determinato intervallo, con la procedura prima descritta è garantita dall'esistenza del limite finito della somma più volte considerata. Vale precisamente il seguente teorema, noto come **condizione di integrabilità di Mengoli-Cauchy** [2]:

♦ TEOREMA**. Ogni funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo chiuso e limitato, è integrabile su tale intervallo.**

Di questo teorema non forniamo la dimostrazione.

---

[1] A volte, in particolare quando è chiaro qual è la variabile d'integrazione, si sottintende il fattore dx e sono usate le scritture seguenti: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)}$, $\boldsymbol{\int_{[a,b]} f(x)}$. Noi non le useremo.

[2] **Mengoli**, Pietro; Bologna, 1625 – Bologna, 1686; **Cauchy**, Augustin Louis; matematico francese, 1789-1857.

72.2 FUNZIONE INTEGRALE E TEOREMA D'INVERSIONE

72.2.1 Ci possiamo adesso occupare del "teorema d'inversione". Sia, allora, f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b]. Per ogni $x\in[a,b]$ è determinata l'area del trapezoide di base [a,x] relativo alla funzione f(x). Essa è espressa dall'integrale $\int_a^x f(t)dt$, dove abbiamo preferito prendere la variabile t, invece di x, come variabile di integrazione per evitare ogni equivoco. L'area del trapezoide di base [a,x], vale a dire $\int_a^x f(t)dt$, è una funzione di x, che indichiamo con F(x), per cui:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Questa funzione F(x) si chiama **funzione integrale** di f(x) su [a,b].
In particolare, per evidenti ragioni geometriche, si ha:

$$F(a)=\int_a^a f(x)dx=0,\quad F(b)=\int_a^b f(x)dx=S(T),$$

dove S(T) è l'area del trapezoide di base [a,b] relativo ad f(x).

72.2.2 Vale il seguente teorema [3].

♦ TEOREMA D'INVERSIONE. **Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b]. La funzione integrale F(x) di f(x) è continua in [a,b] e derivabile in]a,b[ed ha per derivata proprio f(x). Vale a dire: F'(x)=f(x).**

DIMOSTRAZIONE. Avvertiamo subito che questa dimostrazione concede qualcosa al rigore logico dal momento che fa affidamento su ciò che "si intuisce" dalla figura, mentre in realtà le stesse cose potrebbero essere spiegate rigorosamente in modo diverso.
Allora, con riferimento alla funzione f(x), continua (e provvisoriamente non negativa) nell'intervallo [a,b] (Fig. 5), preso un generico punto $x\in[a,b]$ ed il punto x+h, sempre interno ad [a,b], consideriamo il rapporto incrementale di F(x) relativo all'incremento h dato ad x: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

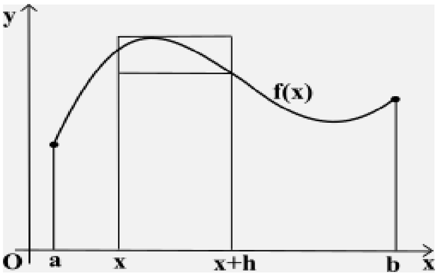

FIG. 5

Poiché la funzione f(x), continua nell'intervallo chiuso e limitato [x, x+h], ha in quest'intervallo il minimo assoluto m(x) ed il massimo assoluto M(x), dipendenti ovviamente da h, oltre che da x, e poiché F(x+h)−F(x) non è altro che l'area del trapezoide di base [x, x+h] relativo ad f(x), dalla figura s'intuisce che deve essere:

$$m(x)\cdot h\le F(x+h)-F(x)\le M(x)\cdot h\text{, ossia: } m(x)\le\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\le M(x).$$

[3] Il teorema d'inversione è chiamato da alcuni "teorema di Torricelli-Barrow".

Quando $h \to 0$, le funzioni $m(x)$ ed $M(x)$ tendono entrambe ad $f(x)$. Per cui, in virtù del teorema di confronto, anche $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ tende ad $f(x)$. Come dire:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Siccome chiaramente: $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$, allora: $F'(x)=f(x)$.

Al fine di verificare se ti è chiaro il concetto di funzione integrale ti proponiamo un paio di quesiti a scelta multipla con 4 alternative di risposta, di cui una sola corretta. Devi individuare la risposta corretta e darne spiegazione.

1. Si ha: $F(x)=\int_0^x \cos^2 t \, dt$. Quanto vale $F'(\pi)$?

[A] -1. [B] 1. [C] 0. [D] $\cos 2t$.

2. Si ha: $f(x)=\int_2^x t \ln(t-1) \, dt$. Quanto vale $f'(3)$?

[A] $\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}$. [B] $\ln 2+\frac{3}{2}$. [C] $\ln 2$. [D] $\ln 8$.

72.3 PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE E TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

72.3.1 Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, ogni funzione $\Phi(x)$, derivabile in I (e quindi anche continua in I) e tale che $\Phi'(x)=f(x)$, si dice **primitiva** (o **antiderivata**) di $f(x)$ in I.

La funzione integrale di $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, vale a dire la funzione $\int_a^x f(t)dt$, è pertanto una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$. Ma anche $\int_a^x f(t)dt + k$, dove k è una costante arbitraria, è una primitiva di $f(x)$.

Altri esempi di primitive di date funzioni, dove k è una costante:

- $\sin x$ è una primitiva di $\cos x$ su tutto l'asse reale, ma anche $\sin x + k$ lo è;
- x è una primitiva di 1 su tutto l'asse reale, ma anche $x+k$ lo è;
- e^x è una primitiva di e^x su tutto l'asse reale, ma anche e^x+k lo è.

72.3.2 Vale il seguente teorema.

♦ TEOREMA. Se due qualsiasi funzioni, definite in un medesimo intervallo, sono primitive di una stessa funzione allora differiscono al più per una costante.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e siano $p(x)$ e $q(x)$ due primitive di $f(x)$ in I, tali che $p'(x)=f(x)$ e $q'(x)=f(x)$. Ne consegue che nell'intervallo I si ha: $p'(x)-q'(x)=0$ e perciò: $D_x[p(x)-q(x)]=0$.

D'altro canto, se in un intervallo la derivata di una funzione è nulla, la funzione è costante in quell'intervallo, in conseguenza del teorema di Lagrange. Dobbiamo concludere perciò che:

$$p(x) - q(x) = k,$$

dove k è una costante arbitraria. [c.v.d.]

72.3.3 Riprendiamo la funzione $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e ricordiamo che

$\int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f(x). Ammesso che anche F(x) sia una primitiva di f(x), per il teorema precedente risulta: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = k$. Siccome, per x=a si ha $\int_a^a f(t)dt = 0$ e perciò $k = -F(a)$, allora: $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Da qui, per x=b, si ottiene:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Questa formula, onde evidenziare meglio il ricorso ad una primitiva F(x) della funzione f(x) da integrare, si preferisce scriverla, con ugual significato, in questo modo:

[1] $$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = [\mathbf{F(x)}]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$$

È nota come **formula fondamentale del calcolo integrale** ed è la formula della quale ci siamo già serviti per calcolare l'area di un trapezoide di data base relativo ad una data funzione.

