Prerequisiti:
- Calcolare limiti, derivate e semplici integrali.
- Studio di una funzione
- Progressioni geometriche. Successioni

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono essere in grado di:

- *approssimare funzioni periodiche mediante sviluppi in serie di Fourier*
- *utilizzare le conoscenze sulle serie di Fourier in fisica o in altre scienze*
- *definire una serie numerica*
- *distinguere fra serie numeriche convergenti, divergenti e indeterminate*
- *applicare consapevolmente i criteri di convergenza studiati*
- *calcolare il valore esatto o un valore approssimato di una serie numerica mediante l'uso di strumenti informatici*

Il primo paragrafo di questa unità (n. 77.1), il cui studio è previsto nel 2° biennio, è rivolto ai seguenti indirizzi dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico:
- **Meccanica, Meccatronica ed Energia.**
- **Elettronica ed Elettrotecnica.**
- **Informatica e Telecomunicazioni.**
- **Costruzioni, Ambiente e Territorio.**

Gli altri due paragrafi (n. 77.2 e n. 77.3) sono opzionali e sono rivolti in particolare ai Licei Scientifici.

Cenni sulle serie
Unità 77

77.1 SERIE DI FOURIER

77.1.1 Nell'unità 67 abbiamo trattato della possibilità di sviluppare una data funzione reale di variabile reale f(x) in serie di potenze di x (serie di Taylor e serie di McLaurin).

Quello sviluppo, com'è noto, è subordinato all'illimitata derivazione di f(x) in un certo intervallo. Di modo che se la funzione avesse dei punti di discontinuità (Figg. 1-2) o dei punti angolosi (Fig. 3) non potrebbe essere sviluppata in serie di Taylor, perlomeno in un intervallo in cui questi punti singolari sono presenti. Anche una funzione siffatta tuttavia può essere sviluppata in serie, sotto particolari condizioni, una delle quali è che la funzione sia *periodica, limitata e monotona a tratti*. Come di fatto lo sono le funzioni rappresentate nelle figure 1, 2 e 3, tutte periodiche con periodo 2π e tutte rappresentate in 3 periodi.

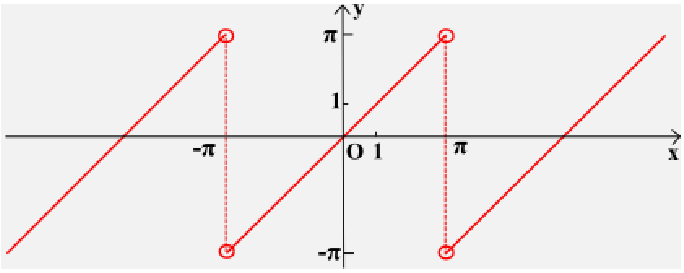

FIG. 1

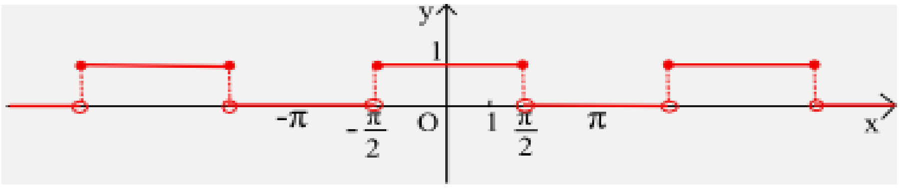

FIG. 2

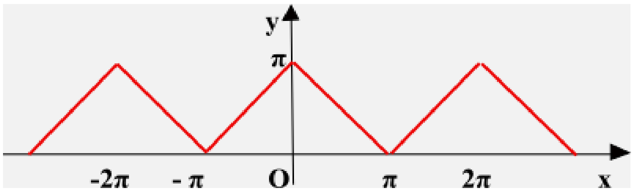

FIG. 3

Detto per completezza, le tre funzioni, **tutte periodiche con periodo 2π** com'è stato detto, sono tali che, per $-\pi\leq x\leq\pi$ risulti, per la prima (Fig. 1):

$$f(x)=x \quad \text{per } -\pi<x<\pi$$

per la seconda (Fig. 2):

$$f(x)=\begin{cases} 1 \ \text{ per } -\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \ \text{ per } \dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi \ \text{ e } -\pi\leq x<-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

per la terza (Fig. 3):

$$f(x)=\begin{cases} \pi+x \quad \text{per } \ -\pi\leq x<0 \\ \pi-x \quad \text{per } \ 0\leq x<\pi \end{cases}$$

Ebbene, una funzione periodica f(x), a certe condizioni, può essere rappresentata da uno sviluppo in serie di funzioni, similmente a quanto visto con la serie di Taylor. In tal caso però si tratta di una serie di seni e coseni, avente questa forma:

[1] $$F(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ,$$

ossia, per esteso:

$$F(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots\ .$$

È nota come **serie di Fourier** [1] della funzione f(x). In essa i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, …– detti *coefficienti di Fourier* – sono dati dalle seguenti formule:

[2] $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Per la verità, non è assicurato che la serie di Fourier [1] abbia come somma un numero reale, e che questo numero sia proprio f(x). Se questo, tuttavia, accade si dice che la funzione f(x) è **sviluppabile** in serie di Fourier.

Il seguente teorema fornisce una **condizione sufficiente** affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Fourier.

TEOREMA (di Dirichlet-Dini [2]). Se una funzione f(x) è periodica con periodo 2π e se per $-\pi<x<\pi$ essa è limitata, con un numero finito sia di massimi e minimi locali sia di punti di discontinuità, allora la sua serie di Fourier F(x) converge verso f(x) in tutti i punti in cui f(x) è continua e converge verso la media aritmetica dei limiti destro e sinistro in ogni punto di discontinuità interno all'intervallo $-\pi<x<\pi$; invece sia in $-\pi$ sia in π converge verso la media aritmetica dei limiti seguenti: $\lim_{x\to-\pi^+}f(x)$ e $\lim_{x\to\pi^-}f(x)$.

77.1.2 Un paio di considerazioni sulle funzioni sviluppabili in serie di Fourier.

- Constatato che l'equazione $y=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ rappresenta un moto armonico semplice di periodo $\frac{2\pi}{n}$, la serie [1] può essere concepita come la somma di infiniti moti armonici.
  Di modo che, dire che una funzione f(x) è sviluppabile in serie di Fourier equivale ad affermare che il moto periodico rappresentato dall'equazione y=f(x) può essere decomposto in infiniti moti armonici.
- Un'altra considerazione relativa al calcolo dei coefficienti di Fourier per alcune funzioni speciali.
  Se f(x) è una funzione pari, cioè se $f(-x)=f(x)$, ogni funzione $H(x)=f(x)\cos(nx)$ è anch'essa pari, mentre ogni funzione $K(x)=f(x)\sin(nx)$ è dispari.
  Se f(x) è una funzione dispari, cioè $f(-x)=-f(x)$, ogni funzione $H(x)=f(x)\cos(nx)$ è anch'essa dispari, mentre ogni funzione $K(x)=f(x)\sin(nx)$ è pari.
  Infatti, nel primo caso:
  $$H(-x)=f(-x)\cos(-nx)=f(x)\cos(nx)=H(x),$$
  $$K(-x)=f(-x)\sin(-nx)=f(x)(-\sin(nx))=-f(x)\sin(nx)=-K(x);$$
  nel secondo:

[1] **Fourier**, J. B. Joseph, matematico francese, 1768–1830.

