Prerequisiti:

- Conoscenze elementari di geometria euclidea.
- Conoscenze di nozioni di calcolo.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *spiegare il significato di area di un poligono*
- *conoscere la formula dell'area di un rettangolo*
- *dimostrare le formule delle aree di poligoni particolari (quadrato, triangolo, rombo, trapezio, parallelogramma)*
- *stimare l'area di una superficie irregolare*
- *stimare il numero di persone presenti in una piazza*
- *enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora*
- *dimostrare che un triangolo, per il quale sussiste la relazione espressa dal teorema di Pitagora, è rettangolo*
- *enunciare e dimostrare i teoremi di Euclide*
- *risolvere semplici problemi sulle aree dei poligoni*
- *distinguere tra il ruolo di una "regola del gioco" e quello di un teorema*

N.B.: In qualche dimostrazione ed in qualche esercizio si presuppone di saper risolvere questioni del genere seguente: «Dati due numeri reali a, b, trovare un numero reale x tale che ax=b oppure a+x=b». Non occorre uno studio preventivo della teoria delle equazioni (che tuttavia non si esclude). Basta infatti il semplice ricorso alle proprietà delle operazioni con i numeri reali.

Aree dei poligoni. Teoremi di Pitagora e di Euclide

Unità 8

8.1 AREE DEI POLIGONI

8.1.1 Una qualsiasi figura piana che possa essere contenuta in un rettangolo o, come anche si dice, una figura "limitata", si chiama **superficie**.

In questo senso, dunque, anche un segmento è una superficie. Però è una superficie speciale: diciamo esattamente che è una *superficie nulla*.

Il problema che ci si presenta è quello di "misurare le superfici", vale a dire di attribuire ad ognuna di esse un determinato numero reale.

Per decidere come possa essere fatta questa attribuzione incominciamo col presentare una situazione particolare.

Supponiamo di conoscere le misure dei lati di un rettangolo, ossia quelle che si chiamano le sue ***dimensioni***. Ammettiamo che esse siano 6 cm e 4 cm (Fig. 1).

Suddividiamo il lato che misura 6 cm in 6 parti congruenti e quello che misura 4 cm in 4 parti congruenti e mandiamo per i punti di divisione le parallele ai lati. Il rettangolo è suddiviso così in 6×4, cioè 24, quadratini di lato lungo 1 cm.

Se assumiamo uno qualunque di questi quadratini come unità di misura per le superfici, possiamo affermare che il nostro rettangolo misura 24 unità.

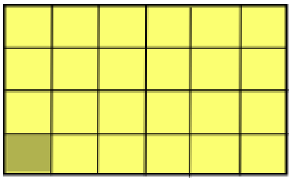

FIG. 1

In base a questo discorso – che ci pare abbastanza intuitivo e che non cambia nella sostanza (anche se si complica un po') se cambia la situazione e, in particolare, se le dimensioni del rettangolo hanno valori espressi da numeri razionali o addirittura reali – possiamo concludere che la misura di una superficie rettangolare è data dal prodotto delle misure delle sue dimensioni.

Questo fatto, assieme ad altri ugualmente intuitivi, ci permette di introdurre una nuova regola idonea a definire la misura di una superficie.

Due precisazioni sono però necessarie in via preliminare.

La prima. In questa regola si parla di "figure congruenti" ma, in realtà, noi fin qui abbiamo parlato solo di segmenti, di angoli, di triangoli congruenti. Cosa sono dunque due "figure congruenti"? Una definizione corretta è possibile, ma per adesso non ce ne occupiamo e ci accontentiamo di sapere che due figure congruenti (o uguali) si possono sovrapporre in modo da coincidere.

La seconda. La misura di cui per il momento ci occupiamo riguarda solo alcune superfici, quelle che si possono "scomporre" in poligoni. Di altre superfici ci occuperemo dopo il 1° biennio.

Una definizione, infine, prima di enunciare la regola cui accennavamo sopra:

Se esistono due superfici S' ed S" (Fig. 2) che non hanno in comune alcuna superficie non nulla, la loro unione è una superficie S che si dice <u>somma</u> delle superfici S' ed S" e si scrive:

$$S = S' + S'' .$$

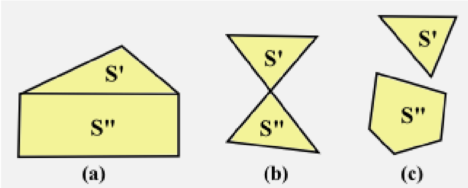

FIG. 2

Ed ecco, finalmente, la regola:

♦ **R_8: Ad ogni superficie piana S è associato uno ed un solo numero reale non negativo – si indica con A(S) e si chiama *misura* (o *area*) di S – tale che:**
- **se S è un segmento allora: A(S) = 0;**
- **se S è un rettangolo di dimensioni a, b allora la sua area è:**

  A = a b ;
- **se S' ed S" sono due superfici congruenti allora:**

  A(S') = A(S") ;
- **se la superficie S è la somma delle superfici S' ed S" allora:**

  A(S) = A(S') + A(S").