Essa, fatte le debite considerazioni sull'integrabilità della funzione f(x), sintetizza l'enunciato di uno dei più importanti teoremi della matematica, noto come **teorema fondamentale del calcolo integrale** (o **teorema di Newton-Leibniz**) [(4)].

Giunti a questo punto si capisce che il "problema delle aree" si sposta: si tratta, infatti, di riuscire a trovare una primitiva della funzione f(x) da integrare. Affronteremo questo problema da un punto di vista più generale, ma prima vogliamo ritornare sul concetto di area di un trapezoide, sia per approfondirne qualche aspetto – quantunque sempre a livello intuitivo, compresa la spiegazione del procedimento descritto in 72.1.2 – sia per precisare meglio il ruolo e il significato dell'integrale definito e sottolinearne alcune proprietà.

72.3.4 Prima di procedere, facciamo notare che la formula [1] torna utile nel calcolo della seguente derivata:

$$D_x \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

essendo a(x) e b(x) due funzioni di x e non necessariamente due costanti, mentre f(t) è una funzione che ammette primitiva dove occorre.

Infatti, ammesso che F(t) sia una primitiva di f(t) – ragion per cui F'(t)=f(t) – per la [1] si ha:

$$D_x \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = D_x[F(t)]_{a(x)}^{b(x)} = D_x\big[F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big)\big] =$$

$$= F'\big(b(x)\big)b'(x) - F'\big(a(x)\big)a'(x) = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x).$$

Per esempio:

$$D_x \int_x^{2x} e^t dt = e^{2x}D_x(2x) - e^x D_x x = 2e^{2x} - e^x.$$

Risultato che, almeno in questo caso, può essere ricavato anche calcolando dapprima l'integrale definito e poi la derivata della funzione ottenuta.

Ti proponiamo adesso di calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x), sapendo che:

---

[4] Ci corre l'obbligo di segnalare che alcuni autori chiamano "teorema fondamentale del calcolo" il teorema d'inversione e considerano un suo corollario quello che noi abbiamo chiamato teorema fondamentale.

$$a)\ f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt\ ; \qquad b)\ f(x)=\int_1^{x+1} \ln t\,dt\ ; \qquad c)\ f(x)=\int_{2x}^{2x+1} u^2du\,.$$

72.4 AREA DI UN TRAPEZOIDE: DEFINIZIONE

72.4.1 Ci proponiamo finalmente di precisare il concetto di area di un trapezoide, che fin qui abbiamo dato per scontato. Sia allora f(x) una funzione reale di variabile reale, che seguitiamo a supporre continua e provvisoriamente non negativa in un intervallo chiuso e limitato [a,b]. Consideriamo il *trapezoide* T di base [a,b] relativo alla funzione f(x). Ci proponiamo, per l'appunto, di definire l'area S di T. Immaginiamo di suddividere [a,b] in n intervalli parziali di ampiezze uguali a $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ mediante i punti di divisione (Fig. 6): $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tali che: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n=b$.
Gli n intervalli parziali ottenuti sono questi: $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{n-1},x_n]$. In ciascuno di essi, per il teorema di Weierstrass, la funzione f(x) ha minimo e massimo. Indichiamo i minimi ed i massimi di f(x) in ciascuno dei rispettivi intervalli parziali con: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ e $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

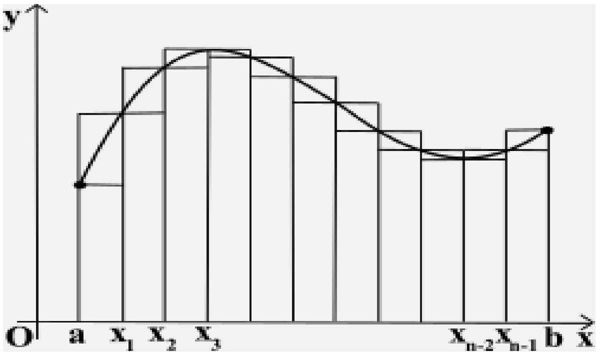

FIG. 6

Consideriamo ora le seguenti somme:

$$s_n = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \ldots + m_n(x_n-x_{n-1}) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x,$$
$$S_n = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \ldots + M_n(x_n-x_{n-1}) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_n\Delta x.$$

Per brevità esse si scrivono nel modo seguente:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x\,,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$$

e si leggono rispettivamente: "s_n uguale sommatoria di $m_i\Delta x$ per i che varia da 1 ad n" e "S_n uguale sommatoria di $M_i\Delta x$ per i che varia da 1 ad n".
La prima costituisce la somma delle aree degli n rettangoli aventi come basi gli n intervalli parziali costruiti sopra e come altezze i minimi di f(x) in ciascuno di quegli intervalli: la somma di tali rettangoli si chiama **plurirettangolo inscritto** nel trapezoide.
La seconda costituisce la somma delle aree degli n rettangoli aventi le stesse basi dei precedenti e come altezze i massimi di f(x) in ciascuno degli n intervalli parziali: la somma di tali rettangoli si chiama **plurirettangolo circoscritto** al trapezoide.
S'intuisce che le aree di due qualsiasi plurirettangoli inscritti nel trapezoide T, relativi a due diverse suddivisioni di [a,b], sono in genere diverse. Così pure le aree di due plurirettangoli circoscritti a T.

S'intuisce pure, dall'esame della figura, che l'area da attribuire eventualmente al trapezoide T non è minore di quella di alcun plurirettangolo inscritto e non è maggiore di quella di alcun plurirettangolo circoscritto. Ora, al variare da 1 a ∞, del numero n degli intervalli parziali in cui è suddiviso l'intervallo [a,b], si ottengono le due successioni infinite (s_n) e (S_n), di termini rispettivamente:

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots; \qquad S_1, S_2, \dots, S_n, \dots .$$

Si dimostra che entrambe queste successioni convergono allo stesso limite, che è assunto <u>per definizione</u> come ***area*** S di T. Dunque:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

72.4.2 Si può pervenire all'area del trapezoide T, operando in modo un po' diverso dal precedente. Una volta suddiviso l'intervallo [a,b] in un numero n di intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\dots n,\ a=x_0,\ b=x_n)$, indichiamo con $\overline{x}_i$ un arbitrario punto dell'i-esimo intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Il plurirettangolo, costituito dagli n rettangoli di basi $[x_{i-1}, x_i]$ ed altezze $f(\overline{x}_i)$, ha area σ_n tale che: $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$.

Siccome m_i ed M_i sono rispettivamente il minimo ed il massimo assoluti di f(x) in $[x_{i-1}, x_i]$, è evidentemente: $m_i \le f(\overline{x}_i) \le M_i$, da cui segue: $m_i\Delta x \le f(\overline{x}_i)\Delta x \le M_i\Delta x$, e perciò:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x .$$

Siccome esistono e sono uguali i limiti (per $n\to\infty$) delle successioni "esterne" di questa disuguaglianza, per il teorema di confronto anche la successione "ingabbiata" tende allo stesso limite. D'altra parte, questo limite è proprio l'area S del trapezoide. Pertanto:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x .$$

E questo chiarisce, quantunque in modo intuitivo, il procedimento descritto in 72.1.2.

