Prerequisiti:
- Concetti di limite, derivata e integrale.

Questa unità non riguarda l'Istituto Tecnico, settore Economico. Tutte le altre scuole ne affronteranno lo studio nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *esporre con proprietà l'evoluzione storica dell'analisi matematica*

Analisi matematica: un profilo storico

Unità 75

75.1 I PRECURSORI

75.1.1 Nel XVII secolo c'era la necessità di risolvere problemi che non si riusciva a risolvere con i metodi tradizionali, basati esclusivamente sulla geometria e sull'algebra. Erano sostanzialmente di due tipi e condussero alle due operazioni che oggi chiamiamo *calcolo differenziale* e *calcolo integrale*.
Precisamente:

- condussero al **calcolo differenziale** il problema in cui bisognava calcolare la velocità di un corpo quando se ne conosce la legge del moto e quello in cui bisognava calcolare la tangente al grafico di una data funzione in un suo punto;
- condussero al **calcolo integrale** il problema in cui bisognava calcolare lo spazio percorso da un corpo quando si conosce la legge con cui la velocità dipende dal tempo e i problemi in cui bisognava calcolare aree e volumi.

Gli studiosi che crearono quella che oggi si chiama **analisi matematica** e in particolare **l'analisi** (o **calcolo**) **infinitesimale,** furono l'inglese **Isaac Newton** (1642-1727) e il tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

Quando diciamo che Newton e Leibniz furono i creatori dell'analisi infinitesimale non bisogna pensare che all'improvviso, come prestigiatori, questi due grandi abbiano estratto da un cilindro il classico coniglio. Il progresso matematico, così almeno noi crediamo, avviene con continuità, sulla base di scoperte graduali ottenute col contributo, piccolo o grande, di molti ricercatori. Anche se poi solo la presenza del genio matematico fa compiere il decisivo salto di qualità. Pure nel settore dell'analisi è stato così. Il calcolo integrale, infatti, affonda le sue radici nell'epoca d'oro della matematica greca mentre quello differenziale, seppure molto più vicino a noi, si può far risalire a P. Fermat. Newton e Leibniz hanno fatto l'ultimo passo, che però è stato quello decisivo.

75.1.2 Dei contributi degli antichi (Eudosso, Archimede) ed anche degli studiosi del periodo rinascimentale (tra cui Galilei, Kepler, Cavalieri, Torricelli), riguardo al problema delle aree, ci siamo già occupati. Qui vogliamo solo fare un cenno al lavoro di un discepolo di Cavalieri, Pietro Mengoli.
L'apporto di **Pietro Mengoli** (1625-1686) all'analisi infinitesimale fu notevole, anche se i suoi risultati ebbero influenza zero sul progresso della disciplina e lo stesso Mengoli non è quasi mai citato nemmeno fra i precursori di Newton e Leibniz. Come mai?
Mengoli – che fu discepolo di Cavalieri, al quale succedette nella cattedra di Bologna – pubblicò nel 1659 proprio a Bologna un'opera dal titolo *Geometriae speciosae elementa*. In essa l'Autore, spinto dal desiderio di dare alla *Geometria degli indivisibili* del suo maestro quella base logica di cui mancava, definisce i concetti di limite, di infinito e di infinitesimo e fornisce una condizione di integrazione per speciali funzioni continue.
Purtroppo all'epoca in cui operava Mengoli, il centro degli studi matematici si era spostato dall'Italia ad altri paesi, come l'Inghilterra e l'Olanda; ma soprattutto Mengoli scriveva in maniera a dir poco incomprensibile. Cosicché, le sue opere furono subito dimenticate e il suo nome rimase addirittura sconosciuto fino ai primi anni del Novecento, quando fu riscoperto. Per questo i suoi risultati, pur notevoli, sono stati del tutto ininfluenti sullo sviluppo e il progresso del calcolo infinitesimale.

75.1.3 Un notevole impulso alla risoluzione delle due classi di problemi su accennati, ed in particolare al problema delle tangenti, venne dalla creazione della geometria analitica e dalla sua volgarizzazione, ma anche dall'affermarsi del calcolo simbolico soprattutto per merito di Cartesio (1637).

Circa il tracciamento della retta tangente ad una curva in un suo punto vi sono esempi che risalgono agli antichi Greci: Euclide (circonferenza), Archimede (spirale), Apollonio (conica). Ma i procedimenti seguiti da quei geometri non coinvolgono quantità infinitesimali, per cui non è il caso di parlarne in questa sede.

Il primo studioso che affrontò la questione con procedimenti infinitesimali, fu il francese **Pierre de Fermat** (1601-1665), avvocato di professione e matematico per hobby, che per questo può essere considerato un antesignano del calcolo differenziale.