[2] **Dirichlet**, Peter Gustav Lejeune, matematico tedesco, 1805-1859; **Dini**, Ulisse, matematico italiano, 1845-1918.

$$H(-x)=f(-x)\cos(-nx)=-f(x)\cos(nx)=-H(x),$$
$$K(-x)=f(-x)\sin(-nx)=-f(x)(-\sin(nx))=f(x)\sin(nx)=K(x).$$

Questi fatti hanno un significato geometrico importante. Precisamente:

a) il grafico di ogni funzione $f(x)\cos(nx)$ è simmetrico:
   - rispetto all'asse y, se $f(x)$ è una funzione pari,
   - rispetto all'origine O, se $f(x)$ è una funzione dispari;

b) il grafico di ogni funzione $f(x)\sin(nx)$ è simmetrico:
   - rispetto all'origine O, se $f(x)$ è una funzione pari,
   - rispetto all'asse y, se $f(x)$ è una funzione dispari.

Cosicché, ricordando il significato geometrico di un integrale definito, s'intuisce facilmente che, **se f(x) è una funzione par**i, deve essere:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0;$$

e pertanto:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,, \qquad b_n = 0\,.$$

Al contrario, **se f(x) è una funzione dispari**, risulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,$$

e pertanto:

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

77.1.3 Le tre funzioni con le quali abbiamo incominciato questo discorso soddisfano alle condizioni del teorema di Dirichlet-Dini e pertanto sono sviluppabili in serie di Fourier:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$

- In particolare, riguardo alla prima funzione (Fig. 1):

  $$f(x)=x \quad \text{per} \ -\pi < x < \pi$$

  e soprattutto alla sua estensione periodica (con periodo 2π) a tutto $\mathbb{R}$, siccome chiaramente la funzione è dispari, ogni a_n (compreso a_0) è nullo; quindi si ha:

  $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin(nx)\right) \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\ \sin(nx)\,dx\,.$$

NOTA BENE 1. Per il calcolo dell'integrale $\int x\sin(nx)\,dx$ c'è un metodo idoneo chiamato *metodo d'integrazione per parti*. Qualora questo metodo non fosse stato ancora studiato ti suggeriamo di ricorrere ad un idoneo software matematico per il calcolo di quest'integrale indefinito o addirittura dell'integrale definito $\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$. Allo stesso modo procederai per gli integrali con cui avrai a che fare negli esercizi che ti proponiamo in seguito e che non riesci a trovare in modo immediato. Noi intanto ti forniamo il risultato dell'integrale in questione.

Si ha:

$$\int x\sin(nx)\,dx=-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\,;$$

di conseguenza:

$$\int_0^{\pi} x\ \sin(nx)\,dx=\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\,;$$

perciò:

$$b_n=-\frac{2}{n}\cos(n\pi)\,.$$

In definitiva:

[3] $$F(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos(n\pi)\sin(nx)\right).$$

E perciò, arrestando lo sviluppo al termine che si ottiene per n=4 (Fig. 4):

[4] $$F(x)\approx 2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x\right).$$

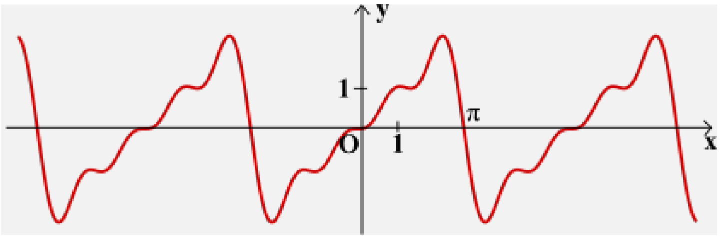

FIG. 4

NOTA BENE 2. Il passaggio dalla formula [3] allo sviluppo [4] è stato ottenuto ricorrendo ad un idoneo software matematico. Lo stesso criterio sarà seguito in tutti gli esempi che seguono.
Qui vogliamo però far notare, per inciso, come sia possibile eseguire quel passaggio operando solamente con carta e penna. Cosa che bisognava fare comunque quando non c'era ancora il calcolo automatico. Al riguardo basta fermare l'attenzione sull'espressione di b_n e constatare che $\cos n\pi=1$ se n è pari, mentre $\cos n\pi=-1$ se n è dispari. In altri termini: $\cos n\pi=(-1)^n$. Ragion per cui b_n può essere scritto nella forma seguente:

$$b_n=(-1)^n\left(-\frac{2}{n}\right).$$

Pertanto si ha:

$$F(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\left(-\frac{1}{n}\right)\sin(nx)\right).$$

Il passaggio da questa formula allo sviluppo [4] è immediato.
Ad onor del vero, le cose non sono sempre così semplici, ma questa è l'idea.

- Riguardo alla seconda funzione (Fig. 2):

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ se } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 \text{ se } \frac{\pi}{2}<x\le\pi \text{ e } -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

e soprattutto alla sua estensione periodica (con periodo 2π) a tutto $\mathbb{R}$, siccome si tratta di una funzione pari, tenendo presente la seconda delle [2], ogni b_n è nullo; quindi si ha:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx))$$

dove, per la prima delle [2]:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,.$$

D'altronde, tenendo presente la definizione di f(x):

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx\ ;$$

di modo che:

$$\text{se } n=0:\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = 1; \quad \text{se } n>0:\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}[\sin(nx)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ ;$$

infine:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos(nx)\right).$$

E perciò, arrestando lo sviluppo al termine che si ottiene per n=7 (Fg. 5):

$$F(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x\,.$$

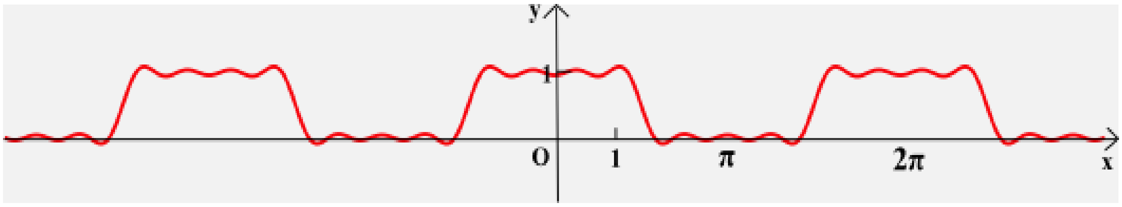

FIG. 5

- Riguardo alla terza funzione (Fig. 3):

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{per } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x & \text{per } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

e soprattutto alla sua estensione periodica (con periodo 2π) a tutto $\mathbb{R}$, siccome si tratta di una funzione pari, come nel caso precedente, tenendo presente la seconda delle [2], ogni b_n è nullo; quindi si ha:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx))$$

dove, per la prima delle [2] e tenendo presente la definizione della funzione:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx\,.$$

Ora, per n=0 risulta:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

mentre per n>0:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)\sin(nx)}{n} - \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right)$$

Pertanto:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(1-\cos(n\pi))\cos(nx)\right).$$

E perciò, arrestando lo sviluppo al termine che si ottiene per n=5 (Fig. 6):

$$F(x) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{4}{25\pi}\cos 5x \ .$$

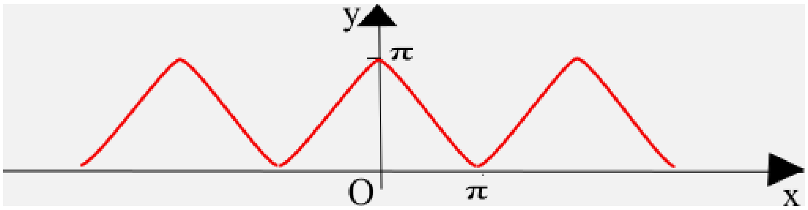

FIG. 6

77.1.4 A volte il periodo della funzione non è 2π, ma un qualunque reale positivo 2T. In tal caso ci si può sempre ricondurre ad una funzione periodica con periodo 2π.