72.4.3 Abbiamo supposto finora che nell'intervallo [a,b] la funzione f(x) fosse non negativa, oltre che continua. Se, invece, è non positiva (Fig. 7), allora si definisce *trapezoide* (o *rettangoloide*) di base [a,b], relativo alla funzione f(x), l'insieme:

$$T = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}.$$

A volte è chiamato **sopragrafico** della funzione f(x) relativo all'intervallo [a,b].

Ripetendo il procedimento esposto nel caso in cui $f(x) \ge 0$, si trova che la somma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$ è non positiva, risultando non positivi i valori $f(\overline{x}_i)$. Pertanto anche il limite di σ_n, che esprime l'area S del trapezoide T, è non positivo. Di modo che, se indichiamo con $\overline{S}$ l'area del trapezoide in senso elementare, si ha:

$$\overline{S} = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x \right| .$$

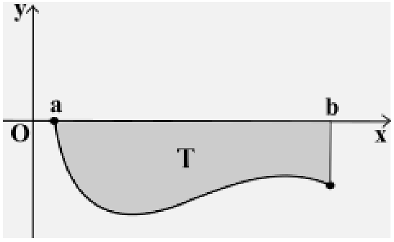

FIG. 7

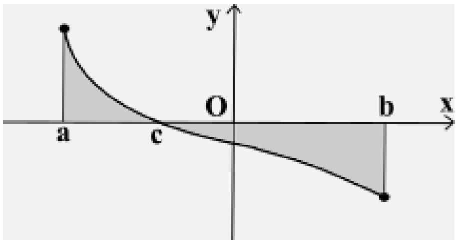

FIG. 8

Supponiamo, infine, che la funzione sia continua, ma non necessariamente non negativa o non positiva nell'intervallo [a,b]. Per fissare le idee, posto $a<c<b$, supponiamo che sia $f(x)\geq 0$ in [a,c] ed $f(x)\leq 0$ in [c,b] (Fig. 8). Allora, si definisce *trapezoide* (o *rettangoloide*) di base [a,b], relativo alla funzione f(x), l'insieme:

$$T=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x) \text{ se } f(x)\geq 0,\ f(x)\leq y\leq 0 \text{ se } f(x)\leq 0\}.$$

Ripetendo il solito procedimento, si trova: $S=S_1+S_2$, dove S, S_1 e S_2 sono rispettivamente le aree dei trapezoidi di basi [a,b], [a,c] e [c,b], relativi alla stessa funzione f(x). Siccome nel caso in esame è $S_1>0$ e $S_2<0$, si possono presentare i tre casi seguenti: $S>0$, $S=0$, $S<0$.

Se, però, vogliamo ottenere l'area $\overline{S}$ del trapezoide in senso elementare, si ha: $\overline{S}=S_1+|S_2|$.
E così in casi analoghi.

72.5 PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

72.5.1 Ricordiamo che abbiamo introdotto il concetto di integrale definito di una funzione fra a e b, solo nell'ipotesi che sia $a<b$. Adesso lo vogliamo estendere anche ai casi $a=b$ e $b<a$, anche se il primo caso è già stato affrontato quando ci siamo occupati del teorema fondamentale del calcolo integrale. Poniamo per definizione:

$$\int_a^a f(x)dx=0, \qquad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Le convenzioni sono giustificate, del resto, dal significato geometrico dell'integrale.

72.5.2 Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a,b] e k è una costante reale, allora si ha:

$$\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

Infatti, con le solite notazioni, si ha:

$$\int_a^b k\,f(x)dx=\lim_{n\to\infty} k\,f(\overline{x}_i)\Delta x=k\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_i)\Delta x=k\int_a^b f(x)dx.$$

72.5.3 Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a,b] e c è un punto tale che $a<c<b$, allora si ha:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\ .$$

La spiegazione è immediata se si fa ricorso al significato geometrico dell'integrale definito, anche se non si tratta di una dimostrazione vera e propria (che però esiste).

72.5.4 Se f(x) e g(x) sono funzioni continue nell'intervallo [a,b], allora si ha:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \ .$$

Con le solite notazioni, si ha, infatti:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\overline{x}_i) \pm g(\overline{x}_i)\big)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\Delta x \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x \pm \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \ .$$

Quest'ultima proprietà, letta da destra a sinistra, ha un'immediata applicazione proprio al calcolo delle aree. Supponiamo, precisamente, di dover calcolare l'area S(R) della regione R di piano delimitata, nell'intervallo [a,b], dalle due curve di equazioni y=f(x) e y=g(x), tali che f(x)≥g(x). Ebbene, si ha:

$$S(R) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Se le due funzioni f(x) e g(x) fossero entrambe positive in [a,b] (Fig. 9) non ci sarebbero problemi a spiegare la relazione precedente.

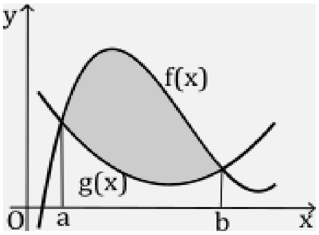

FIG. 9

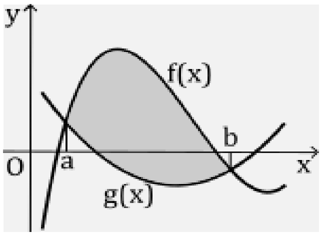

FIG. 10

Se, al contrario, la positività di f(x) e di g(x) in [a,b] non sussiste (Fig. 10) si può supporre di operare una traslazione delle due curve di ampiezza h positiva nella direzione dell'asse y. In base a questa traslazione le equazioni delle due curve diventano: $y=f(x)+h$, $y=g(x)+h$.

Se h è scelto in modo che nell'intervallo [a,b] risulti $f(x)+h>0$ e $g(x)+h>0$, allora:

$$S(R) = \int_a^b (f(x)+h)dx - \int_a^b (g(x)+h)dx$$

e da qui segue subito la relazione precedente.

Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi utilizzando le proprietà dell'integrale definito:

1. Calcolare l'area della regione finita di piano, delimitata dalle parabole di equazioni:

$$y=-x^2+2x, \ \ y=x^2-3x.$$

2. La retta e la parabola di equazioni rispettivamente:

$$y=\frac{x}{2}+1, \ \ y=\frac{x^2}{2}$$

delimitano una regione finita di piano. Calcolare la sua area.

72.6 INTEGRAZIONE GRAFICA

72.6.1 Assegnato il grafico di una funzione reale di variabile reale f(x), può essere importante talora costruire

il grafico di una funzione integrale F(x) di f(x) al fine di poter calcolare direttamente, benché con approssimazione, il valore di F(x) in ogni punto del suo dominio. Quest'operazione è fondamentale, in particolare, quando il grafico di f(x) è stato ottenuto sperimentalmente per punti e non si conosce l'espressione analitica della funzione che esso rappresenta.
L'operazione è denominata **integrazione grafica** ed è sostanzialmente l'operazione inversa della derivazione grafica, ma con qualche complicazione in più e questo suggerisce di procedere per gradi.