Vediamo in cosa consiste il metodo di Fermat, servendoci però di un linguaggio a noi familiare. Sia P(a,f(a)) il punto della curva γ di equazione $y=f(x)$, nel quale si vuole tracciare la tangente t a γ (Fig. 1). Si prende un punto Q di γ di coordinate $x_Q=a+E$, $y_Q=f(a+E)$. Se Q è "infinitamente vicino" a P, i due triangoli RP'P ed RQ'Q si possono ritenere simili, per cui: $\frac{QQ'}{PP'}=\frac{Q'R}{P'R}$. Ora, posto P'R=b, la precedente relazione diventa:

$$\frac{f(a+E)}{f(a)}=\frac{b+E}{b}\ .$$

Per tracciare la tangente a γ in P è allora sufficiente trovare R, che è come dire calcolare b. A questo proposito, nella precedente relazione, dopo aver semplificato e diviso per E, Fermat pone E=0 e ricava b.

Chiariamo meglio, prendendo l'esempio particolare della curva di equazione $y=x^3$. In tal caso la relazione di Fermat è la seguente:

$$\frac{(a+E)^3}{a^3}=\frac{b+E}{b}\ .$$

da essa, in seguito ad operazioni di semplificazione, si trova dapprima (<u>dopo aver diviso tutto per E</u>):

$$3a^2b+3abE+bE^2=a^3$$

e poi (<u>dopo aver posto E=0</u>): $3a^2b=a^3$, da cui si ricava $b=a/3$.

Con qualche semplice calcolo si può trovare l'equazione della tangente t, che è esattamente:

$$y = 3\,a^2\,x - 2\,a^3.$$

Osserviamo che la relazione di Fermat può essere scritta nella seguente forma equivalente:

$$\frac{f(a+E)-f(a)}{E}=\frac{f(a)}{b}$$

dove f(a)/b altro non è che la pendenza m della retta t tangente a γ in P. Ne possiamo desumere che tale pendenza è il valore dell'espressione $\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$ quando E è "infinitamente piccolo", vale a dire, in termini che però erano sconosciuti a Fermat:

$$m = \lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}.$$

Si tratta, se si vuole, del **primo esempio della storia di derivata di una funzione**.

Ma Fermat non possedeva il concetto di limite ed era costretto perciò a seguire un ragionamento che, in realtà, difettava sul piano del rigore matematico: che cos'era, infatti, quella quantità "E" che prima, quando si divide per essa, non può essere "zero" (altrimenti la divisione non sarebbe possibile) e subito dopo si pone, invece, proprio uguale a "zero"?

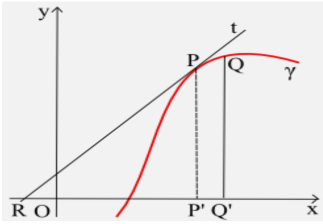

FIG. 1

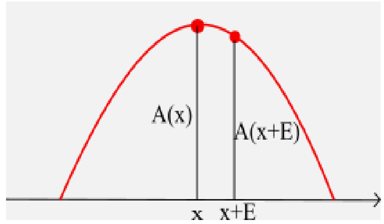

FIG. 2

Ci occupiamo ancora di Fermat per descrivere il procedimento mediante il quale egli risolve il problema di dividere un segmento in due parti in modo che il rettangolo avente per lati queste parti abbia area massima.

Chiamato AB il segmento di lunghezza assegnata a e preso un suo punto interno C, le due parti sono AC e CB, lunghe rispettivamente x e a−x. L'area del rettangolo che ha quelle parti come lati è allora $A(x)=x(a-x)$. Se si aumenta il segmento AC di una lunghezza "molto piccola" E e si diminuisce il segmento CB della stessa lunghezza, l'area del nuovo rettangolo diventa:

$$A(x+E)=(x+E)(a-x-E)=ax-x^2-2Ex+Ea-E^2.$$

Se x è il valore per il quale A(x) è massima (Fig.2), essendo E "molto piccolo", A(x+E) è "molto prossimo" ad A(x), per cui è praticamente $A(x+E)-A(x)=0$. D'altro canto si ha:

$$A(x+E)-A(x)=Ea-2Ex-E^2,$$

pertanto deve essere: $Ea=2Ex+E^2$. Da qui, dividendo tutto per E, segue: $a=2x+E$. Ponendo adesso $E=0$, si ottiene: $a=2x$. Il che implica AC=CB e quindi C è il punto medio del segmento AB. Come dire che il rettangolo cercato è il quadrato di lato $a/2$.

Di nuovo fa capolino il rapporto $\frac{A(x+E)-A(x)}{E}$ che, quando E è "infinitamente piccolo", fornisce una relazione dalla quale si ricava il valore di x per il quale si ottiene il rettangolo di are massima.
Ma, nel ragionamento di Fermat, permane il solito difetto: cos'è mai la quantità E che prima è zero e subito dopo non lo è?

L'interrogativo avrebbe trovato adeguata risposta solo nella prima metà dell'Ottocento allorché Cauchy avrebbe dato una definizione accettabile di "infinitesimo". Ma procediamo con ordine.