A questo riguardo sia f(t) una funzione periodica con periodo 2T. Questo, lo ricordiamo, significa che f(t+2T)=f(t).

Posto allora: $t=\frac{T}{\pi}x$, da cui: $x=\frac{\pi}{T}t$, si ha: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, e perciò:

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{T}t\right)=f\left(\frac{\pi}{T}(t+2T)\right)=f\left(\frac{\pi}{T}t+2\pi\right)=f(x+2\pi).$$

In questo modo, la funzione f(t), periodica con periodo 2T, è ricondotta alla funzione f(x), periodica con periodo 2π. E per essa valgono tutte le considerazioni già fatte. Si dimostra, in particolare, che la serie di Fourier della funzione f(x) assume la forma seguente:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi}{T}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi}{T}nx\right)\right),$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{T}nx\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{T}nx\right)dx.$$

- ESEMPIO 1. Sia la funzione:

  $$f(x)=x \ \text{ per } -1<x<1$$

  estesa periodicamente, con periodo 2, a tutto ℝ (Fig. 7).

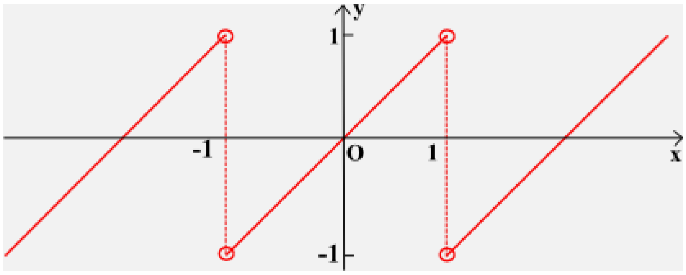

FIG. 7

In base a quanto detto sopra ed in considerazione del fatto che si tratta di una funzione dispari, la serie di Fourier della funzione f(x) diventa:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(\pi n x)) \quad \text{dove} \quad b_n = 2\int_0^1 x \sin(\pi n x)\, dx\,,$$

essendo nullo ogni a_n e quindi anche a_0 ed essendo T=1.

Siccome, a conti fatti, si trova:

$$b_n = 2\left[-\frac{1}{\pi n} x\cos(\pi n x) + \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n) - \frac{2}{\pi n}\cos(\pi n)\,,$$

allora si ha:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin(\pi n) - \frac{2}{\pi n}\cos(\pi n)\right)\sin(n\pi x)\right).$$

E perciò, arrestando lo sviluppo al termine che si ottiene per n=4 (Fig. 8):

$$F(x) \approx \frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi x) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(4\pi x)\right).$$

Invitiamo a confrontare questa funzione con quella studiata nel primo degli esempi riportati nel paragrafo 77.1.3.

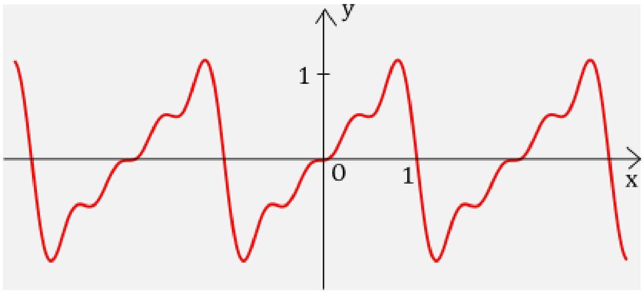

FIG. 8

- Esempio 2. Sia la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \ \text{ se } \ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2} \\ 0 \ \text{ se } \ \frac{1}{2}<x\le 1 \ \text{ e } \ -1<x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

estesa periodicamente, con periodo 2, a tutto ℝ (Fig. 9).

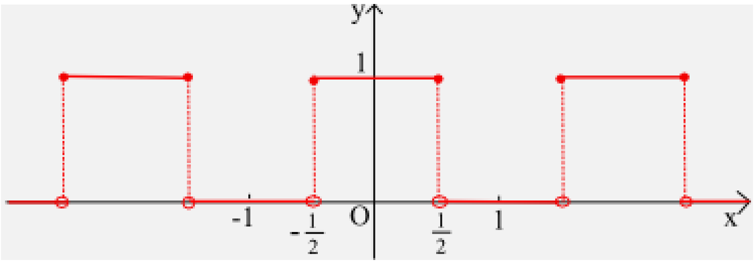

FIG. 9

In base a quanto detto sopra ed in considerazione del fatto che si tratta di una funzione pari, la serie di Fourier della funzione f(x) diventa:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\pi n x))$$

dove, tenendo anche presente la definizione della funzione f(x):

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(\pi n x)\,dx = 2\int_0^{1/2}\cos(\pi n x)\,dx\,,$$

essendo nullo ogni b_n ed essendo T=1.

Siccome, a conti fatti, si trova:

$$\text{per } n{=}0:\ a_0{=}2\int_0^{1/2}dx{=}1;\quad \text{per } n{>}0:\ a_n{=}2\int_0^{1/2}\cos(\pi n x)\,dx = \frac{2}{n\pi}[\sin(\pi n x)]_0^{1/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ ;$$

infine:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos(\pi n x)\right).$$

E perciò, arrestando lo sviluppo al termine che si ottiene per n=7(Fig. 10):

$$F(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{3}\cos(3\pi x) + \frac{1}{5}\cos(5\pi x) - \frac{1}{7}\cos(7\pi x)\right).$$

Invitiamo a confrontare questa funzione con quella studiata nel secondo esempio esaminato in 77.1.3

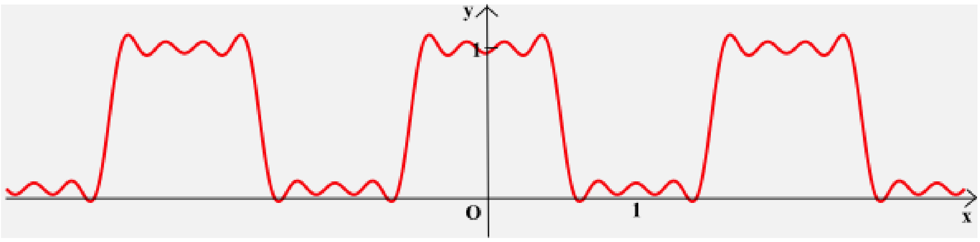

FIG. 10

77.2 SERIE NUMERICHE: GENERALITÀ.

77.2.1 In questa unità, nel paragrafo 77.1, ci siamo occupati di alcune particolari serie di funzioni. In una unità precedente (unità 67, paragrafo 67.3) abbiamo accennato ad altre particolari serie di funzioni. Il discorso sulle serie di funzioni potrebbe essere approfondito, ma riteniamo che non sia il caso. Vogliamo invece fare un cenno alle serie numeriche, cioè a quelle serie i cui termini sono numeri anziché funzioni.

In realtà, né le Indicazioni Nazionali (Licei) né le Linee Guida (Tecnici e Professionali) contemplano lo studio di quest'argomento. Ce ne occupiamo a beneficio solamente dei Licei Scientifici dal momento che in precedenti simulazioni sulla prova d'esame, proposte dal MIUR, erano presenti esercizi riguardanti proprio le serie numeriche.

Poi deciderà il docente quale rilievo dare a questo argomento ed a quale livello di approfondimento svilupparlo. Noi, ad ogni buon conto, ne tratteremo per sommi capi.

Consideriamo allora la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}\,,$$

ossia, scritta per esteso, la successione:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\,,\ \frac{1}{2\cdot 3}\,,\ \frac{1}{3\cdot 4}\,,\dots,\frac{1}{n(n+1)}\,,\dots.$$

Prendendola come base di partenza, possiamo costruire una seconda successione, i cui termini sono i seguenti:

$S_1 = a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$,

$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$,

$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}$,

………………………………………….. ,

$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$,

…………………………………………. .