Incominciamo allora con il caso in cui la funzione f(x) sia una costante k. Il suo grafico, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), è notoriamente una retta parallela all'asse x. Ci proponiamo di costruire di tale funzione (Fig. 11), supposta definita nell'intervallo $[0, a]$, il grafico di una funzione integrale e precisamente della funzione integrale F(x) che si annulla per x=0.
Indichiamo con A il punto di coordinate $(-1, 0)$ e con B il punto in cui il grafico di f(x) ha ascissa nulla.
Il grafico di F(x) è la retta parallela alla retta AB passante per O o meglio il segmento di tale retta i cui estremi sono i punti di ascisse 0 ed a. In effetti, è facile provare che l'equazione di tale retta è y=kx, per cui F(x)=kx.

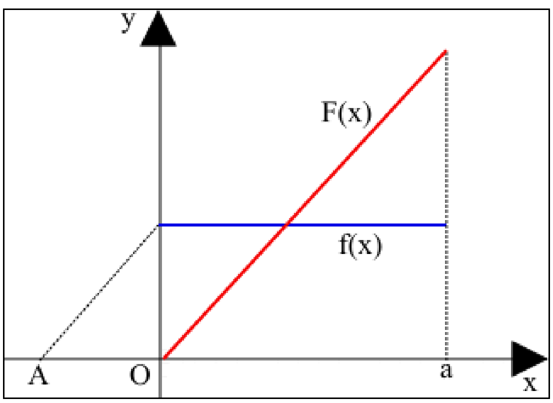

FIG. 11

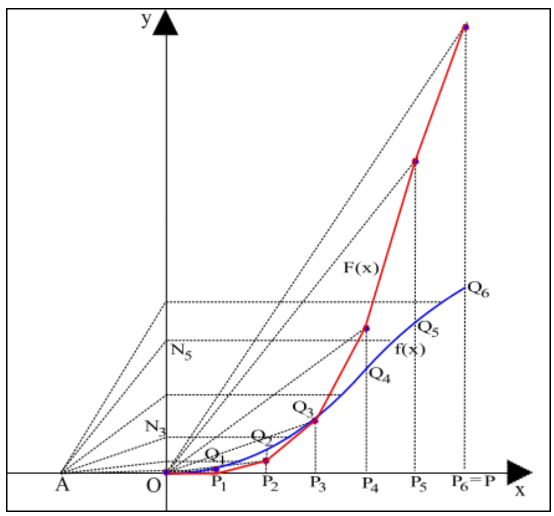

FIG. 12

72.6.2 Il procedimento si complica un po' se il grafico di f(x) non è una retta parallela all'asse x.
Sia allora f(x) una funzione continua in un dato intervallo, per esempio nell'intervallo $[0, a]$, dove a è l'ascissa del punto P (Fig. 12). Ci proponiamo di costruire graficamente una funzione integrale di f(x), precisamente la funzione F(x) che si annulla per x=0. Possiamo constatare subito che, essendo $\int_0^x f(t)dt = 0$ per x=0, il primo punto del grafico di F(x) è esattamente il punto O.
Si suddivide il segmento OP in un opportuno numero n di parti uguali (nel nostro caso n=6) mediante i punti $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$=P. Le perpendicolari all'asse x, condotte per questi punti, intersecano il grafico di f(x) nei punti rispettivamente $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$. Siano poi $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n$ nell'ordine le proiezioni ortogonali dei punti medi degli archi $OQ_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$ sull'asse y. Indicato infine con A il punto di coordinate $(-1, 0)$, si traccia per O:

- la parallela alla retta AN_1 fino ad intersecare la retta P_1Q_1 in F_1,

- la parallela alla retta AN_2 fino ad intersecare la retta P_2Q_2 in F_2,
- …… ,
- la parallela alla retta AN_n fino ad intersecare la retta P_nQ_n in F_n.

I punti $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n$, (evidenziati con pallini in figura) sono, ovviamente con approssimazione, punti del grafico di F(x). La poligonale che unisce questi punti è una rappresentazione approssimata di F(x) e si capisce che l'approssimazione è tanto più buona quanto più grande è il valore prescelto di n, ossia quanto più numerosi sono i punti di divisione del segmento OP. Al limite, solo per $n\to\infty$ la rappresentazione approssimata di $F(x)$ coincide con quella effettiva.

Ti proponiamo per esercizio di rappresentare la funzione lineare f(x)=2x–3 nell'intervallo [0,6] e di costruire il grafico approssimato della funzione integrale di f(x) che si annulla per x=0, ottenuto in seguito ad una suddivisione dell'intervallo in 6 parti uguali. Confrontare quindi questo grafico approssimato con il grafico effettivo della funzione integrale di f(x) nell'intervallo in questione.

72.7 INTEGRALE INDEFINITO

72.7.1 Come abbiamo detto, il problema del calcolo di un integrale definito è ricondotto a quello della ricerca di una primitiva di una funzione. Quindi è su questa ricerca che va posta l'attenzione.
Ora, come c'è una tabella delle derivate fondamentali, allo stesso modo ne esiste una delle primitive fondamentali. La quale, a parte alcuni necessari adattamenti, è tutto sommato quella stessa delle derivate fondamentali, letta però dopo aver sostituito l'intestazione DERIVATA con FUNZIONE e l'intestazione FUNZIONE con PRIMITIVA e dopo aver scambiato le relative colonne (Tab.1).

QUADRO DELLE PRIMITIVE FONDAMENTALI							
FUNZIONE	PRIMITIVA		FUNZIONE	PRIMITIVA		FUNZIONE	PRIMITIVA
$x^a\ (a \neq -1)$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$		$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$		e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{atan} x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{asin} x$

TAB. 1

Una breve considerazione riguardante le primitive di $1/x$. In questa funzione chiaramente x è un qualsiasi numero reale non nullo. Una sua primitiva, perciò, non può essere ln x che, per x<0, non è definita in $\mathbb{R}$. Una primitiva di $1/x$ è invece $\ln|x|$. Di fatto:

- se x>0 allora $\ln|x| = \ln x$ e dunque: $D_x \ln|x| = D_x \ln x = \frac{1}{x}$;
- se x<0 allora $\ln|x| = \ln(-x)$ e dunque: $D_x \ln|x| = D_x \ln(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

72.7.2 Sappiamo che due primitive di una stessa funzione differiscono al più per una costante, a condizione però che il dominio della funzione sia costituito da un solo "pezzo" o, come si dovrebbe dire correttamente, se tale dominio è *connesso*. Ciò significa che, se F(x) è una primitiva di f(x), la più generale

primitiva di f(x), ossia l'insieme delle primitive di f(x), è F(x)+k, con k parametro reale arbitrario.
Ora, la più generale primitiva di una funzione f(x) si chiama **integrale indefinito** di f(x) e si indica, per analogia al modo di scrivere l'integrale definito, con la scrittura:

$$\int \mathbf{f(x)dx}$$

che si legge: «integrale di f(x) dx» [5].
Si ha pertanto:

$$\int f(x)dx = F(x)+k\,.$$

In particolare:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k, \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{atan} x + k, \quad \int 3x^2 dx = x^3 + k\,.$$

Ci occuperemo più dettagliatamente degli integrali indefiniti nella prossima unità. Ma adesso vogliamo concludere con una curiosità.