75.1.4 Fermat ottenne risultati dello stesso valore di quelli sulle tangenti e sui massimi (e minimi) anche sulla quadratura delle superfici e sulla rettificazione delle linee curve. Ma rimase per molti versi ancorato al modo d'indagine dei Greci. Cosicché, pur possedendo una matematica completamente rivoluzionata e certamente più potente di quella degli Antichi e pur essendo andato molto vicino a creare il calcolo infinitesimale e il calcolo integrale, non si rese conto minimamente di ciò. Altri avrebbero fatto l'ultimo passo.
I risultati ottenuti da Fermat – anche se non furono pubblicati in forma ufficiale [(1)] – cominciarono a circolare negli ambienti matematici mentre Fermat era in vita e sembra che Newton ne sia venuto a conoscenza. Del resto due altri scienziati dell'epoca – **Christian Huygens** (1629-1695) e **James Gregory** (1638-1675) – i quali avrebbero influenzato l'opera di Newton, si servirono, per le loro ricerche, del metodo delle tangenti di Fermat.

[1] La pubblicazione delle opere di Fermat avvenne dopo la sua morte.

Un altro matematico di quel periodo aveva ideato un metodo che non differiva sostanzialmente da quello di Fermat e che da lui, benché non direttamente, sembra abbia mutuato. Si tratta di **Isaac Barrow** (1630-1677), professore di matematica a Cambridge, dove frequentò le sue lezioni l'allievo Isaac Newton, che gli sarebbe succeduto in quella cattedra a partire dal 1669.
Barrow fu colui che per primo occupò, a partire dall'anno 1663, una cattedra di matematica nel Regno Unito. Cattedra che a Cambridge era ed è denominata *cattedra lucasiana* in onore del reverendo ed uomo politico Henry Lucas (1610-1663), il quale dispose nel suo testamento che alcuni suoi beni fossero destinati per l'appunto all'istituzione di una cattedra dedicata alla matematica e alla filosofia naturale.
In realtà, fino al XVII secolo non esistevano cattedre di matematica, che furono istituite, in diversi paesi europei, proprio nel corso di quel secolo.
Oltre Barrow, un altro inglese, **John Wallis** (1616-1703), professore all'Università di Oxford, esercitò una profonda influenza sulla formazione matematica di Newton. Non direttamente, per la verità, ma tramite una sua opera, l'*Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655. In tale opera Wallis riprendeva la *Geometria degli indivisibili* ma, a differenza di Cavalieri, che seguiva procedimenti geometrici per trovare i suoi risultati, egli assegnava valori numerici agli infiniti indivisibili delle figure ed operava su di essi con le regole dell'aritmetica. Si serviva in particolare del fatto che la quantità 1/n è uguale a 0 quanto n è infinito e scriveva senza scrupoli: $1/\infty=0$ (il simbolo dell'infinito, l'otto coricato ∞, è attribuito a lui).
Le scoperte che fin qui siamo andati evidenziando non sono che alcuni dei risultati che si erano via via accumulati prima che Newton e Leibniz iniziassero le loro ricerche, che poi li portarono a creare il calcolo infinitesimale. Altri risultati, più o meno importanti e sui quali non ci soffermiamo, erano stati ottenuti da altri studiosi, fra i quali ci limitiamo a segnalare **Blaise Pascal** (1623-1662).

75.2 I CREATORI

75.2.1 Riassumendo quanto esposto fin qui, possiamo dunque affermare che nella seconda metà del Seicento erano noti agli studiosi, non solo i metodi geometrici di quadratura e cubatura di Archimede, Cavalieri e Torricelli, ma anche i metodi algebrici d'indagine di Cartesio e dei suoi seguaci. Era nota, per di più, tutta una serie di risultati, alcuni molto significativi, ottenuti col contributo di una vera e propria schiera di scienziati, grandi e piccoli. I tempi erano maturi perché fosse compiuto l'ultimo passo: occorreva solo una mente che, padroneggiando entrambi i metodi suddetti, organizzasse in una disciplina autonoma le idee di quell'epoca, fortemente innovatrici, ma ancora in sospensione.
Di ingegni di tale forza ve ne furono addirittura due in quel periodo: Newton e Leibniz. Entrambi crearono il calcolo infinitesimale e, oggi lo possiamo affermare quasi con certezza, l'uno indipendentemente dall'altro, come d'altronde si è spesso verificato nelle scoperte scientifiche. Newton lo scoprì per primo, ma spetta a Leibniz il merito della priorità nella pubblicazione.

- La prima esposizione del calcolo infinitesimale è data da Newton in un'opera dal titolo *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta nel 1669 ma pubblicata solo nel 1711 (l'opera, comunque, circolò manoscritta fin dalla sua stesura).

La prima esposizione del calcolo pubblicata ufficialmente, ma non in forma sistematica, apparve invece nel 1687 con la prima edizione dell'opera principale di Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Una nuova esposizione dei metodi newtoniani del calcolo infinitesimale si ha in un'opera dal titolo *De quadratura curvarum*, che comparve nel 1704 come appendice ad un trattato sull'ottica, intitolato appunto *Opticks*.
Un'altra opera sul medesimo tema, dal titolo *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, fu composta nel 1671, ma fu stampata postuma nel 1736.