Quando A(S')=A(S") si dice che la superficie S' è ***equivalente*** alla superficie S". Si scrive:

$$S' \equiv S''.$$

Segue immediatamente una prima proprietà:

♦ **Se S e T sono due superfici scomponibili in un uguale numero di parti congruenti, allora sono equivalenti (**vale a dire: **hanno la stessa area).**

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che S sia scomponibile nelle due parti S' ed S" e T nelle due parti T' e T", con S' congruente a T' ed S" congruente a T" (Fig. 3). Il ragionamento che faremo si può estendere al caso in cui le parti siano più di due.

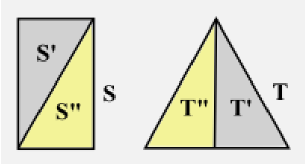

FIG. 3

Si ha:	S=S'+S" e T=T'+T",
per cui:	A(S)=A(S')+A(S") e A(T)=A(T')+A(T").
D'altro canto:	A(S')=A(T') e A(S")=A(T"),
da cui, sommando membro a membro segue:	A(S')+A(S") = A(T')+A(T").
Dunque, come volevasi dimostrare:	A(S) = A(T) .

L'unità di misura delle superfici è solitamente il **metro quadrato** (detto anche **metroquadro**) vale a dire il quadrato, il cui lato misura 1 m. Si indica con la scrittura:

$$\mathbf{1\ m^2}\ .$$

È noto che nella pratica sono usati anche, come unità di misura delle superfici, sottomultipli o multipli del metro quadrato. Per esempio:

$$1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2, \qquad 1\ \text{mm}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2, \qquad 1\ \text{km}^2 = 10^6\ \text{m}^2.$$

A titolo di curiosità segnaliamo alcune particolari superfici:

- la Città del Vaticano ha una superficie di circa $4{,}4 \times 10^{-1}$ km^2;
- la Repubblica di S. Marino ha una superficie di $6{,}1 \times 10$ km^2;
- l'Italia ha una superficie di circa $3{,}0 \times 10^5$ km^2;
- la Terra ha una superficie di circa $5{,}1 \times 10^9$ km^2.

Qualche esercizio:

1. Calcola, con approssimazione, l'area del foglio di quaderno su cui lavori.

2. Valuta, ovviamente con approssimazione, l'area del pavimento dell'aula scolastica che frequenti.

3. Rispondi alle seguenti domande:

- a quanti centimetri quadrati equivale 1 m^2 ? - a quanti metri quadrati equivale 1 km^2 ?

4. Le dimensioni di un rettangolo misurano 10 cm e 5 cm.

a) Dimostra che l'area del rettangolo diminuisce dell'1% se una dimensione aumenta del 10% e l'altra diminuisce del 10%, indipendentemente dalla dimensione che aumenta o diminuisce.

b) Cosa si può dire del perimetro del rettangolo se una dimensione aumenta del 10% e l'altra diminuisce del 10% ?

c) Se le misure delle dimensioni del rettangolo non sono note, si può ancora affermare che, aumentando una di esse del 10% e diminuendo l'altra del 10%, l'area del rettangolo diminuisce dell'1% ?

Vediamo adesso come si dimostrano le formule per le aree dei principali poligoni, che in realtà tu conosci fin dalla scuola primaria.

8.1.2 AREA DEL QUADRATO. Si sa che il quadrato è un particolare rettangolo, per cui, indicata con s la misura del suo lato, la sua area è: **A = s·s**; vale a dire:

$$\mathbf{A = s^2}\ .$$

ESERCIZI.

1. Calcola l'area del quadrato il cui lato misura:

12 cm ; 1,2 cm ; 0,5 m ; 5,3 m .

2. Calcola la misura del lato del quadrato la cui area è:

25 cm^2; 2,25 m^2.

3. Sono dati il quadrato ABCD di lato lungo L e centro O ed il quadrato OPQR di lato lungo 2L. Dimostrare che la regione comune ai due quadrati ha un'area che non dipende dalla posizione reciproca dei due quadrati. Quanto vale quest'area?

4. La lunghezza del lato di un quadrato diminuisce del 10%. Stabilire quale delle seguenti alternative è l'unica corretta:

[A] Il perimetro del quadrato diminuisce del 40% e l'area del 19%.

[B] Il perimetro del quadrato diminuisce del 40% e l'area del 10%.

[C] Il perimetro del quadrato diminuisce del 10% e l'area del 19%.

[D] Nulla si può dire riguardo alla diminuzione del perimetro e dell'area del quadrato poiché non si conosce la lunghezza del lato.