Questa nuova successione:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

si chiama “serie” associata alla successione (a_n).

In generale, considerata una successione (a_n), si chiama successione delle *somme parziali* (o *ridotte*) *n-esime* (o *di ordine n*) della serie la successione (S_n), il cui termine generale è

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La somma di tutti i termini della successione

[5] $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

o anche, sinteticamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è definita come il limite $\lim_{n\to\infty} S_n$, ed è detta ***serie numerica*** associata alla successione (a_n); il generico a_n è detto *termine generale* della serie.

Ti proponiamo per esercizio di calcolare le somme parziali dei primi 4 ordini della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sapendo che:

$$\text{a)}\ a_n = \frac{2n-1}{n+1};\quad \text{b)}\ a_n = \frac{n}{n!};\quad \text{c)}\ a_n = \frac{2^n}{n!};\quad \text{d)}\ a_n = (-1)^n \frac{1}{n};\quad \text{e)}\ a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

77.2.2 L’aver indicato una serie col simbolo [5] può indurre a credere erroneamente che essa sia comunque un numero. Cosa che invece non è, o perlomeno non lo è sempre, come mostrano le considerazioni che seguono.

La successione (S_n) delle somme parziali può essere – come tutte le successioni del resto – convergente, divergente o indeterminata.

Corrispondentemente la serie si dice *convergente*, *divergente* o *indeterminata*.

In altri termini, una serie è convergente quando esiste finito il limite di S_n per $n\to\infty$.

Questo limite – che supponiamo uguale ad S – si dice **somma della serie** e si scrive, ma solo in questo caso:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S\,.$$

Negli altri casi, in cui il limite di S_n per $n \to \infty$ è infinito o indeterminato, per cui la serie è divergente o indeterminata, non ha senso parlare di somma della stessa.

ESEMPIO 1. Riprendiamo la serie con cui abbiamo introdotto l'argomento:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

nota come **serie di Mengoli** [3].
Consideriamo la sua ridotta n-esima:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}.$$

Osserviamo che, essendo: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, la somma S_n diventa:

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

ossia, dopo aver eliminato i termini opposti:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

E si capisce subito che risulta: $\lim_{n\to\infty} S_n=1$.

Cosicché possiamo concludere che la serie di Mengoli converge e la sua somma vale 1. Dunque ha senso scrivere:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots = 1.$$

ESEMPIO 2. Anche questa serie:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!},$$

conosciuta come **serie di Bernoulli** [4], converge al valore 1.

Te ne proponiamo la dimostrazione per esercizio. Ti suggeriamo di osservare che il termine generale può essere scritto in un modo che ricorda in un certo senso quello della serie di Mengoli.

ESEMPIO 3. Consideriamo adesso la serie seguente:

$$1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}2^n.$$

La sua ridotta n-esima è:

$$S_n=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}.$$

Si tratta della somma di n termini in progressione geometrica, di ragione 2 e di primo termine 1. Per cui si ha:

$$S_n=1\cdot\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1.$$

Evidentemente: $\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$.

Pertanto la serie in esame diverge (positivamente) e perciò non ha senso parlare della sua somma.

---

[3] **Mengoli**, Pietro, matematico di Bologna, 1625-1686.
[4] **Bernoulli**, Johann, matematico svizzero, 1667-1748.

ESEMPIO 4. Riguardo alla serie seguente:

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots,$$

si osserva facilmente che le sue somme parziali assumono alternativamente i valori 1 e 0. Cosicché è immediato concludere che essa è indeterminata.
Neanche adesso ha senso parlare di somma della serie.

ESEMPIO 5. Consideriamo infine la serie seguente:

$$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n+\cdots,$$

dove a è un numero reale assegnato. È nota come **serie geometrica** di ragione a. Generalizza l'esempio 3, che difatti è un caso particolare di questa serie: basta porre a=2.

Affidiamo a te il compito di dimostrare che:
- se $a\geq 1$ la serie diverge (positivamente);
- se $-1<a<1$ la serie converge al valore $\dfrac{1}{1-a}$;
- se $a\leq -1$ la serie è indeterminata.

ESERCIZIO.

Determinare il carattere della seguente serie (stabilire, cioè, se è convergente, divergente o indeterminata) ricorrendo al limite della sua ridotta n-esima:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\sqrt{2}\right)^n$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

77.2.3 Supponiamo ora che la serie [5] sia convergente. Indicate con S la sua somma e con S_n la sua ridotta n-esima, poniamo:

$$R_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\ .$$

Otteniamo chiaramente una nuova serie: è chiamata **serie resto n-esimo** della serie data.
Si constata immediatamente che:

$$\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=S-S=0\,.$$

Questo significa che, per ogni $\varepsilon>0$, esiste un indice $\bar{n}$ tale che per ogni $n>\bar{n}$ risulta:

$$|R_n|<\varepsilon \quad \text{ovvero} \quad |S-S_n|<\varepsilon\,.$$

Di conseguenza, se come somma di una serie convergente si assume il valore della sua ridotta n-esima, si commette un errore pari ad R_n. Errore che può essere reso piccolo quanto si vuole: basta scegliere n opportunamente grande.
Per la verità, all'atto pratico, questa scelta "opportuna" comporta delle serie difficoltà, su cui però non possiamo soffermarci. Ci limitiamo soltanto ad osservare che tanto più grande è n tanto minore è l'errore $|R_n|$ che si commette nell'assumere S_n come valore approssimato della somma S della serie convergente.
A titolo di esempio, con riferimento alla serie di Mengoli, la cui somma, lo ricordiamo, è S=1, bisogna prendere:
- n=10 affinché il valore di S_n differisca da S per meno di 1/10,
- n=100 affinché il valore di S_n differisca da S per meno di 1/100;

di fatto: $S_{10}\approx 0{,}91$; $S_{100}\approx 0{,}9901$.
Invece, con riferimento alla serie di Bernoulli, in cui ancora S=1, basta prendere:
- n=3 affinché il valore di S_n differisca da S per meno di 1/10,

- $n=4$ affinché il valore di S_n differisca da S per meno di $1/100$;

di fatto: $S_3 \approx 0{,}96$; $S_4 \approx 0{,}992$.

77.3 SERIE NUMERICHE: CRITERI DI CONVERGENZA.

77.3.1 Per decidere se una serie è convergente o no, possono risultare utili, in molte situazioni, alcune proprietà. A parte un paio di esse, che in via eccezionale dimostreremo, di tutte le altre forniremo il solo enunciato e qualche semplice applicazione.

♦ TEOREMA 1.
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora il suo termine generale a_n tende a 0 quando $n \to \infty$.

DIMOSTRAZIONE. Detta S la somma della serie, è evidentemente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S\,.$$

Sicché, essendo $a_n = S_{n+1} - S_n$, risulta:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0\,.$$

Per esempio, con riferimento alla serie di Mengoli, che sappiamo essere convergente, il suo termine generale $\frac{1}{n(n+1)}$ tende a 0 quando $n \to \infty$.

Da questo teorema, considerando il suo contronominale, ne segue un altro, che può essere considerato una specie di criterio (una condizione sufficiente) per riconoscere quando una serie non converge:

♦ TEOREMA 2.
Se il termine generale a_n della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non tende a 0 quando $n \to \infty$ allora la serie non converge.

Per esempio, la serie geometrica di ragione $a>1$ ha il termine generale a_n che non tende a 0 quando $n \to \infty$ (in effetti: $a_n \to +\infty$). Cosicché essa non converge. Di fatto, come sappiamo, diverge positivamente.