• Sembra che Leibniz abbia maturato le sue idee sul calcolo infinitesimale tra il 1673 e il 1676 in seguito alla lettura dei lavori di Pascal. Egli, comunque, pubblicò i suoi risultati sul calcolo nel 1684 in un articolo di sole sei pagine dal titolo lunghissimo ma esplicativo – *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quas nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* [2] – sulla rivista *Acta Eruditorum*, un periodico matematico fondato nel 1682 dal filosofo e scienziato tedesco Otto Mencke (1644-1707) su richiesta dello stesso Leibniz. Sulla stessa rivista Leibniz pubblico nel 1686 i risultati sul calcolo integrale. Il relativo articolo ha per titolo *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*.

75.2.2 A questo punto è il caso di chiarire perché Newton e Leibniz sono considerati i *creatori* del calcolo infinitesimale.
Prima di loro differenziazioni e integrazioni erano fatte con una certa frequenza. Ma **non vi erano regole generali e per questo ogni problema era una questione a sé e la sua risoluzione comportava difficoltà considerevoli, talvolta insuperabili**. Anche per questa ragione le funzioni che si potevano indagare erano le funzioni algebriche, dal momento che quelle trascendenti erano di fatto intrattabili. Anzi, a ben considerare il titolo della pubblicazione di Leibniz, non erano trattate neppure le funzioni razionali fratte e meno che mai quelle irrazionali.
Newton e Leibniz, pur nella diversità dei loro metodi, non solo trovarono criteri e regole generali di derivazione, applicando le quali si evitava di ricorrere continuamente alla definizione di derivata, cosa che invece erano costretti a fare i loro predecessori, ma mostrarono pure che quelle regole possono essere applicate a tutte le funzioni, comprese quelle trascendenti.
E così:

Dopo Newton e Leibniz il calcolo della derivata di una qualunque funzione è ricondotto a quello di poche derivate fondamentali, mediante il ricorso ad alcune "regole di calcolo".

Ma quei due grandi scienziati fecero anche di più. Prima di loro, **calcolare un integrale comportava una serie di operazioni complicate**, che spesso mettevano in seria difficoltà gli studiosi che si cimentavano nell'impresa e non di rado si trattava di matematici navigati. Oggi noi sintetizziamo tali operazioni nell'espressione seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i \ .$$

I due matematici, l'uno separatamente dall'altro e con metodi diversi, chiarirono che l'integrazione e la differenziazione sono operazioni inverse. Per questo:

---

[2] *Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti, che non si arresta di fronte a quantità frazionarie e irrazionali, e un singolare genere di calcolo per quei problemi*

Il calcolo di un integrale è ricondotto, dopo Newton e Leibniz, alla ricerca di una primitiva della funzione da integrare.

Per la verità, alcuni attribuiscono a Torricelli e Barrow la scoperta di questa fondamentale proprietà dell'analisi matematica. Sembra, infatti, che questi due studiosi fossero consapevoli della relazione inversa che lega i due problemi, perlomeno con riferimento a qualche specifica situazione. E di fatto non è raro veder chiamato tale teorema appunto "teorema di Torricelli-Barrow". Ma, secondo la maggior parte dei critici, è improbabile che Torricelli e Barrow abbiano potuto solo intuire la fondamentale proprietà d'inversione. Ad ogni modo, i primi ad evidenziare in maniera chiara, esplicita e generale il legame inverso fra il problema dell'integrazione e quello della differenziazione furono Newton e Leibniz.

75.3 I CONTINUATORI

75.3.1 Senza indugiare sulla polemica circa la priorità della scoperta del "calcolo", sollevata dai "tifosi" di Newton contro Leibniz e che finì inevitabilmente per coinvolgere i due scienziati, ci piace rilevare che quella polemica un risultato certamente lo ottenne: gli Inglesi, tutti presi dalla passione sportiva che li portava a desiderare di vedere trionfare il loro campione, non si curarono di sviluppare e soprattutto migliorare le idee di Newton, con la conseguenza che in Inghilterra la matematica dopo di lui ristagnò per circa un secolo. Nel continente, invece, i seguaci di Leibniz e tra essi principalmente i due fratelli svizzeri **Bernoulli**, **Jakob** (1654-1705) e **Johann** (1667-1748), volgarizzando le idee e i metodi del maestro, fecero del calcolo infinitesimale uno strumento di ricerca semplice, maneggevole ed estremamente potente, il più formidabile strumento di calcolo mai creato dall'uomo.

Probabilmente le ragioni che favorirono lo svilupparsi del metodo leibniziano, anziché di quello newtoniano, che in fondo erano assai diversi, sono anche altre. Ad esempio, Newton era piuttosto riluttante a divulgare le proprie idee, che spesso non comunicava neanche ai suoi colleghi, mentre Leibniz era impaziente di trasmettere ad altri le sue scoperte. Proprio a questo scopo aveva contribuito a potenziare la rivista *Acta Eruditorum*. Ma soprattutto la notazione di Leibniz era molto più efficace e maneggevole di quella di Newton. Comunque sia, la moderna analisi matematica discende direttamente dalla concezione di Leibniz. Tra l'altro suoi sono i termini *calculus differentialis* e *calculus integralis*, il modo di indicare con dx, dy e $\frac{dy}{dx}$ rispettivamente il differenziale di x, quello di y e la derivata di y rispetto ad x, e inoltre l'uso della esse allungata $\int$ per il simbolo dell'integrale (3).