8.1.3 AREA DEL TRIANGOLO. In ogni triangolo un qualsiasi lato si può assumere come ***base***. Il segmento condotto perpendicolarmente a questo lato dal vertice opposto si chiama ***altezza***.

- Se la base e l'altezza di un triangolo misurano rispettivamente b ed h, l'area del triangolo è:

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{bh}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Se il piede dell'altezza coincide con un estremo della base (e per questo il triangolo è rettangolo – Fig. 4), la dimostrazione è banale poiché il triangolo è la metà di un rettangolo di dimensioni b ed h.

Se il piede dell'altezza è interno alla base o esterno ad essa, ci si riconduce facilmente al primo caso. Infatti (Fig. 5):

$$A=\frac{1}{2}b'h+\frac{1}{2}b''h=\frac{1}{2}\left(b'+b''\right)h=\frac{1}{2}\,bh\,;$$

ovvero (Fig. 6):

$$A=\frac{1}{2}b'h-\frac{1}{2}b''h=\frac{1}{2}\left(b'-b''\right)h=\frac{1}{2}\,bh\,.$$

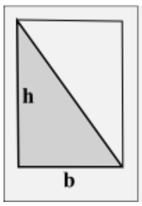

FIG. 4

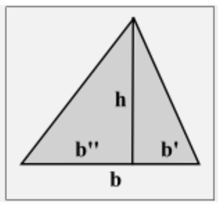

FIG. 5

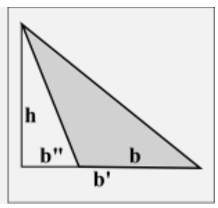

FIG. 6

ESERCIZI.

1. Calcola l'area di un triangolo le cui base e altezza misurano nell'ordine:
   2 cm, 3,2 cm; 6,8 m, 4,5 m; 73 cm, 1,2 m .
2. Calcola la misura dell'altezza di un triangolo sapendo che la sua base e la sua area sono nell'ordine:
   10 cm, 25 cm^2; 1,5 m, 6 m^2 ; 45 cm, 0,45 m^2 .
3. Disegna sul tuo quaderno un triangolo ottusangolo. Quindi, utilizzando un righello graduato in millimetri, prendi le misure che ti servono e calcola, con approssimazione, l'area del triangolo.
4. È assegnato il segmento AB lungo 12 cm. Trovare tutti i punti P tali che il triangolo PAB abbia area 24 cm^2.

- Può presentarsi il caso in cui di un triangolo siano conosciute le misure dei lati: a, b, c. In questo caso, il calcolo della sua area A è dato da una formula che è attribuita ad un matematico greco di nome **Erone** [(1)]. Ci limitiamo a fornire tale formula, ma senza dimostrarla per il momento. In essa è indicato con p il semiperimetro del triangolo, che evidentemente è noto, essendo: $2p=a+b+c$.

FORMULA DI ERONE:

$$\mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{p}(\mathbf{p}-\mathbf{a})(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{p}-\mathbf{c})}\,.$$

ESERCIZI.

1. Calcola l'area di un triangolo, i cui lati misurano 10 cm, 17 cm, 21 cm.
2. I lati di un triangolo misurano 13 cm, 20 cm, 21 cm. Calcola le misure delle altezze del triangolo.

NOTA BENE. A volte può far comodo considerare triangoli di area nulla. Questo accade quando i tre

[1] **Erone** di Alessandria, uno dei matematici più prolifici, I-II sec. d.C. Dimostreremo la formula di Erone più avanti quando ci occuperemo di equazioni (Cfr.: unità 20, n° 20.4.7).

vertici sono situati su una medesima retta. In tal caso i triangoli sono chiamati *triangoli degeneri*.

8.1.4 AREA DEL PARALLELOGRAMMA**.** In ogni parallelogramma, uno dei lati può assumersi come ***base***; il segmento perpendicolare condotto a questo lato da un punto qualunque del lato opposto si chiama ***altezza***.

Un parallelogramma, la cui base e altezza misurino rispettivamente b ed h, ha area:

$$\mathbf{A = b\,h}\,.$$

La dimostrazione è banale, ove si tenga presente che il parallelogramma è formato da due triangoli congruenti, ognuno dei quali ha base b ed altezza h (Fig. 7): la lasciamo a te.

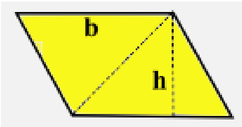

FIG. 7

ESERCIZI.