73.3.2 Una serie a termini di uguale segno non può essere indeterminata, dal momento che la successione delle sue somme parziali è monotona. Per cui si possono verificare due alternative: o la serie converge o diverge; e il verificarsi di una di esse esclude l'altra.

Enunciamo alcuni utili criteri di convergenza delle serie a termini di uguale segno (in particolare delle serie a termini non negativi) e ne vediamo qualche applicazione.

● CRITERIO DEL CONFRONTO (O DI GAUSS [5]):
Siano due serie a termini non negativi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Ammesso che esista un indice n_0 tale che per ogni $n>n_0$ risulti $a_n \le b_n$ allora: a) se la prima serie diverge anche la seconda diverge; b) se la seconda serie converge anche la prima converge.

ESEMPIO 1. Vogliamo applicare questo criterio per decidere della convergenza o meno della seguente serie:

[6] $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

[5] **Gauss**, Carl Friedrich, matematico tedesco, 1777-1855.

nota come **serie armonica**.
A questo riguardo, assieme ad essa consideriamo quest'altra serie:

[7] $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Indicato con a_n il termine generale della serie [7] e con b_n quello della serie [6], è evidente che risulta $a_n \leq b_n$. D'altra parte la serie [7], dopo aver sommato le frazioni con lo stesso denominatore (dopo il numero 1, una frazione ha denominatore 2; 2 hanno denominatore 4; 4 hanno denominatore 8; 8 hanno denominatore 16; …; 2^{n-1} hanno denominatore 2^n), può essere scritta in questo modo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots$$

e la ridotta S_n di questa nuova serie vale:

$$S_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}\ ;$$

ed è evidentemente: $\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$. Se ne desume che la serie [7] diverge. Quindi, per il criterio di confronto, diverge pure la serie [6], cioè la serie armonica.

ESEMPIO 2. Considerata la serie:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

ti invitiamo a dimostrare che diverge.

ESEMPIO 3. Occupiamoci adesso della serie:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Confrontiamola, termine a termine, con la serie di Mengoli che, per comodità, scriviamo così:

$$0+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots\ .$$

Si può notare che, a partire dal 2° termine di ciascuna delle due serie, ogni termine della serie di Mengoli è maggiore del corrispondente termine della serie assegnata. Siccome la serie di Mengoli è convergente, anche la serie assegnata lo è.
Naturalmente tutto ciò non ci dice però a quale valore converge la serie considerata.

● CRITERIO DEL RAPPORTO (O DI D'ALEMBERT [6]):
Sia la serie a termini positivi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ammesso che per $n\to\infty$ il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ abbia limite q (naturalmente $q\geq 0$), allora: a) se $q<1$ la serie converge; b) se $q>1$ la serie diverge.

Il criterio non fornisce indicazioni quando $q=1$, nel qual caso la serie può essere convergente o divergente (ma non indeterminata).

ESEMPIO 4. Applichiamo questo criterio per decidere della convergenza o meno della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}.$$

Risulta:

---

[6] **D'Alembert**, Jean Le Rond, scienziato e matematico parigino, 1717-1783.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}\ ;$$

e perciò:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}\right]=0\ .$$

Ne discende che la serie considerata è convergente.

Quanto esposto, in ogni caso, non fornisce informazioni sul valore cui la serie converge.

ESEMPIO 5. Ti proponiamo per esercizio di mostrare che il criterio del rapporto non dà indicazioni circa la convergenza o meno della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\ .$$

Trova, se puoi, qualche altro modo per giustificare che la serie diverge.

● CRITERIO DELLA RADICE (o DI CAUCHY [7]):
Sia la serie a termini positivi: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Ammesso che per $n\to\infty$ la radice $\sqrt[n]{a_n}$ abbia limite r (naturalmente $r\geq 0$), allora: a) se $r<1$ la serie converge; b) se $r>1$ la serie diverge.

Il criterio non fornisce indicazioni quando $r=1$, nel qual caso la serie può essere convergente o divergente (ma non indeterminata).

ESEMPIO 6. Applichiamo questo criterio per decidere della convergenza o meno della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^n\ .$$

Risulta:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^n}=\frac{3n-1}{2n-1}\ ;\ \text{ e perciò: }\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n-1}=\frac{3}{2}\ .$$

Ne discende che la serie è divergente.

ESEMPI 7 e 8. Le serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$$

sono convergenti. Ti proponiamo di dimostrarlo per esercizio.

73.3.3 I criteri precedenti non valgono più se, invece che con una serie a termini di uguale segno, abbiamo a che fare con una serie a segni alterni (positivi e negativi), come la seguente:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ ,$$

dove gli a_i sono tutti positivi. Per questa serie vale tuttavia un **nuovo criterio di convergenza**.

● CRITERIO DI LEIBNIZ [8]:
Sia la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Ammesso che (a_n) sia una successione di numeri positivi non crescente e

[7] **Cauchy**, Augustin Louis, matematico francese, 1789-1857.
[8] **Leibniz**, Gottfried Wilhelm, filosofo e matematico tedesco, 1646-1716.

che $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ allora la serie assegnata è convergente.

ESEMPIO 9. Applicando questo criterio possiamo stabilire che converge la serie seguente
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

73.3.4 Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – tale che risulti convergente la serie formata dai valori assoluti dei suoi termini, cioè la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – si dice **assolutamente convergente**.

Una serie convergente, a termini di uguale segno, è assolutamente convergente.

Invece una serie convergente, a termini di segno alterno, può non essere assolutamente convergente.

Basti considerare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, la quale, come abbiamo visto prima, è convergente, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, formata con i valori assoluti dei suoi termini, è divergente.

Vale infine la seguente proprietà, che è ancora un **criterio di convergenza**.

● CRITERIO:
Se una serie è assolutamente convergente allora è convergente.

ESEMPIO 10. Applichiamo questo criterio per dimostrare che è convergente la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

A questo riguardo consideriamo la serie formata con i valori assoluti dei suoi termini; vale a dire la serie seguente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sappiamo già che essa è convergente.

Quindi la serie assegnata è assolutamente convergente e perciò è convergente.

77.3.5 Delle serie convergenti, prese fin qui in considerazione, abbiamo determinato la somma solo in alcuni casi e precisamente in quelli degli esempi 1, 2 e 5 trattati nel paragrafo n. 77.2.

In tutti gli altri esempi di serie convergenti presentati in questo paragrafo 77.3, ci siamo limitati a far vedere che sono per l'appunto convergenti, ma non ne abbiamo determinato la somma.

Ora, in effetti, in alcuni casi sarebbe abbastanza semplice determinare quella somma, ma in altri casi è veramente complicato. Al giorno d'oggi, però, idonei software matematici consentono di ottenere rapidamente il risultato, anche se non sempre ad onor del vero. Vi sono infatti serie convergenti delle quali non si riesce a determinare la somma con esattezza e bisogna accontentarsi di un loro valore approssimato.

A titolo di esempio, con l'uso di un idoneo software matematico:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15$ e ; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \ln 2$.
- Riguardo alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n$ si ha: $S_{10} \approx 0{,}243$.