Detto per inciso, Newton usava il simbolo $\dot{x}(t)$ per indicare la derivata prima di x(t) (derivata dello spazio rispetto al tempo) e con $\ddot{x}(t)$ la derivata seconda: questa modalità è ancora oggi in uso, soprattutto nell'ambito della "Meccanica Razionale" e della "Fisica Matematica".

Fu, dunque, il metodo di calcolo leibniziano che s'impose e ciò, come detto, anche per merito dei suoi seguaci Jakob e Johann Bernoulli attraverso una serie di articoli pubblicati su riviste matematiche e specialmente sugli *Acta Eruditorum*.

[3] Detto per la cronaca, le notazioni $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ sono dovute al matematico italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813).

Fu poi un allievo di Johann, il marchese **Guillome de L'Hôpital** (1661-1704), che pubblicò a Parigi nel 1696 quello che può essere considerato il primo manuale di calcolo differenziale: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

Per la verità, pare certo che il contenuto dell'opera di de L'Hôpital non sia tutta farina del suo sacco, ma molto sia il risultato dell'ingegno di Johann Bernoulli. Questi, infatti, aveva stipulato un contratto con il quale s'impegnava a comunicare al marchese, dietro compenso, tutte le sue scoperte matematiche, lasciandolo libero di farne l'uso desiderato. Il risultato fu, per l'appunto, la pubblicazione dell'*Analyse*, che, avendo avuto fortuna, suscitò la gelosia di Bernoulli e la sua accusa di plagio. A parte questa storia poco edificante, un fatto è certo: l'opera, scritta in maniera scorrevole ed efficace, evidenziò le buone capacità comunicative di de L'Hôpital, che peraltro si era dimostrato un matematico capace, e soprattutto costituì un buon veicolo per la volgarizzazione dell'Analisi. Uno dei teoremi più celebri – il "teorema di de L'Hôpital" – compare in quest'opera.

Contribuì pure, e in misura rilevante, al rapido sviluppo dell'analisi di Leibniz, uno dei matematici più importanti e prolifici della storia, lo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783), con due opere che somigliano molto ai nostri manuali elementari di analisi: il trattato *Institutiones calculi differentialis* (1755) e i tre volumi delle *Institutiones calculi integralis* (1768–1774), preceduti da quella che è considerata da molti la sua opera più importante: l'*Introductio in analysin infinitorum* (1748).

Per merito di questi matematici, i metodi leibniziani furono divulgati e si affermarono piuttosto rapidamente. Ma, nonostante tutto, rimaneva alla base della teoria quel punto molto incerto ed oscuro che suscitava le aspre critiche dei detrattori del calcolo infinitesimale:

Cos'è mai quell'incremento "infinitamente piccolo" su cui poggia tutta la disciplina e che ora è zero e ora non lo è?

Oppure, detto nei termini sarcastici con cui si esprimeva uno dei principali critici del calcolo infinitesimale, pur non negandone l'utilità pratica, il vescovo **George Berkeley** (1685-1753), filosofo inglese, rappresentante tra i più importanti dell'Empirismo, in un opuscolo dal titolo *The Analyst; or a Discourse addressed to Infidel Mathematician* [(4)] (1734):

«*E cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite?*»

Neppure ai tempi di Eulero il problema era ancora risolto, se è vero che il grande matematico svizzero definiva gli infinitesimi, in modo poco convincente, come quantità assolutamente nulle che però devono essere distinte fra loro quando si considerano i loro rapporti reciproci (!?).

75.3.2 La questione dei fondamenti del calcolo infinitesimale rimase in sospeso a lungo, ben oltre un secolo, e fu continuamente oggetto di riflessione dei matematici, i quali si trovavano sempre di fronte al solito dilemma: o un infinitesimo è zero e allora il calcolo infinitesimale è basato su un'operazione che non esiste (appunto la divisione per zero) e quindi è una teoria inconsistente; o non è zero e allora il calcolo infinitesimale è un "banale" metodo di approssimazione. Ma comunque fosse, sorprendeva il fatto che permettesse di giungere a risultati rigorosamente esatti. Qualcuno attribuiva quest'evenienza addirittura alla bontà dell'Onnipotente. È esplicativa, al riguardo, una frase del matematico italo-francese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813):

---

[4] *L'analista, ovvero un discorso rivolto al matematico infedele*.

«*Tale scienza formicola invero di contraddizioni, e se, malgrado ciò, ha condotto a grandi risultati, questo dipende solo dall'infinita clemenza di Dio, il quale dispose che i suoi errori* [della scienza, ovviamente – n.d.A.] *si compensassero l'un l'altro*».

Ogni polemica cessò dopo che il matematico francese **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) diede alla materia un assetto abbastanza rigoroso con la pubblicazione di tre opere: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1822), *Leçons sur le calcul différential* (1829).