1. Calcola l'area di un parallelogramma le cui base e altezza misurano nell'ordine:

$$2\text{ cm},\ 3{,}2\text{ cm};\qquad 6{,}8\text{ m},\ 4{,}5\text{ m};\qquad 73\text{ cm},\ 1{,}2\text{ m}.$$

2. Calcola la misura della base di un parallelogramma sapendo che la sua altezza e la sua area sono nell'ordine:

$$10\text{ cm},\ 25\text{ cm}^2;\qquad 1{,}5\text{ m},\ 6\text{ m}^2;\qquad 45\text{ cm},\ 0{,}45\text{ m}^2.$$

8.1.5 AREA DEL TRAPEZIO. Il **trapezio** è un quadrilatero (convesso) con due lati paralleli e due soltanto (Fig. 8), dette ***basi*** [(2)]. Il segmento perpendicolare ad una base condotto per un punto qualunque dell'altra si chiama ***altezza***.

Se uno dei lati obliqui del trapezio è perpendicolare alle basi, esso si dice ***trapezio rettangolo*** (Fig. 9); se i due lati obliqui sono congruenti si dice ***trapezio isoscele*** (Fig. 10).

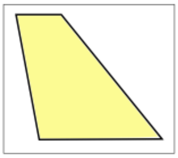

FIG. 8

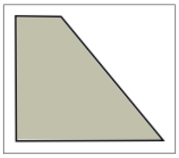

FIG. 9

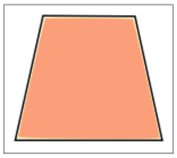

FIG. 10

Prima di procedere, ti proponiamo, per inciso, di dimostrare che:

Gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi di un trapezio isoscele sono congruenti.

L'area di un trapezio di basi lunghe b' e b" e di altezza h è data dalla seguente formula:

$$\mathbf{A = \frac{1}{2}(b' + b")h}\,.$$

Per la dimostrazione, che lasciamo a te, è sufficiente osservare che una diagonale del trapezio lo divide in due triangoli aventi altezza h e basi, uno b' e l'altro b" (Fig. 11).

---

[2] **Con questa definizione è escluso che un parallelogramma sia un particolare trapezio**. Se, invece, la definizione non precisa che solo due lati siano paralleli (potendolo ovviamente essere anche gli altri due), un parallelogramma può essere concepito come un particolare trapezio.

ESERCIZI.

1. Calcolare l'area di un trapezio sapendo che le sue basi e la sua altezza misurano nell'ordine:

$$5\text{ cm}\,,\ 6\text{ cm}\,,\ 8\text{ cm}\,;\qquad 1{,}2\text{ m}\,,\ 75\text{ cm}\,,\ 45\text{ cm}\,.$$

2. Calcolare l'altezza di un trapezio sapendo che la sua area e le sue basi sono nell'ordine:

$$500\text{ cm}^2,\ 45\text{ cm}\,,\ 55\text{ cm}\,;\qquad 0{,}45\text{ m}^2,\ 250\text{ cm}\,,\ 200\text{ cm}\,.$$

3. Sia ABCD un trapezio in cui AB è la base maggiore ed E è il punto comune alle sue diagonali. Le aree dei triangoli ABD e ACD sono nell'ordine 36 cm^2 e 15 cm^2. Dopo aver dimostrato che i triangoli EAD ed EBC sono equivalenti, calcolare l'area del trapezio.
4. Disegna sul tuo quaderno un trapezio non isoscele e traccia la sua diagonale minore. Quindi, utilizzando un righello graduato in millimetri, prendi le misure che ti servono e calcola, con approssimazione, l'area del trapezio e le aree dei due triangoli in cui esso è diviso dalla suddetta diagonale.

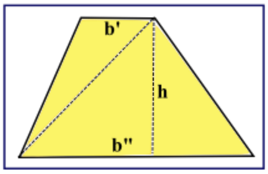

FIG. 11

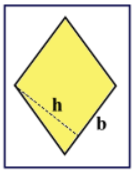

FIG. 12

8.1.6 AREA DEL ROMBO. Un rombo (ma, più in generale, ogni quadrilatero con le diagonali perpendicolari), le cui diagonali siano lunghe d' e d", ha area:

$$\mathbf{A = \frac{1}{2} d' d''}\,.$$

Ti lasciamo anche questa dimostrazione.

Ovviamente, nel caso del rombo, che è pur sempre un parallelogramma, la sua area è espressa anche dalla formula:

$$\mathbf{A = b\,h}\,,$$

dove b è la lunghezza di un lato ed h è la distanza di due lati paralleli (Fig. 12).

ESERCIZI.

1. Calcola l'area di un rombo le cui diagonali misurano nell'ordine:

$$1{,}2\text{ m}\,,\ 3{,}5\text{ m}\,;\qquad 230\text{ cm}\,,\ 3{,}2\text{ m}\,.$$

2. Calcola la misura della diagonale di un rombo sapendo che l'altra diagonale e l'area valgono rispettivamente:

$$5{,}8\text{ cm}\,,\ 116\text{ cm}^2;\qquad 450\text{ cm}\,,\ 0{,}9\text{ m}^2\,.$$

3. L'area di un rombo è $0{,}4\text{ m}^2$ e la misura del suo lato è 50 cm. Quant'è la distanza di due lati paralleli?

8.2 TEOREMA DI PITAGORA. APPLICAZIONI E CONSEGUENZE

8.2.1 In ogni triangolo rettangolo i due lati che formano l'angolo retto si dicono ***cateti***, il terzo lato si dice ***ipotenusa***.