- Riguardo alla serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ si ha: $S_{10} \approx 0{,}188$.
- Riguardo alla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$$

proposta in una simulazione organizzata dal MIUR, vogliamo spendere qualche parola in più. Allo studente si chiedeva di verificare il carattere della serie e, nel caso che fosse convergente, di determinarne la somma (senza usare calcolatrici programmabili e/o grafiche).
Ora, per prima cosa è opportuno stabilire che si può scrivere:

$$\frac{1}{n^2+7n+12}=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}.$$

Per cui, la ridotta n-esima della serie è [9]:

$$S_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)+3}-\frac{1}{(n-1)+4}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}.$$

Ne discende che:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

Pertanto non solo la serie converge, ma il risultato precedente permette di concludere che la sua somma è 1/3.
- Un altro esempio di serie convergente su cui vogliamo soffermare la nostra attenzione è la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

Si tratta evidentemente di una particolare serie geometrica. Possiamo subito calcolare la sua ridotta n-esima S_n, trattandosi della somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $1/2$ e ragione $1/2$. Pertanto si ha:

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}.$$

Ne discende che:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

Possiamo anche fornire un'interessante visualizzazione di questa serie e del fatto che converge ad 1. Al riguardo, consideriamo un quadrato di lato 1 (Fig. 11) e suddividiamolo in due parti uguali e dunque ciascuna di area $1/2$. Suddividiamo quindi una di queste due parti ancora in due parti uguali e perciò ciascuna di area $1/4$. Di nuovo, suddividiamo una di queste due ultime parti in due parti uguali e dunque ciascuna di area $1/8$. E così via, all'infinito.
Ad operazione conclusa (ovviamente soltanto immaginata) il quadrato è riempito completamente dalle parti che non sono state ulteriormente suddivise e pertanto la somma delle aree di queste infinite parti è uguale all'area del quadrato. Vale a dire:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

---

[9] Facciamo notare che adesso il primo termine è a_0, per cui l'ennesimo è a_{n-1} .

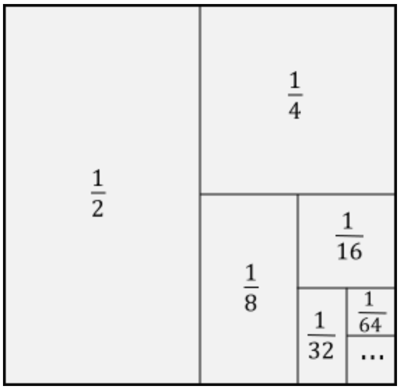

FIG. 11

- Concludiamo proponendo a chi legge la risoluzione del seguente esercizio.
  ESERCIZIO. Si consideri la serie dei numeri triangolari:
  $$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}+\cdots$$
  e si dimostri che diverge positivamente.
  Si dimostri, invece, che la serie dei reciproci dei numeri triangolari è convergente e se ne calcoli la somma.

77.3.6 La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, di cui ci siamo occupati in precedenza, dimostrando fra l'altro che la prima diverge positivamente mentre la seconda è convergente, sono casi particolari della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$
dove k è un qualsiasi numero reale, conosciuta come ***serie armonica generalizzata*** di parametro k.
Su questa serie vogliamo soffermare la nostra attenzione, constatando subito che, trattandosi di serie con termini tutti positivi, essa non può essere indeterminata ed è pertanto divergente (positivamente) o convergente.
Acquisito che per $k=1$ si ottiene la serie armonica, che è divergente, bisogna distinguere due casi a seconda che sia $k<1$ oppure $k>1$.
Se $k<1$ allora $n>n^k$ e quindi $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^k}$.
Questo, in virtù del teorema di confronto, essendo divergente la serie armonica, permette di concludere che anche la serie armonica generalizzata di parametro $k<1$ è divergente.
Se $k>1$ il discorso è un po' più articolato.
Incominciamo a constatare che si ha:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$
Per trarre delle conclusioni sulla sua caratteristica, confrontiamo la serie situata nel secondo membro della precedente uguaglianza con il seguente integrale generalizzato:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k},$$
il cui valore, come si può facilmente trovare è:

$$\frac{1}{k-1}.$$

Consideriamo allora, rappresentati in un piano riferito ad un sistema (non monometrico) di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la funzione $y=1/x^k$ (Fig. 12) e il plurirettangolo inscritto nel sottografico della stessa, formato dai rettangoli aventi per basi gli intervalli di ampiezza unitaria [1,2], [2,3], …, [n–1,n], … e per altezze rispettivamente i valori:

$$\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{3^k},\ldots,\ \frac{1}{n^k},\ldots.$$

L'area di questo plurirettangolo è proprio la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^k$, che, per evidenti ragioni geometriche, è minore dell'integrale suddetto.

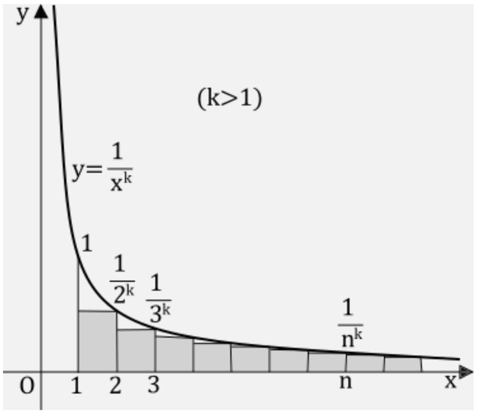

FIG. 12

Risulta perciò: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} < 1+\frac{1}{k-1}=\frac{k}{k-1}.$

Tutto ciò permette di concludere, non solo che la serie armonica generalizzata di parametro $k>1$ è convergente, ma che converge ad un valore compreso fra 1 e $\frac{k}{k-1}$.

Ora, però, fra il sapere che la serie in esame è convergente e il conoscere il valore S_k cui converge, il passo non è semplice. Tutt'altro.

Sembra che il primo studioso a porre il problema di determinare il valore della somma della serie armonica generalizzata di parametro k=2 sia stato il bolognese **Pietro Mengoli**, ma sulla sua risoluzione "topparono" matematici navigati. Fino a che lo svizzero **Johann Bernoulli** non lo propose al suo giovane allievo e connazionale **Leonhard Euler** (**Eulero**, in italiano, 1707-1783). Il quale ne trovò la soluzione all'età di 28 anni, acquisendo così fama e prestigio tra i matematici e non solo. Il valore trovato da Eulero è il seguente:

$$S_2=\frac{\pi^2}{6}.$$

Il problema di determinare questo valore è passato alla storia come ***problema di Basilea***.

In realtà, allo stato attuale, si riesce a calcolare il valore S_k cui la serie converge solamente se k è un intero pari. In particolare, oltre al valore $S_2=\pi^2/6$, si ha, per esempio:

$$S_4=\frac{\pi^4}{90},\quad S_6=\frac{\pi^6}{945},\quad S_8=\frac{\pi^8}{9.450}.$$

Negli altri casi in cui k>1, compreso quello in cui k è un intero dispari, il problema del calcolo del valore

della somma S_k , ossia di una formula che fornisca tale valore, è un problema aperto, vale a dire un problema non ancora risolto.
Osserviamo, per concludere con questa faccenda, che la serie armonica generalizzata, considerata non solo per valori reali del parametro k, ma anche per alcuni valori complessi di k, è indicata solitamente con il simbolo $\zeta(k)$ ed è nota come *funzione zeta di Riemann*.
Fu così denominata dallo stesso **Riemann** [10], nel 1859, in un breve articolo riguardante i numeri primi. Oggigiorno è considerata dai matematici, in particolare dagli analisti, una delle più importanti funzioni, se non addirittura la più importante, per il ruolo che svolge all'interno della Matematica, non solo in Analisi, in verità, ma anche in Probabilità, in Statistica, ed anche in Fisica.