In esse Cauchy:

- fornì la definizione di limite;
- definì l'infinitesimo come una variabile numerica che ha per limite zero;
- definì la derivata di una funzione come limite del rapporto incrementale; al riguardo sono sue le notazioni $\Delta y / \Delta x, y'$;
- definì il differenziale di una funzione;
- fornì la definizione di funzione continua;
- stabilì che una funzione derivabile in un punto è ivi continua e che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi integrabile.

Cauchy diede insomma al calcolo infinitesimale quel fondamento logico e quella caratterizzazione che ancora oggi, per lo più, sono accettati e presentati nella maggior parte dei libri di testo. Almeno al livello di uno studio elementare dell'Analisi, qual è in fondo quello che è condotto in una scuola pre-universitaria. Giacché, in effetti, la riflessione sull'analisi non cessò. Tutt'altro. Anzi l'Analisi ebbe in seguito uno sviluppo così specialistico, ma anche così complesso, che solo studi di livello universitario permettono di coglierne l'importanza, non solo all'interno della disciplina ma anche per le applicazioni che essa prospetta in vari campi della scienza, dalla fisica alla biologia, dalla statistica all'economia, eccetera.

Qui ci limitiamo a citare i nomi dei due matematici che contribuirono più d'ogni altro a dotare l'analisi matematica di una base rigorosamente logica: il ceco **Bernhard Bolzano** (1781-1848) ed il tedesco **Karl Weierstrass** (1815-1897).

AVVERTENZA.

Non riteniamo necessaria una sezione verifiche.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. A chi è attribuito il merito di aver costruito la prima derivata di una funzione?
2. Qual è la vera ragione per la quale Newton e Leibniz sono considerati i creatori del calcolo infinitesimale?
3. Per quale motivo il calcolo di Newton e Leibniz era considerato incoerente da coloro che lo criticavano?
4. A chi va attribuito il merito di aver dato una base logicamente rigorosa al calcolo infinitesimale?

RISPOSTE.

1. Il merito va attribuito a Pierre de Fermat.
2. Perché dopo Newton e Leibniz il calcolo della derivata di una qualunque funzione è ricondotto a quello di poche derivate fondamentali, mediante il ricorso ad alcune “regole di calcolo” ed il calcolo di un integrale è ricondotto alla ricerca di una primitiva della funzione da integrare.
3. Il fatto è che tale calcolo era basato su una contraddizione: la divisione per 0.
4. Il merito va attribuito anzitutto a Cauchy che per primo fornì una definizione rigorosa di limite e di infinitesimo. Successivamente un maggior rigore fu introdotto da Bolzano e Weierstrass.

LETTURA.

La cicloide: la regina delle curve.

La linea curva che più d’ogni altra ha suscitato l’interesse dei matematici, in particolare nel corso del XVII secolo, è stata la **cicloide**. È chiamata così la curva descritta da un punto di una circonferenza mentre questa rotola, senza scivolare, lungo una retta (Fig. 3). Praticamente, la linea descritta da un punto di una ruota che gira, rotolando ma senza scivolare su un percorso rettilineo.

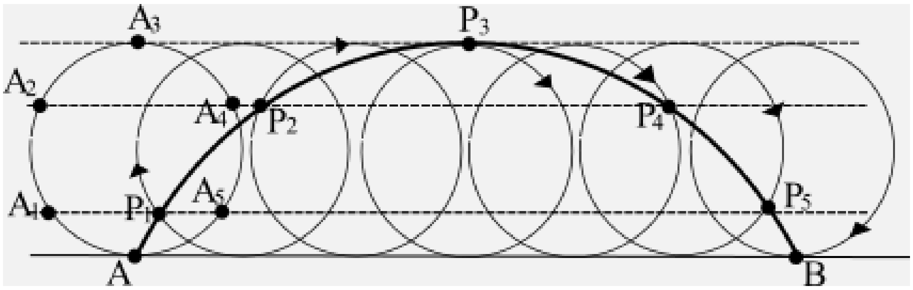

FIG. 3

La storia della cicloide, in ispecie per quanto riguarda la sua origine, è piuttosto controversa.
Allo stato attuale gli storici sembrano orientati ad attribuire al francese Charles de Bovelles (1479-1567 ca.) un primo studio della curva, legato a tentativi di quadrare il cerchio. Egli è autore della prima opera scientifica pubblicata a stampa in lingua francese, nel 1511, dal titolo *Géométrie en françoys*.
Questo orientamento degli storici differisce da quello di qualche tempo prima, allorché la primogenitura di uno studio della cicloide era invece attribuita a Niccolò Cusano (1401-1464), teologo, filosofo e scienziato tedesco. Sembra, infatti, che si sia trattato di una errata attribuzione.
Tutti gli storici della scienza concordano, tuttavia, nell’attribuire a Galileo Galilei (1564-1642), non solo la denominazione che oggi conosciamo della curva, ma anche un primo studio interessante su di essa. Ciò in base ad una lettera del 24 febbraio 1640, inviata da Galileo a Bonaventura Cavalieri, nella quale lo scienziato pisano illustrava la *curvità graziosissima* della cicloide.
Della curva si occuparono poi, in tempi diversi, numerosi matematici, più o meno grandi, fra i quali Torricelli, Cartesio, Pascal, Fermat, Mersenne, Huygens, Roberval, Newton, Leibniz, Jakob e Johann Bernoulli.