Se la funzione F(x) è una primitiva di una certa funzione f(x), la sua rappresentazione grafica, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), è costituita dalla curva di equazione y=F(x).
Siccome ogni curva di equazione y=F(x)+k si ottiene dalla precedente traslandola di un segmento lungo |k| nella direzione dell'asse y (nel verso positivo se k>0, in quello negativo se k<0), possiamo concludere che la rappresentazione grafica dell'integrale indefinito di f(x) è costituita dall'insieme delle curve "parallele" (Fig. 13) di equazione y=F(x)+k, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$.

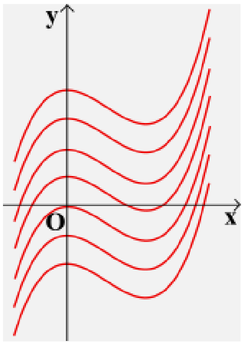

FIG. 13

72.8 OSSERVAZIONI.

Alcune osservazioni importanti sulla integrabilità delle funzioni.

- Qualora la funzione f(x) non fosse continua in un determinato intervallo [a,b] ma presentasse ivi qualche punto di discontinuità (in ogni caso un numero finito di discontinuità), l'area sotto il suo grafico, relativamente a quell'intervallo, si può calcolare ugualmente come somma di aree relative ad intervalli in cui f(x) è continua.

[5] Come per l'integrale definito, a volte si sottintende il fattore dx e si scrive: $\int \mathbf{f(x)}$. Noi non lo faremo.

A titolo di esempio consideriamo la seguente funzione, "costante a tratti" (Fig. 14):

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\le x\le 1\\ 2 & \text{se } 1<x\le 2\end{cases}$$

Essa è continua nell'intervallo [0,2] tranne che nel punto 1, dove presenta una discontinuità. L'area A sotto il suo grafico si può considerare come somma delle aree relative una all'intervallo [0,1] e l'altra all'intervallo [1,2]. Si ha evidentemente:

$$A=1+2=3.$$

Anche adesso, pur non essendo f(x) continua in [0,2], conveniamo di scrivere:

$$A=\int_0^2 f(x)dx\,.$$

E pertanto:

$$\int_0^2 f(x)dx=3\,.$$

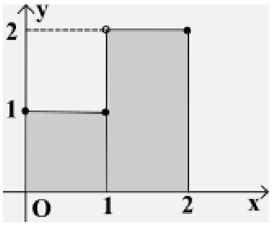

FIG. 14

ESERCIZI.

1. Con riferimento alla funzione f(x) il cui grafico è rappresentato in figura 11, disegna il grafico della funzione integrale $F(x)=\int_{[0,x]} f(t)dt$.
2. Calcola:

a) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ sapendo che $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{se } x\le 2\\ x-1 & \text{se } x>2\end{cases}$; b) $\displaystyle\int_{-2}^2\left(\frac{|x|}{x}+2\right)dx$; c) $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\frac{|x|}{x}+|x|+1\right)dx$.

- **Esistono superfici illimitate cui compete un'area finita.**

Prendiamo al riguardo la funzione (Fig. 15): $y=\dfrac{1}{x^2}$.

Nell'intervallo $[1,+\infty[$ essa è continua. Di conseguenza, comunque si prenda $t>1$ risulta integrabile in $[1,t]$. Di fatto, dopo aver verificato che una primitiva della funzione è $-1/x$, si ha:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t=1-\frac{1}{t}\,.$$

Possiamo constatare che:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1\,.$$

Ciò autorizza ad affermare che la funzione in esame è integrabile in $[1,+\infty[$.

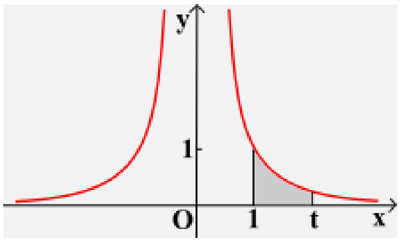

FIG. 15

Abbiamo così una superficie "illimitata" cui corrisponde un'area "finita".
In questo caso si pone per definizione:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx\,.$$

Va ribadito che **questa definizione ha significato solo se il limite esiste ed è finito**, in pratica se è un numero reale. Se, al contrario, con riferimento ad una generica funzione f(x):

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

non è un numero reale, la funzione f(x) non è integrabile in $[a,+\infty[$ ed alla superficie "illimitata" non si può attribuire un'area "finita".
Così, per esempio, non è integrabile in $[1,+\infty[$ la funzione $1/x$. Infatti, una volta constatato che per $x>0$ una sua primitiva è $\ln x$, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty.$$

Gli integrali dei tipi seguenti:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\ ,$$

per i quali valgono considerazioni analoghe a quelle su esposte, nel caso in cui siano finiti si dicono ***integrali generalizzati*** (o ***impropri***).

ESERCIZI.

1. Stabilire se sono integrabili nei rispettivi intervalli le seguenti funzioni:

$$\text{a)}\ f(x)=\frac{1}{x^4}\ \text{ in }\ [0,+\infty[\ ;\qquad \text{b)}\ f(x)=x^2\ \text{ in }\ [0,+\infty[\ ;$$

$$\text{c)}\ f(x)=e^x\ \text{ in }\ [-\infty,0[\ ;\qquad \text{d)}\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ \text{ in }\ [0,+\infty[\ .$$

2. Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\,,$$

dove α è un parametro reale. Calcolare l'area sotto il grafico della funzione nell'intervallo $[1, t]$, con $t>1$. Esistono valori di α per i quali ha valore finito il sottografico della funzione relativa all'intervallo $[1,+\infty[$?

• La situazione descritta in termini intuitivi all'inizio di questo paragrafo 72.7, ora che sono stati introdotti gli integrali impropri, può essere proposta in modo più formale. Si ha infatti la seguente definizione, dovuta a Cauchy:

Sia f(x) una funzione continua in un intervallo [a,b], salvo un punto c interno ad esso. Se esistono e sono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx \quad e \quad \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx\,,$$

allora si pone per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx\,.$$

Consideriamo per esempio la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{per } \ 0\le x<1 \\ x & \text{per } \ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

Constatiamo che f(x) è continua nell'intervallo [0,2], salvo che nel punto 1, dove presenta una discontinuità non eliminabile. Inoltre, dopo aver verificato che la funzione $-2\sqrt{1-x}$ è una primitiva della funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, constatiamo che si ha:

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to1^-}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to1^-}\left[\left(-2\sqrt{1-t}\right)-(-2)\right] = 2$$

$$\lim_{t\to1^+}\int_t^2 x\,dx=\lim_{t\to1^+}\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^2=\lim_{t\to1^+}\left[2-\frac{t^2}{2}\right]=\frac{3}{2}.$$

Cosicché si ha:

$$\int_0^2 f(x)dx=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}.$$

Questo integrale è il valore dell'area evidenziata in figura (Fig. 16), dove è rappresentata la funzione f(x). Area finita, pertanto, ma di una superficie evidentemente illimitata.