Conosci già una delle proprietà più famose del triangolo rettangolo: il **teorema di Pitagora**. Ne hai già visto una verifica sperimentale a suo tempo. Adesso vogliamo fornirne una dimostrazione. Precisamente, una dimostrazione che ricalchi a grandi linee la verifica sperimentale che conosci.

♦ **TEOREMA DI PITAGORA**
In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un triangolo ABC, rettangolo in A (Fig. 13a) ed un quadrato PQRS (Fig. 13b), il cui lato è lungo quanto la somma delle lunghezze dei cateti del triangolo.
Sui lati PQ, QR, RS, SP del quadrato prendiamo ordinatamente i punti F,G,H,I tali che:

$$PF \cong QG \cong RH \cong SI \cong AB.$$

Si dimostra (ne lasciamo il compito a te) che:
- i triangoli PFI, QGF, RHG, SIH sono tutti e quattro congruenti al triangolo ABC;
- il quadrilatero FGHI è un quadrato (precisamente un quadrato di lato lungo quanto l'ipotenusa del triangolo considerato).

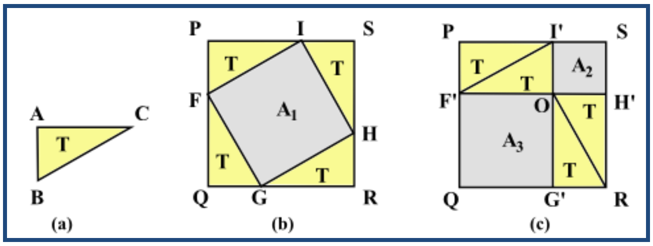

FIG. 13

Dette allora A_1 l'area di questo quadrato FGHI e T quella del triangolo ABC, si ha:

$$A(PQRS) = A_1 + 4\,T\,.$$

Ricorrendo ad una seconda costruzione (Fig. 13c), sui lati PQ, QR, RS, SP del quadrato PQRS prendiamo nell'ordine i punti F', G', H', I' tali che:

$$PF' \cong G'R \cong H'S \cong SI' \cong AB.$$

Si dimostra (anche questo compito lo lasciamo a te) che:
- i triangoli PF'I', OI'F', G'RO, H'OR sono tutti e quattro congruenti al triangolo ABC;
- i quadrilateri I'OH'S ed OF'QG' sono entrambi quadrati, precisamente il primo è un quadrato di lato lungo quanto il cateto AB del triangolo ABC e il secondo è un quadrato di lato lungo quanto il cateto AC.

Dette allora A_2 ed A_3 le aree di questi due quadrati, si ha:

$$A(PQRS) = (A_2 + A_3) + 4\,T\,.$$

Di modo che:

$$A_1 + 4\,T = (A_2 + A_3) + 4\,T\,;$$

da cui segue ciò che volevamo dimostrare:

$$A_1 = A_2 + A_3\,.$$

Se $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono, nell'ordine, le misure dell'ipotenusa e dei due cateti di un triangolo rettangolo, il teorema di Pitagora afferma, in sostanza, che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}.$$

ESERCIZI.
1. Determinare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo sapendo che i cateti misurano nell'ordine:

$$3\text{ cm},\ 4\text{ cm};\quad 5\text{ cm},\ 12\text{ cm};\quad 8\text{ m},\ 6\text{ m};\quad 1\text{ m},\ 2{,}4\text{ m}.$$

2. Determinare un cateto di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa e l'altro cateto misurano nell'ordine:

$$5\text{ m},\ 3\text{ m};\qquad 26\text{ cm}, 24\text{ cm}.$$

3. Un trapezio rettangolo è diviso in due triangoli isosceli dalla sua diagonale minore. Sapendo che la sua base minore misura 3 cm, calcolarne l'area e il perimetro. [Attenzione, bisogna esaminare due casi]
4. Un parallelogramma (che non sia un rombo) è diviso in due triangoli isosceli dalla sua diagonale minore, la cui misura è 5 cm. Sapendo che un angolo del parallelogramma misura 30°, calcolarne l'area e il perimetro.
5. Disegna sul tuo quaderno un triangolo rettangolo. Quindi, utilizzando un righello graduato in millimetri, prendi le misure che ti servono e verifica che è soddisfatto il teorema di Pitagora (a meno di errori di approssimazione).