Questi studiosi scoprirono tante proprietà della curva, e così interessanti, da fare ritenere la cicloide "la regina di tutte le curve" o, come anche è stata definita, "la bella Elena dei geometri".
Prima di occuparci di alcune di tali proprietà, soffermiamoci sull'equazione della curva. Per questo riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), in modo che l'asse x coincida con la retta sulla quale rotola la circonferenza, mentre il diametro di questa, perpendicolare all'asse x, nella sua posizione iniziale, sia l'asse y. Cosicché l'origine O degli assi coincide con il punto A che descriverà la cicloide (Fig. 4).
Indichiamo adesso con R il raggio della circonferenza e con P(x,y) la posizione che assume il punto A dopo che la circonferenza ha ruotato di un angolo di φ radianti, allorché il punto di contatto della circonferenza con la retta su cui rotola si è portato in L, mentre il suo centro H si è spostato in K. Si ha pertanto: $\varphi = L\widehat{K}P$ e $AL = R\varphi$, avendo il segmento AL la medesima lunghezza dell'arco LP, che misura appunto $R\varphi$.

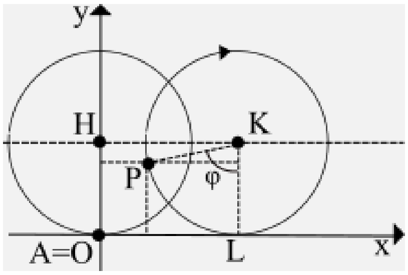

FIG. 4

Dopo un breve ragionamento si trovano le equazioni parametriche della cicloide:

$$x = R\,\varphi - R\sin\varphi\,, \quad y = R - R\cos\varphi\,.$$

Al variare del parametro φ fra 0 e 2π, si possono trovare quanti punti si vogliono della cicloide e disegnarne l'andamento.
Si capisce poi che si tratta di una curva periodica, il cui periodo è uguale alla lunghezza della base della cicloide (Fig. 5). Nelle prossime righe, quando parleremo di cicloide, ci riferiremo in realtà all'arco di essa relativo appunto ad un periodo.

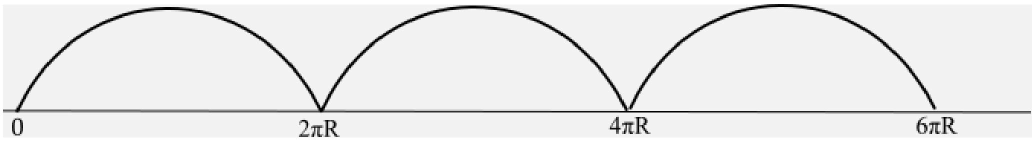

FIG. 5

Le proprietà più evidenti della cicloide sono le seguenti:
- La sua base AB, come su accennato, è lunga tanto quanto la circonferenza che la genera, ovvero 2πR. Questa proprietà fu segnalata per la prima volta da Marin Mersenne (5).
- L'altezza massima della cicloide è uguale al diametro della circonferenza che la genera, vale a dire 2R.

Molto meno evidenti, anzi per nulla immediate, sono le proprietà che forniscono la lunghezza della cicloide e l'area sotto il suo grafico:
- La lunghezza della cicloide è 8 volte il raggio della circonferenza che la genera, vale a dire 8R. Proprietà dimostrata per la prima volta da Christopher Wren (6) nel 1658.

[5] **Mersenne**, Marin, abate francese, matematico per diletto, amico di Cartesio e Fermat, 1588-1648.
[6] **Wren**,Christopher, matematico inglese, 1632-1723.

- L'area sotto il grafico della cicloide è tre volte l'area del cerchio che la genera (Fig. 6). Chi fornì una prima dimostrazione di questa proprietà fu Roberval [7] nel 1634.
  Detto per curiosità, Galileo Galilei fece qualche tentativo di tipo sperimentale per calcolare tale area. Lo riferisce egli stesso nella succitata lettera a Cavalieri: *Feci sopra di essa* (la cicloide, N.d.A.), *e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso* (il sottografico della cicloide, N.d.A.)*, diversi tentativi [...] e parvemi in principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta*. Sembra che Galileo abbia riprodotto su lamine lo spazio sotto la cicloide e il cerchio che la genera e abbia pesato i due pezzi, ottenendo che il peso del primo pezzo fosse circa 3 volte, ma non esattamente 3 volte, quello del secondo. Errori di sperimentazione evidentemente lo hanno fuorviato, facendogli trarre una conclusione non corretta.