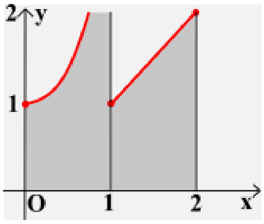

FIG. 16

La precedente definizione può essere estesa facilmente al caso in cui f(x) è continua in un intervallo [a,b], salvo che in un numero finito n di punti $c_1, c_2, \dots, c_n$. Basta suddividere l'intervallo [a,b] in n intervalli parziali, in ognuno dei quali ci sia uno ed un solo punto di discontinuità, applicare ad ogni intervallo la definizione precedente e sommare infine i valori numerici ottenuti.

ESERCIZIO.
Si consideri la seguente funzione f(x):

$$\text{a) } f(x)=\frac{1}{x^2}\,; \qquad \text{b) } f(x)=\begin{cases}2-x & \text{per } x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{per } x>0\end{cases}$$

Stabilire se esiste:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx\,.$$

72.9 INTEGRALE CURVILINEO [6]

72.9.1 Fin qui abbiamo sempre associato un'area all'integrale definito e questo potrebbe indurre a credere che effettivamente l'integrale definito rappresenti solo ed esclusivamente un'area. Non è così, ma avremo modo di vedere questo in maniera articolata nell'unità 74. Qui, nondimeno, vogliamo fornire una prima generalizzazione del concetto di integrale.

Supponiamo allora assegnata nel piano una linea curva γ (Fig. 17). Scelti arbitrariamente su di essa un punto P_0 (*punto origine*) ed un punto U_0 (*punto unità*) resta fissato su γ quello che si chiama un *riferimento curvilineo*. In questo modo, ad ogni punto P di γ è associato un numero reale s, il cui valore assoluto è la misura dell'arco P_0P di γ rispetto all'arco P_0U_0; s si assume uguale a 0 se P coincide con P_0, positivo se P si trova sulla semicurva di origine P_0 contenente U_0, negativo negli altri casi. Il numero reale s si definisce *ascissa curvilinea* di P.

[6] Questo paragrafo è rivolto solamente all'indirizzo Trasporti e Logistica dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico (C2).

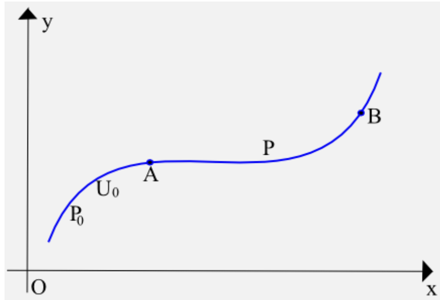

FIG. 17

Ammettiamo adesso che ad ogni punto P dell'arco AB di γ sia associata una grandezza z. Possiamo legittimamente supporre che z sia funzione di s: z=f(s).
Immaginiamo ora di suddividere l'arco AB di γ in un numero n di archi elementari Δs e di prendere la somma:

$$\sum_{i=i}^{n} f(s)\Delta s\,.$$

Il limite di questa somma, quando n tende ad infinito, vale a dire la somma degli infiniti elementi infinitesimi $f(s)\Delta s$, si chiama ***integrale curvilineo*** lungo l'arco AB. Se s_A ed s_B sono rispettivamente le ascisse curvilinee di A e B, l'integrale è indicato con la scrittura seguente:

$$\int_{s_A}^{s_B} f(s)ds\,.$$

Si pone il problema di calcolare questo integrale quando s è espressa mediante le coordinate cartesiane (x,y) di P. Per questo è necessario avere le equazioni parametriche della curva γ. Se esse sono le seguenti equazioni: $x=x(t),\ y=y(t)$, la teoria spiega che risulta:

$$\int_{s_A}^{s_B} f(s)ds=\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\,,$$

dove α, β sono i valori di t corrispondenti rispettivamente ai punti A, B, estremi dell'arco.

72.9.2 Un caso particolare di integrale curvilineo è quello che esprime la lunghezza L di un arco di curva piana γ. Ebbene, la lunghezza dell'arco AB di una curva piana è:

$$L=\int_{s_A}^{s_B} ds=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\ dt$$

essendo ovviamente x=x(t), y=y(t) le equazioni parametriche di γ ed α, β i valori di t corrispondenti rispettivamente ai punti A, B, estremi dell'arco.

- A titolo di esempio, ci proponiamo di calcolare la lunghezza dell'arco AB della parabola di equazione cartesiana $y=\frac{1}{2}x^2$, sapendo che A e B hanno ascisse rispettivamente 1 e 2.

Servono anzitutto le equazioni parametriche della parabola. Sono le seguenti:

$$x=t,\ \ y=\frac{1}{2}t^2\,.$$

Pertanto:

$$x'(t)=1\ \text{ e }\ y'(t)=t\,.$$

Bisogna conoscere adesso quali valori di t corrispondono ai punti A e B assegnati. Si trova facilmente che

essi sono rispettivamente 1 e 2.
Consegue da tutto ciò che la lunghezza L dell'arco AB della parabola è la seguente:

$$L=\int_1^2 \sqrt{1+t^2}\,dt\,.$$

Siccome, come puoi verificare da solo, una primitiva della funzione $\sqrt{1+t^2}$ è la funzione:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)+\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\,,$$

si ha:

$$L=\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)+\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\approx 1{,}81\,.$$

Questo semplice esercizio fa comprendere quanto sia complicato calcolare un integrale curvilineo. Se proprio ce n'è la necessità si suggerisce pertanto l'uso di un idoneo software matematico.

- Qualche caso semplice tuttavia c'è, come il calcolo della lunghezza di una circonferenza. In realtà, la formula di tale lunghezza è nota, ma qui vogliamo ritrovarla mediante il calcolo integrale.

Sia allora una circonferenza di raggio assegnato R. Assumiamo come riferimento cartesiano (Oxy) un sistema monometrico ortogonale con l'origine nel centro della circonferenza. L'equazione di questa è allora la seguente: $x^2+y^2=R^2$. Una sua forma parametrica, che è ciò che a noi serve, è la seguente:

$$x=R\cos t\,,\quad y=R\sin t\,,\quad \text{con } 0\leq t<2\pi\,.$$

Pertanto:

$$x'=-R\sin t\,,\quad y'=R\cos t\,.$$

La lunghezza L della circonferenza è perciò:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=R\,[t]_0^{2\pi}=2\pi R\,.$$

VERIFICHE.

Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x), sapendo che (nn. 1-6):

1. $f(x)=\int_0^x e^t dt.$ [**R.** e^x]

2. $f(x)=\int_0^{3x} e^t dt.$ [**R.** $3\,e^{3x}$]

3. $f(x)=\int_{x/2}^{2x}\sin t\,dt.$ $\left[\textbf{R. } 2\sin 2x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right]$

4. $f(x)=\int_x^{3x}(t^2-2t)dt.$ [**R.** $26x^2-16x$]

5. $f(x)=\int_{2x}^{3x}\tan t\,dt.$ **R.** $3\tan 3x-2\tan 2x$]

6. $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+t}dt.$ $\left[\textbf{R. } \frac{2x}{1+x^2}\right]$

Calcolare i seguenti integrali definiti ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale e tenendo presente la tabella delle primitive fondamentali (nn. 7-15):

7. $\int_0^1 x^2 dx$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{3}\right]$

8. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ $[\mathbf{R.}\ 1]$

9. $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ $[\mathbf{R.}\ 1]$

10. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ $[\mathbf{R.}\ 2]$

11. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

12. $\int_0^1 e^x dx$ $[\mathbf{R.}\ e-1]$

13. $\int_0^2 2^x dx$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{\ln 2}\right]$

14. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\pi}{4}\right]$

15. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{\pi}{6}\right]$

Questioni varie.