VERIFICHE

Si consideri la funzione f(x), estesa periodicamente (con periodo 2π) a tutto ℝ, tale che per −π≤x<π abbia il valore indicato. Disegnare dapprima il grafico della funzione, esteso a 3 periodi, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). Successivamente, constatato che per ciascuna funzione f(x) sono soddisfatte le condizioni del teorema di Dirichlet-Dini, trovare la **serie di Fourier** della funzione f(x) e, mediante un opportuno software matematico, disegnarla, arrestandola al termine che si ottiene per n=5 (nn. 1-9):

1. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ se } -\pi\le x\le 0\\ -1 \text{ se } 0<x<\pi\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos n\pi-1}{n}\sin nx\right)\right]$

2. $f(x)=-\pi<2x<\pi$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{\sin n\pi}{n^2}-\dfrac{\pi\cos n\pi}{n}\right)\cos nx\right]\right]$

3. $f(x)=|x| \text{ se } -\pi\le x<\pi$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{\cos n\pi}{n^2}+\dfrac{\pi\sin n\pi}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cos nx\right]\right]$

4. $f(x)=-\dfrac{2}{\pi}|x|+1 \text{ se } -\pi\le x<\pi$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\dfrac{2\cos n\pi}{n^2\pi}-\dfrac{\sin n\pi}{n}+\dfrac{2}{n^2\pi}\right)\cos nx\right]\right]$

5. $f(x)=x^2 \text{ se } -\pi\le x<\pi$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}\right]$

6. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } -\pi\le x\le 0\\ x \text{ se } 0<x<\pi\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)\right]$

7. $f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ se } 0\le x\le\pi\\ -\cos x \text{ se } -\pi<x<0\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}\right]$

8. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } -\pi\le x\le 0\\ \sin x \text{ se } 0<x<\pi\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ \ F(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2kx)}{4k^2-1}\right]$

[10] **Riemann**, Bernhard, matematico tedesco, 1826-1866.

9. $f(x) = x - \sin x$ se $-\pi \le x < \pi$ $\left[\textbf{R.}\ F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\sin nx\right)\right]$

Altri esercizi sulla serie di Fourier (nn. 10-12)

10. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{per } -2 \le x < 0 \\ 2 - x & \text{per } 0 \le x < 2 \end{cases}$$

estesa periodicamente, con periodo 4, a tutto ℝ. Dopo averne disegnato il grafico e fatto vedere che sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet-Dini, trovare la serie di Fourier della funzione f(x) e, mediante un opportuno software matematico, disegnarla, arrestandola al termine che si ottiene per n=5. Confrontare il risultato con il terzo degli esempi esaminati in 77.1.3.

11. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le x < 1 \\ -1 & \text{per } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

estesa periodicamente, con periodo 2, a tutto ℝ. Dopo averne disegnato il grafico e fatto vedere che sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet-Dini, trovare la serie di Fourier della funzione f(x) e, mediante un opportuno software matematico, disegnarla, arrestandola al termine che si ottiene per n=5.

$$\left[\textbf{R.}\ F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(n\pi x)\right]\right]$$

12. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{per } 2 < x < 4 \end{cases}$$

estesa periodicamente, con periodo 4, a tutto ℝ. Dopo averne disegnato il grafico e fatto vedere che sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet-Dini, trovare la serie di Fourier della funzione f(x) e, mediante un opportuno software matematico, disegnarla, arrestandola al termine che si ottiene per n=3.

$$\left[\textbf{R.}\ F(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\right]$$

Serie numeriche (nn. 13-24)

13. Scrivere per esteso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sapendo che:

$$\text{a) } a_n = \frac{n+1}{2n-1}\ ;\quad \text{b) } a_n = (-1)^n\,\frac{n+1}{n}\ ;\quad \text{c) } a_n = \frac{n}{2^n}\ ;\quad \text{d) } a_n = n + \frac{1}{2^n}\,.$$

14. Determinare, se possibile, una formula per il calcolo della ridotta n-esima della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sapendo che:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2}n + 2\ ;\quad \text{b) } a_n = \frac{1}{2^n}\ ;\quad \text{c) } a_n = 3\cdot 2^n\ ;\quad \text{d) } a_n = 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } S_n = \frac{1}{4}\,(n^2 + 9n); \dots\right]$$

15. Stabilire se la seguente serie è convergente, divergente o indeterminata, ricorrendo al limite della ridotta n-esima e, quand'è convergente, determinarne la somma:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,.$$

$\left[\mathbf{R.}\ \text{Si osservi che: } a_1 = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3}\right),\ \ a_2 = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4}\right); \ldots\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. [**R.** converge a $3/4$]

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+11n+30}$. [**R.** converge a $1/5$]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$. [**R.** converge a 1]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. [**R.** Si osservi che $a_n = \cdots = \ln(n+1) - \ln(n)$, per cui ... la serie diverge]

16. Per mezzo del solo calcolo del limite del termine generale a_n, stabilire se la seguente serie "non è convergente" (in particolare se è divergente) o se non si può dire nulla circa il suo carattere:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$. [**R.** diverge positivamente]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$. [**R.** Non si può dire nulla]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n}$. [**R.** diverge negativamente]

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\frac{n+2}{n+1}$. [**R.** Non si può dire nulla]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. [**R.** Non si può dire nulla]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$. [**R.** Non coverge]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. [**R.** Non si può dire nulla]

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$. [**R.** Non si può dire nulla]

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n}$. [**R.** diverge positivamente]

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-n}{n}$. [**R.** diverge negativamente]

17. Determinare il carattere della seguente serie (se convergente o divergente) mediante il criterio del confronto:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. [**R.** Confrontare con la serie armonica]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. [**R.** Confrontare con la serie di Mengoli]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$. [**R.** Confrontare con la serie di Bernoulli]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$. [**R.** Confrontare con un'opportuna serie geometrica]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$. [**R.** Divergente]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)!}$. [**R.** Convergente]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. [**R.** Divergente]

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. [**R.** Divergente]

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2^n}$.

[**R.** Si osservi che $2n+2^n>2^n$; siccome la serie … allora, per il criterio di confronto, …]

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

[**R.** Si osservi che $n^2+3n>n^2+n$; per cui, confrontando con la serie … , la serie converge]

18. Determinare il carattere della seguente serie (se convergente o divergente) mediante il criterio del rapporto:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$. [**R.** Convergente]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. [**R.** Convergente]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. [**R.** Non si può dire nulla]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$. [**R.** Convergente]

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$. [**R.** Convergente]

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. [**R.** Convergente]

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. [**R.** Convergente]

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$. [**R.** Divergente]

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$. [**R.** Convergente]

19. Determinare il carattere della seguente serie (se convergente o divergente) mediante il criterio della radice:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n$. [**R.** Convergente]

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$. [**R.** Non si può dire nulla]

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{2n}$. [**R.** Divergente]

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n+1}$. [**R.** Divergente]

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n+1}}$. [**R.** Convergente]

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{e^{n+1}}$. [**R.** Convergente]

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^{n+2}}$. [**R.** Divergente]

20. Dire se, riguardo a qualcuna delle serie proposte negli esercizi 17-18-19, si può decidere del suo carattere in modo diverso da quello proposto di volta in volta.