8.2.2 Vale la seguente proposizione, che possiamo considerare come il "teorema inverso del teorema di Pitagora":

♦ **TEOREMA INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA**

Se tra le misure a, b, c dei lati di un triangolo sussiste la relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

allora il triangolo è rettangolo ed a è la misura della sua ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che sia ABC il triangolo per il quale vale la relazione $a^2=b^2+c^2$, dove a, b, c sono le misure rispettivamente dei lati BC, CA, AB. Ci proponiamo di dimostrare che esso è un triangolo rettangolo in A. A tal riguardo costruiamo due segmenti consecutivi e perpendicolari A'B' e A'C' (Fig. 14) tali che: $\overline{A'B'}=c$ e $\overline{A'C'}=b$. Allora, nel triangolo rettangolo A'B'C', posto $a'=\overline{B'C'}$, per il teorema di Pitagora si ha:

$$a'^2 = b^2 + c^2 .$$

Pertanto risulta: $a'^2 = a^2$; da cui, siccome a, a' sono entrambi positivi, segue: $a' = a$.
Di modo che i due triangoli ABC ed A'B'C' hanno i tre lati ordinatamente congruenti e perciò sono congruenti per il terzo criterio. Quindi, come A'B'C' è rettangolo in A', così ABC è rettangolo in A.

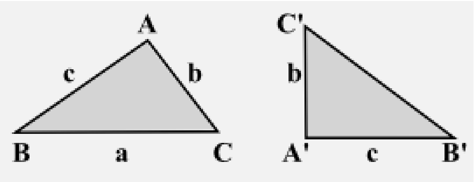

FIG. 14

A semplice titolo di curiosità, segnaliamo che quelli che noi abbiamo chiamato "teorema di Pitagora" e "teorema inverso del teorema di Pitagora" figurano negli *Elementi* di **Euclide**, come proposizioni rispettivamente 47 e 48 del libro I e di questo libro sono le proposizioni conclusive. Naturalmente, la dimostrazione che ne fornisce Euclide è completamente diversa dalla nostra.

8.2.3 Vediamo subito due applicazioni elementari del teorema di Pitagora.

- Indicate con $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{d}$ le misure del lato e della diagonale di un quadrato, si ha:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{l}\sqrt{\mathbf{2}}\ .$$

Considerato, infatti, uno dei due triangoli rettangoli in cui il quadrato è diviso da una sua diagonale, per il teorema di Pitagora applicato a questo triangolo si ha:

$$d^2 = l^2 + l^2\ , \ \text{ossia: } d^2 = 2\,l^2\ .$$

E da qui, essendo d ed l entrambi positivi, segue la formula sopra scritta.

- Un triangolo avente i tre lati congruenti, come sappiamo, si dice *equilatero*.

Indicate con $\boldsymbol{l}$ ed $\boldsymbol{h}$ le misure di un suo lato e dell'altezza relativa a questo lato, si ha:

$$\boldsymbol{h = \frac{l}{2}\sqrt{3}}\ .$$

Infatti, considerato il triangolo equilatero ABC (Fig. 15), diciamo H il punto medio del lato BC. I due triangoli AHB e AHC sono congruenti perché hanno i tre lati ordinatamente congruenti. Sicché i due angoli $A\hat{H}B$ e $A\hat{H}C$ sono congruenti e, per questo, retti. Ne discende che AH è l'altezza del triangolo relativa al lato BC.

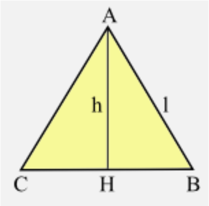

FIG. 15

Applicando allora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB, si ha:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\ , \text{ ossia: } h^2 = \frac{3}{4}l^2,$$

da cui segue la formula sopra scritta.

Come applicazione della formula testé dimostrata, ti proponiamo alcuni semplici problemi.

1. Nell'unità 3, paragrafo n. 3.1.2, è stata descritta una costruzione geometrica di $\sqrt{2}$, con riga e compasso. Con un procedimento simile fornire una costruzione geometrica, sempre con riga e compasso, di $\sqrt{3}$.
2. Nella figura sottostante (Fig. 16) i triangoli ABC e DEF sono equilateri e uguali. I loro lati sono divisi in tre parti uguali dai punti L, M, N, P, Q, R.
   a) Dimostrare che l'area ombreggiata in figura (stella di David) è uguale all'area del rettangolo ABDE.
   b) Sapendo che i lati dei triangoli hanno lunghezza assegnata L, calcolare l'area della stella di David..

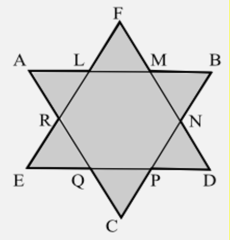

FIG. 16

3. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, l'angolo in B è ampio 60° e l'ipotenusa è lunga a. Detto P un punto dell'ipotenusa, siano PH e PK le distanze di P dai cateti AB e AC rispettivamente. Determinate la posizione di P per la quale HK è parallela a BC.
4. Verificare la formula di Erone, applicandola ad un triangolo: a) equilatero di lato L; b) isoscele di lati a,

a, b. In altri termini: calcolare l'area di ciascuno dei due triangoli in due modi, di cui uno come applicazione della formula di Erone, e far vedere che i risultati coincidono.