16. È data la funzione $f(x)=|2x-3|+4$.

1. A) Tracciarne il grafico.
   B) Calcolarne la derivata.
   C) La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio?
2. A) Calcolare $\int_{-1}^{3} f(x) dx$.
   B) Spiegare in maniera esauriente perché la funzione f(x) non ammette primitiva nell'intervallo $[-1,3]$.

17. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva di equazione $y=1/x^3$. Stabilire se la regione piana, situata nel semipiano $x\geq1$, compresa tra la curva e il suo asintoto orizzontale ha un'area (finita) o no. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Si tratta di calcolare } \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^3}\right]$

18. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva di equazione $y=1/x$. Stabilire se la regione piana, situata nel semipiano $x\geq2$, compresa tra la curva e il suo asintoto orizzontale, ha un'area (finita) o no. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Si tratta di calcolare } \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x}\right]$

19. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva di equazione $y=\frac{1}{1+x^2}$. Stabilire se la regione piana compresa tra la curva e il suo asintoto orizzontale ha un'area (finita) o no.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{Si tratta di calcolare } \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}\right)\right]$$

20. Spiegare in maniera esauriente perché si ha:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \text{atan}\frac{1}{3}$; b) $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{6}$; c) $\int_{-4/5}^{3/5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

21. Quale relazione sussiste fra l'area del sottografico della funzione $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ relativo all'intervallo $[0,1]$ e l'area del cerchio di raggio unitario?

22. È assegnata la funzione:

$$y = \frac{|x|}{x} + 2|x| + x\,.$$

1. A) Tracciarne il grafico.
   B) Calcolarne la derivata.
   C) La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio?
2. A) Calcolare $\int_{[-1,1]} y\,dx$.
   B) Stabilire se la funzione assegnata ammette o no primitiva nell'intervallo $[-1,1]$.

23. Della funzione reale di variabile reale f(x) si sa che, per ogni x reale, risulta: $f'(x)=a$ dove a è una costante.
1. A) Spiegare perché la funzione è definita e continua su tutto l'asse reale.
   B) Quali sono tutte le possibili funzioni f(x)?
2. A) Determinare la funzione f(x) sapendo, in particolare, che è: $\int_{[1,2]} f(x)dx=0$, $f'(x)=1$.

24. Della funzione reale di variabile reale f(x) si sa che, per ogni x reale, risulta: $f''(x)=a$, dove a è una costante.
1. A) Spiegare perché la funzione è definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale.
   B) Quali sono tutte le possibili derivate $f'(x)$ della funzione?
2. A) Determinare f(x) sapendo, in particolare, che è: $\int_{[0,1]} f(x)dx=1$, $f'(1)=2$, $f''(1)=1$.

25. La derivata della funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t}dt$$

è la funzione:

$$f'(x) = \frac{1-e}{e} \cdot e^{-x}\,,$$

essendo "e" la base dei logaritmi naturali.
Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

26. La derivata della funzione:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

dove x>0 e "ln" indica il logaritmo naturale, è la funzione:

$$f'(x) = \frac{\ln(\frac{x}{2})}{\ln(x)\ln(2x)}\,.$$

Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

27. Il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x}(1-e^{-t})dt}{\sin x}\,,$$

dove "e" la base dei logaritmi naturali, vale 0. Eseguire tutti i passaggi necessari a provarlo.

28. Nella figura 18 è rappresentata la funzione f(x) nell'intervallo [–a,a]. Considerata la funzione $F(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\,dt$, confrontare i seguenti valori per stabilire se il primo di essi è maggiore, uguale o minore del secondo, fornendo esaurienti spiegazioni delle relazioni trovate:

1) $F(a), F(b)$; 2) $F(b), F(-b)$; 3) $F(b), F(b/2)$; 4) $F(a)-F(b), F(a)-F(-b)$.

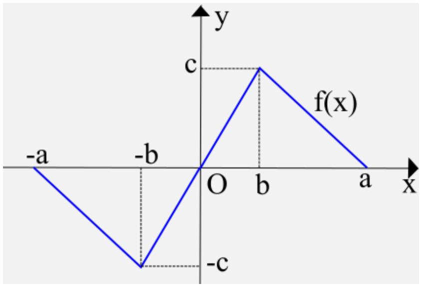

FIG. 18

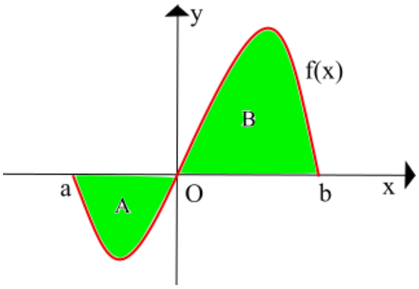

FIG. 19

29. Nella figura 19 è rappresentata la funzione f(x) nell'intervallo [a,b]. Si sa che l'area della regione A è 21/20 e quella della regione B è 12/5. Calcolare:

$$\int_a^b 2\, f(t)\, dt\,.$$

30. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva di equazione $y=x^n$, dove n è un intero positivo. Si prenda su di essa il punto P di ascissa a e si indichi con A il punto dell'asse x avente la stessa ascissa di P e con B il punto dell'asse y avente la stessa ordinata di P. Calcolare il rapporto fra la minore e la maggiore delle regioni in cui la curva assegnata divide il rettangolo OAPB. [**R.** $1/n$]

31. È data la funzione f(x) tale che:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \ \text{ per } \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} \ \ \text{ per } \ 1<x\le 2 \end{cases}$$

a) Calcolare l'area del sottografico della funzione relativa all'intervallo [0,2].

b) Determinare la funzione integrale F(x), con $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ \frac{3}{2}+\ln 4\,;\quad \text{b)}\ F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+x \ \text{ per } \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{2}+2\ln x \ \text{ per } \ 1<x\le 2 \end{cases}\right]$$

32. È data la funzione f(x) tale che:

$$f(x)=\begin{cases} k\,x^2 \ \text{ per } \ 0\le x\le 2 \\ \dfrac{8\,k}{x} \ \text{ per } \ 2<x\le 4 \end{cases}$$

a) Calcolare per quale valore del parametro reale k l'area del sottografico della funzione relativa all'intervallo [0,4] è uguale a $8+24\ln 2$.

b) Per tale valore di k, determinare la funzione integrale F(x), con $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

[**R.** a) k=3, b) …]

33. È data la funzione f(x) tale che:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ \text{ per } \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \ \text{ per } \ x>1 \end{cases}$$

a) Calcolare l'area del sottografico della funzione relativa all'intervallo [0,2].