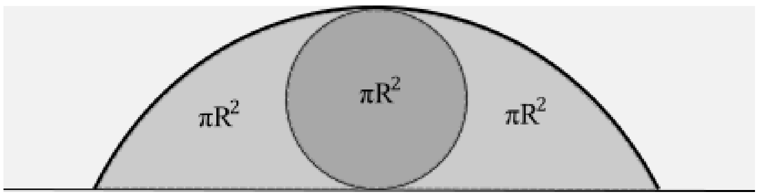

FIG. 6

Decisamente più interessanti, ma anche più importanti per i loro coinvolgimenti in Fisica, sono due altre proprietà della cicloide: l'essere, essa, una curva "tautocrona" e "brachistocrona":

- *Tautocrona* è una parola composta da due termini greci: ταύτὸς (*tautos*, *stesso*) e χρόνος (*chronos*, *tempo*); significa perciò "lo stesso tempo". In effetti, la cicloide è proprio una curva ***tautocrona***. E questa ne è la spiegazione: situata la curva in un piano verticale con la concavità rivolta verso l'alto (Fig. 7) e collocate su di essa, in posizioni distinte, due palline che vengono lasciate cadere contemporaneamente in caduta libera (cioè sotto la sola azione della forza di gravità), esse raggiungono il punto più basso M della cicloide *nello stesso tempo*.
  Questa proprietà della cicloide fu scoperta nel 1673 da Christian Huygens.

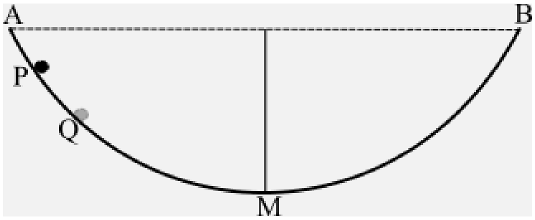

FIG. 7

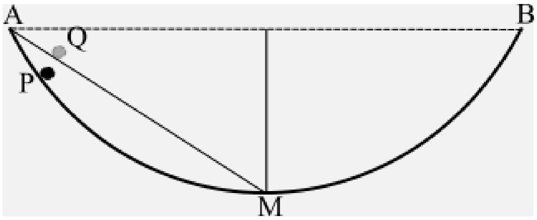

FIG. 8

- Anche *brachistocrona* è una parola composta da due termini greci: βράχιστος (*brachistos*, *il più breve*) e χρόνος (*chronos*, *tempo*); significa perciò "il tempo più breve". In effetti, la cicloide è pure una curva ***brachistocrona***. E questa ne è la ragione: situata in un piano verticale con la concavità rivolta verso l'alto (Fig. 8) e lasciate cadere dallo stesso punto A due palline in caduta libera, una P lungo la cicloide e la seconda Q lungo un'altra qualsiasi curva che congiunge i punti A ed M (per esempio una retta, come in figura, ma anche un arco di circonferenza o di parabola o altro), ebbene arriverà per prima nel punto più basso M della cicloide la pallina che cade lungo la cicloide.

La storia della brachistocrona merita qualche parola in più per un breve approfondimento.

---

[7] **Roberval**, Gilles Personne (de), matematico francese, 1602-1675.

Il problema di trovare la forma che deve avere una linea curva affinché il tempo di caduta libera lungo di essa sia il più breve possibile è stato preso in esame per la prima volta nel XVII secolo da Galileo Galilei. Ma egli non fornì la soluzione corretta. Affermava infatti [(8)]: *il movimento più veloce da un estremo* (A) *ad un estremo* (M) *non avviene lungo la linea più breve, cioè la retta, ma* ***lungo un arco di cerchio***. (E non *lungo un arco di parabola*, come alcuni erroneamente gli fanno dire). Insomma, Galileo intuì e dimostrò che non fosse la retta la linea cui corrispondeva il minor tempo di caduta (ovviamente una caduta non verticale), giacché il cerchio determinava un tempo minore. Solo che questo tempo non era il minimo, contrariamente a quanto da lui sostenuto.
Qualche anno dopo Christian Huygens dimostrò che la soluzione di Galileo era effettivamente errata, ma neppure lui riuscì a trovare la soluzione corretta.
Il problema fu ripreso da Johann Bernoulli, il quale nel 1696 lo propose come sfida ai matematici dell'epoca con una breve nota sugli *Acta Eruditorum*.
Quasi subito il fratello Jakob pubblicò la soluzione sulla medesima rivista, utilizzando i metodi infinitesimali di Leibniz e aprendo il campo, con il suo lavoro, ad un'importante area dell'analisi matematica denominata *calcolo delle variazioni*.
Anche Newton fornì una sua soluzione, essa pure corretta, ma, a causa dei dissidi con Leibniz e i suoi seguaci per la nota disputa sulla priorità della creazione del calcolo infinitesimale, forse per non dare soddisfazione a Johann Bernoulli, non firmò l'articolo che se ne occupava. Ma Johann, una volta letto l'articolo, capì perfettamente e non ebbe dubbi sul suo autore. Pare che abbia così commentato: «Riconosco il leone dai suoi artigli».

---

[8] Cfr.: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, giornata terza, scolio alla proposizione 36.