8.2.4 I numeri reali positivi x, y, z, tali che: $x^2+y^2=z^2$, espressi nella stessa unità di misura, costituiscono nell'ordine i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Per esempio, con valori espressi in centimetri: $x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{3},\ z=\sqrt{5}$; oppure: $x=\sqrt{2}-1,\ y=\sqrt{2}+1,\ z=\sqrt{6}$.
Quando tali numeri sono interi (positivi), si dice che formano una **terna pitagorica**. Costituiscono una terna pitagorica, per esempio, i numeri 3, 4, 5.
Ti proponiamo di verificare, per esercizio, che formano una terna pitagorica i numeri x, y, z, tali che:

$$x = 2\,m\,n, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

dove m, n sono numeri interi positivi qualsiasi, con $m>n$.
Completa, quindi, la seguente tabella (Tab. 1), la quale fornisce evidentemente alcune terne pitagoriche:

m	n	$x = 2\,m\,n$	$y = m^2-n^2$	$z = m^2+n^2$
2	1			
3	1			
3	2			
4	1			
4	2			
4	3			

TAB. 1

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Esaminando le terne pitagoriche elencate nella precedente tabella, verificare che vale la seguente caratteristica (che, in realtà, vale per ogni terna pitagorica): uno dei numeri di ogni terna è multiplo di 3, uno è multiplo di 4 ed uno è multiplo di 5.
2. Dimostra che se i numeri naturali x, y, z formano una terna pitagorica, di essi uno solo è pari o sono pari tutti e tre.
3. Dopo aver dimostrato che si ha:
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
dimostrare che esiste almeno una coppia di numeri interi positivi x, y (con $x<y$) tali che:
$$2500 = x^2 + y^2 \,.$$

8.2.5 Il teorema inverso del teorema di Pitagora consente di stabilire se un triangolo, di cui sono note le lunghezze dei lati è rettangolo o no. Basta confrontare il quadrato della lunghezza del lato maggiore con la somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati: se le due quantità sono uguali il triangolo è rettangolo, altrimenti non lo è.
Ma in questo secondo caso si può stabilire se il triangolo è acutangolo o ottusangolo. Precisamente, a seconda che il quadrato della lunghezza del lato maggiore sia maggiore o minore della somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati, il triangolo è rispettivamente ottusangolo o acutangolo.
La dimostrazione di ciò potrebbe esser fatta con gli strumenti matematici acquisiti fin qui, ma il discorso da farsi sarebbe troppo lungo. Preferiamo tralasciarla e ritornarci sopra quando, nel seguito degli studi, ci occuperemo di trigonometria.
Qui ci limitiamo a proporre, a titolo di esemplificazione, qualche semplice esercizio.

Stabilire se il triangolo ABC è rettangolo, acutangolo o ottusangolo, sapendo che le misure dei suoi lati, espresse rispetto ad una medesima unità di misura, sono le seguenti

a) AB=10, BC=24, CA=26; b) AB=8, BC=6, CA=12; c) AB=18, BC=12, CA=16.

8.3 I TEOREMI DI EUCLIDE

8.3.1 Sono importanti conseguenze del teorema di Pitagora due celebri teoremi di Euclide. Noi ne forniremo una dimostrazione algebrica, ma tu sei invitato a fornirne pure un'interpretazione geometrica.

Ad onor del vero, Euclide fornisce la dimostrazione di quello che noi chiamiamo "primo teorema di Euclide" nella prima parte della succitata proposizione 47 e da questa dimostrazione fa scaturire quella del teorema di Pitagora. Il tutto con considerazioni geometriche. Non c'è traccia, invece, negli *Elementi* di quello che noi chiamiamo "secondo teorema di Euclide", ma ci sono due proposizioni ad esso equivalenti, la 14 del libro II (si tratta sostanzialmente di *trasformare un rettangolo nel quadrato equivalente*) e la 13 del libro VI (si tratta di *costruire il segmento medio proporzionale fra due segmenti dati*).