b) Determinare la funzione integrale F(x), con $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

$$\left[\text{R. a) ...; b) } F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3 & \text{per } 0\le x\le 1\\ \frac{4}{3}-\frac{1}{x} & \text{per } x>1\end{cases}\right]$$

34. Il ragionier Fantozzi ogni domenica mattina fa 2 ore di jogging lungo un percorso di andata e ritorno, che all'andata presenta un tratto AB pianeggiante e un tratto BC in salita: i due tratti sono ugualmente lunghi. Il ragionier Fantozzi mantiene una velocità media di 2 km/h in pianura, di 1,5 km/h in salita e di 2,5 km/h in discesa.

a) Calcolare la velocità media tenuta dal ragionier Fantozzi sull'intero percorso di andata e ritorno.
b) Calcolare la lunghezza del tratto AB e il tempo impiegato a percorrerlo.
c) Determinare la funzione $v=v(t)$, con $0\le t\le 2$, della velocità tenuta dal ragionier Fantozzi nelle 2 ore in cui fa jogging, tenendo presente che t è misurato in ore e v in km/h.
d) Calcolare l'area sotto il grafico della funzione $v=v(t)$ relativa all'intervallo $[0,2]$ e spiegarne il significato fisico.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } \frac{60}{31}\,\text{km/h};\ \text{b) } \frac{30}{31}\,\text{km},\ \frac{15}{31}\,\text{h}; ...\right]$$

35. È assegnata la funzione:

$$f(x)=e^x(1-x),$$

essendo e il numero di Nepero.

a) Rappresentarla il un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
b) Stabilire se ha valore finito il sottografico della funzione relativa all'intervallo $]-\infty,1]$.

36. Sono assegnati il grafico G (Fig. 20) della funzione $y=f(x)$ e le seguenti funzioni:

$$y=\ln\sqrt{1+x^2},\quad y=x+\frac{1}{x},\quad y=\operatorname{atan} x.$$

a) Una di esse è una primitiva della funzione f(x): determinarla
b) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico G, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=2$.

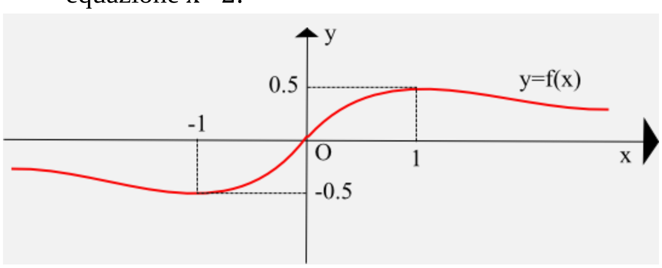

FIG. 20

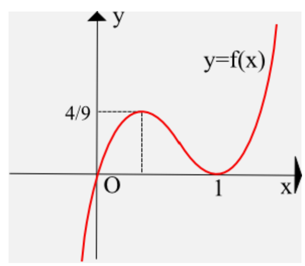

FIG. 21

37. Sono assegnati il grafico G (Fig. 21) della funzione $y=f(x)$ e le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{4}(3x+1)(x-1)^3,\quad y=2x(x-1)^2,\quad y=\frac{1}{2}x^2(x-1)^2.$$

a) Una di esse è una primitiva della funzione f(x): determinarla
b) Il grafico G presenta un centro di simmetria C: determinarlo e scrivere l'equazione $y=g(x)$ della trasformata di $y=f(x)$ in base alla traslazione che porta C nell'origine O del sistema di riferimento.
c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

38. Trovare una primitiva della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,.$$

[Attenzione! Bisogna distinguere due situazioni, secondo che sia $x \geq 1$ oppure $x<1$]

39. Sia la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,.$$

a) Verificare che si ha:

$$f(x) = D_x\left(-\frac{\frac{3}{2}x^2+1}{x(1+x^2)}\right) - \frac{\frac{3}{2}}{1+x^2}\,.$$

b) Calcolare una primitiva della funzione $f(x)$.

40. Sia la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^4-1}\,.$$

a) Determinare i numeri A, B, C in modo che risulti identicamente:

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1}\,.$$

b) Calcolare una primitiva della funzione $f(x)$.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}\ ;\ \text{b) } \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{atan} x\right]$

41. Sia la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}\ ,\quad con \quad 0 < x < \pi\,.$$

a) Verificare che sono sue primitive tutte e tre le funzioni seguenti:

$$a(x) = -\frac{\cos x}{1+\sin x}\ ,\quad b(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}\ ,\quad c(x) = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

b) Le funzioni $a(x), b(x), c(x)$, essendo primitive di una medesima funzione in un dominio connesso, differiscono al più per una costante: verificarlo.

[**R.** a) … ; b) $a(x) = b(x) = c(x) + 1$]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1 Funzione primitiva e funzione integrale di una funzione sono o no concetti equivalenti?

2 È vero che due primitive di una stessa funzione sono in ogni caso due funzioni uguali?

3 È vero che le due funzioni xe^x ed xe^x–e, dove “e” è il numero di Nepero, sono primitive di una stessa funzione?

4 È vero che una primitiva di 1/x è ln x?

5 È vero che è $4x^2$ la derivata rispetto ad x della funzione $\int_0^{2x} t^2 dt$?

6 Sia f(x) una qualsiasi funzione integrabile nell’intervallo [0,2]. Ammesso che sia $\int_{[0,2]} f(x)dx=a$, è vero o è falso che è certamente $\int_{[0,2]} [f(x)]^2dx=a^2$?

7 È vero che una funzione continua in un intervallo [a,b] è sia derivabile sia integrabile in tale intervallo?

8 Sia α un qualunque numero reale positivo e $\ln\alpha$ esprima l'area sottesa dal grafico di una particolare funzione su un dato intervallo. Quale può essere una tale funzione? Quale l'intervallo?

RISPOSTE.

1. Sono concetti distinti. Primitiva di una funzione è una funzione la cui derivata coincide con la funzione data. Funzione integrale di una funzione è una particolare primitiva della funzione. Precisamente, se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a,b], la funzione integrale di f(x) in [a,b] è la funzione $F(x)=\int_{[a,x]}f(t)dt$, dove $x\in[a,b]$.
2. No. Due primitive di una stessa funzione, definite in un medesimo intervallo, differiscono (al più) per una costante.
3. Sì. Infatti le due funzioni, definite su tutto l'asse reale, differiscono soltanto per una costante.
4. No. Una primitiva di $1/x$ è $\ln|x|$.
5. No. La derivata è, infatti: $(2x)^2\cdot D_x(2x)$, cioè $8x^2$.
6. È falso. Basta considerare la funzione $f(x)=1$: si può vedere che il primo integrale è 2, per cui $a=2$; anche il secondo integrale è uguale a 2, ma $a^2=4$.
7. È falso. Nel senso che la funzione è certamente integrabile, ma non altrettanto certamente derivabile. Basti pensare alla funzione $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ 2 & \text{se } 1<x\leq 2 \end{cases}$
8. Una funzione è $1/x$ e l'intervallo è $[1,\alpha]$. Si constata infatti facilmente che si ha:
$$\int_1^\alpha \frac{1}{x}dx=\ln\alpha\ .$$