21. Mediante il criterio di Leibniz giustificare che la seguente serie è convergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{e}\right)^n$. c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$. d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

22. Dopo aver spiegato perché la seguente serie converge, stabilire se è o no assolutamente convergente:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$. [**R.** Assolutamente convergente]

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. [**R.** Semplicemente convergente]

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n}$. [**R.** Semplicemente convergente]

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. [**R.** Assolutamente convergente]

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-e)^{1-n}$. [**R.** Assolutamente convergente]

23. Sulla base delle conoscenze acquisite, determinare il carattere della seguente serie numerica e, quand'è convergente, calcolare, eventualmente con l'uso di un idoneo software matematico, la sua somma esatta se è possibile o altrimenti il valore della sua ridotta di ordine 10:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\ \ln\frac{n+1}{n}\right)$. [**R.** Convergente; $S_{10}\approx 0{,}406$]

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^{n}$. $\left[\textbf{R.}\ \text{Convergente;}\ \ S=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{3}\right)^{n}$. [**R.** Divergente]

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n}\ \frac{n^2-1}{n!}\right)$. $\left[\textbf{R.}\ \text{Covergente;}\ \ S=\frac{e-1}{e}\right]$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{e^{n}}$. [**R.** Divergente]

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{n!}$. [**R.** Divergente]

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. $\left[\textbf{R.}\ \text{Convergente;}\ \ S=\frac{3}{4}\right]$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\ \frac{n!}{n^{n}}\right)$. [**R.** Covergente; $S_{10}=0{,}656$]

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n}$. [**R.** Si osservi che per $n\geq 1$ risulta $\ln n<n$; per cui…la serie è divergente]

24. I prossimi esercizi sono pressoché simili. Il primo di essi è risolto, la risoluzione degli altri è lasciata a chi legge.

a) ESERCIZIO RISOLTO. Posto $a=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}}$, dove i puntini di sospensione indicano una sequela di radicali simili ai precedenti, quale delle seguenti relazioni è quella corretta?

[A] $a=2$. [B] $2<a<3$. [C] $a=3$. [D] $a>3$.
Fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

RISOLUZIONE. È sufficiente constatare che l'espressione assegnata, vale a dire a, può essere scritta nella forma seguente: $\sqrt{3+a}$. Ragion per cui si ha la seguente equazione nell'incognita a: $a=\sqrt{3+a}$. Risolta la quale e prendendo la sola radice positiva si trova: $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 2{,}3$. Pertanto è [B] l'alternativa corretta.

b) Posto $a=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\dots}}}}$, dove n è un numero naturale non nullo e dove i puntini di sospensione indicano una sequela di radicali simili ai precedenti: 1) trovare per quali valori di n il valore dell'espressione assegnata a è esso pure un numero naturale, 2) dimostrare che per gli altri valori di n, a è un numero irrazionale, 3) esiste un valore di n per il quale a è il numero aureo?

[**R**. 1) $n=k(k+1)$, $a=k+1$, $\forall k\in N_0$; 2) … ; 3) …]

c) Posto

$$a=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}} \quad \text{e} \quad b=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\dots}}}},$$

dove i puntini di sospensione indicano una sequela di frazioni simili alle precedenti, calcolare i valori di a e b.

$$\left[\mathbf{R}.\ \ a=1+\sqrt{2}\,;\ \ b=\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$$

d) Posto

$$a=n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\dots}}}},$$

dove i puntini di sospensione indicano una sequela di frazioni simili alle precedenti: 1) dimostrare che per ogni n naturale non nullo, a è un numero irrazionale; 2) esiste un valore di n per il quale a è il numero aureo?

[**R**. 1) Tutto si riduce a constatare che n^2+4, ossia n^2+2^2, non può essere un quadrato perfetto per $n\neq 0$, e questo perché non esiste alcuna terna pitagorica in cui uno dei tre numeri che la compongono è …; 2) …]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE

1. Affinché una funzione sia sviluppabile in serie di Fourier è necessario che sia continua: è vero o falso?
2. L'espressione "la funzione periodica f(x) è sviluppabile in serie di Fourier" ha un importante significato fisico: quale?
3. È vero che se f(x) è una funzione pari, sviluppabile in serie di Fourier, tale sviluppo è il seguente:

$$F(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)) \quad \text{dove} \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\ ?$$

4. È vero che se f(x) è una funzione dispari, sviluppabile in serie di Fourier, tale sviluppo è il seguente:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin(nx)) \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \sin(nx)\, dx \ ?$$

5. È vero che se il termine generale a_n della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tende a 0 allora la serie converge?
6. Si sa che $a_n>0$ per ogni n: è possibile che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia indeterminata?
7. Si può ricorrere al criterio del rapporto per stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ converge o no?
8. Esiste un criterio che consenta di decidere circa la convergenza o meno della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$?
9. È vero che una serie convergente, a termini di segno alterno, può essere assolutamente convergente e può non esserlo?

RISPOSTE

1. È falso. La funzione può presentare dei punti di discontinuità. Ma devono essere soddisfatte altre condizioni. In particolare: la funzione deve essere periodica e in un periodo il numero di punti di discontinuità deve essere finito.
2. Dire che una funzione periodica f(x) è sviluppabile in serie di Fourier equivale ad affermare che il moto periodico rappresentato dall'equazione y=f(x) può essere decomposto in infiniti moti armonici.
3. Sì, è vero. Per la spiegazione rivedere 77.1.2.
4. Sì, è vero. Per la spiegazione rivedere 77.1.2.
5. No. Quello che possiamo dire è che se il termine a_n non tende a 0 allora la serie non converge, ma nulla possiamo dire nel caso in cui a_n tende a 0: la serie può convergere $\left[\text{come } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right]$, può divergere $\left[\text{come } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right]$ o essere indeterminata $\left[\text{come } \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.
6. No. La serie può essere convergente (es.: *serie di Mengoli*) o divergente (es.: *serie armonica*) ma mai indeterminata.
7. Siccome
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+1)+1}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1$$
nulla si può dire, utilizzando il criterio del rapporto, circa la convergenza o meno della serie, salvo che essa non può essere indeterminata. In effetti, confrontando questa serie con la serie armonica, si può concludere che la serie assegnata è divergente.
8. Si può ricorrere al criterio della radice. E siccome
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$$
possiamo concludere che la serie converge. Un valore approssimato della sua somma, esatto fino alla 6ª cifra decimale, è 0,187967.
9. Sì. Per esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}/n)$ è convergente ma non è assolutamente convergente, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}/n^2)$, sempre convergente, è assolutamente convergente.

LETTURA.

L'infinità dei numeri primi

Com'è noto [11], Euclide fornì una dimostrazione elegante dell'esistenza di infiniti numeri primi, basata su considerazioni del tutto elementari. Esiste tuttavia un'altra dimostrazione, più sofisticata, dovuta al grande Eulero. È basata sulla seguente uguaglianza, formulata e dimostrata dallo stesso Eulero:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\cdot\ldots$$

dove n è l'n-esimo numero naturale a partire da 1 e p_k è il k-esimo numero primo. Cosicché, per esempio: $p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ldots$.
Constatiamo che nel primo membro dell'uguaglianza figura la serie armonica che sappiamo essere divergente. Questo implica che il prodotto al secondo membro della stessa uguaglianza deve contenere un numero infinito di fattori giacché, in caso contrario, il suo valore sarebbe un numero razionale, in contraddizione con il fatto che il primo membro ha comunque valore infinito. Esistono dunque infiniti fattori

$$1-\frac{1}{p_k}.$$

Ossia esistono infiniti numeri primi p_k.

Se è vero che esistono infiniti numeri primi e se è pure vero che essi si distribuiscono in modo del tutto casuale nella successione dei numeri naturali, risulterebbe interessante conoscere una formula che permetta di calcolare quanti numeri primi precedono un assegnato numero N. Purtroppo una tale formula non esiste. Esiste tuttavia una formula che fornisce un'approssimazione di tale numero. Approssimazione che migliora al crescere del numero N. Questa formula è la seguente:

$$\pi(\mathrm{N})\approx\frac{\mathrm{N}}{\ln \mathrm{N}},$$

dove $\pi(\mathrm{N})$ indica per l'appunto il numero esatto di numeri primi minori di N.
La formula fu ipotizzata per primo dal grande Gauss nel 1792, ma una sua dimostrazione rigorosa si sarebbe avuta più di un secolo più tardi, nel 1896, ad opera, contemporaneamente ma indipendentemente, del francese Jacques Hadamard (1865-1963) e del belga Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962).

[11] Cfr.: Unità 54 – Insiemi numerici e infinito, N° 52.2.4