♦ **PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE**
In ogni triangolo rettangolo il quadrato avente per lato un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A (Fig. 17) e detta AH l'altezza relativa all'ipotenusa, i segmenti BH e CH sono le proiezioni su BC dei cateti AB e AC rispettivamente. Posto:

$$\overline{BC}=a,\quad \overline{AC}=b,\quad \overline{AB}=c,\quad \overline{CH}=m,\quad \overline{BH}=n.$$

si tratta di dimostrare che:

$$\mathbf{b^2 = a\,m\,,\quad c^2 = a\,n\,.}$$

Indicata allora con h la lunghezza di AH, in virtù del teorema di Pitagora applicato dapprima al triangolo AHC e poi ad AHB, si trova: $b^2=m^2+h^2$, $c^2=n^2+h^2$; da cui, sottraendo membro a membro, segue:

$$b^2-c^2=m^2-n^2\,.$$

Ora, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABC, si ha:

$$b^2+c^2=a^2\,.$$

Per cui, sommando membro a membro le ultime due uguaglianze, si ottiene:

$$2\,b^2=a^2+m^2-n^2\,.$$

D'altronde $n=a-m$. Perciò:

$$2\,b^2=a^2+m^2-(a-m)^2;$$

da cui, dopo aver semplificato, segue:

$$b^2=a\,m\,.$$

Se adesso si tiene presente che $b^2=a^2-c^2$ ed $m=a-n$, dalla precedente relazione si ricava:

$$a^2-c^2=a\,(a-n);$$

e da qui, dopo aver semplificato, segue:

$$c^2=a\,n\,.$$

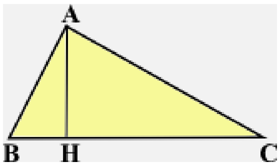

FIG. 17

♦ **SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE**
In ogni triangolo rettangolo il quadrato avente per lato l'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla stessa figura 17, si tratta di dimostrare che:

$$\mathbf{h^2 = m\,n}\ .$$

Ora, osservando che l'area del triangolo ABC può essere espressa da ognuna delle due formule seguenti:

$$A=\frac{1}{2}ah,\quad A=\frac{1}{2}bc,$$

risulta evidentemente: $a\,h = b\,c$, da cui, elevando al quadrato entrambi i membri, segue: $a^2\,h^2 = b^2\,c^2$.
D'altra parte, per il 1° teorema di Euclide, si ha:

$$b^2 = a\,m \quad e \quad c^2 = a\,n\ .$$

Dunque:

$$a^2\,h^2 = (am)(an).$$

Da qui, dopo aver diviso entrambi i membri per a^2, si ottiene:

$$h^2 = m\,n$$

che esprime, appunto, il 2° teorema di Euclide.

8.3.2 Nelle applicazioni è comodo il ricorso diretto ai teoremi di Euclide e per questo è opportuno memorizzarli. Intendiamoci: i problemi potrebbero essere risolti ugualmente ricorrendo al solo teorema di Pitagora, ma con inutili complicazioni e lungaggini, che sono invece evitate con l'utilizzazione, appunto, dei teoremi di Euclide.
Vediamo, ad ogni buon conto, un problema che si risolve con il ricorso ai teoremi di Euclide.

- PROBLEMA RISOLTO.

In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 7,2 m e 12,8 m. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo.

RISOLUZIONE. Con riferimento al triangolo ABC (Fig. 18), in cui H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa BC, si ha: $\overline{CH}$=7,2 m, $\overline{BH}$=12,8 m. Pertanto: $\overline{BC} = 20$ m.

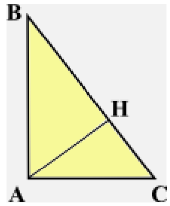

FIG. 18

Ricorrendo al 2° teorema di Euclide, possiamo subito calcolare l'altezza AH relativa a BC:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH}\cdot\overline{HC}} = \sqrt{7{,}2\cdot 12{,}8} = 9{,}6\ \ (\text{cm}).$$

Le misure dei due cateti AB e AC possono essere trovate sia col ricorso al teorema di Pitagora (applicato al triangolo rettangolo AHB per calcolare AB e al triangolo rettangolo AHC per calcolare AC; o anche, una volta trovato AB, col ricorso al triangolo ABC per trovare AC) sia utilizzando il 1° teorema di Euclide (applicato al triangolo ABC, una volta relativamente al cateto AB e una volta relativamente al cateto AC).

Comunque si proceda si trova: $\overline{AB}=12$ m, $\overline{AC}=16$ m.
A questo punto la determinazione del perimetro e dell'area del triangolo è cosa fatta. Si ha:

$$P=(12+16+20)\text{ m}=48\text{ m},\quad A=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16\text{ m}^2=108\text{ m}^2.$$

® **Laboratorio di Matematica** Devi calcolare l'area di ciascuna delle superfici raffigurate sotto in scala naturale. Vale a dire che 1 cm sulla carta vale 1 cm nella realtà. Non disponi di formule apposite ma ti basta conoscere un valore approssimato delle aree. Sei in grado di fornire una valutazione anche grossolana di qualche area? Come pensi di procedere per avere la migliore approssimazione possibile?
Discutine in classe con i tuoi compagni, sotto la guida del tuo professore. Esistono più modi di procedere.

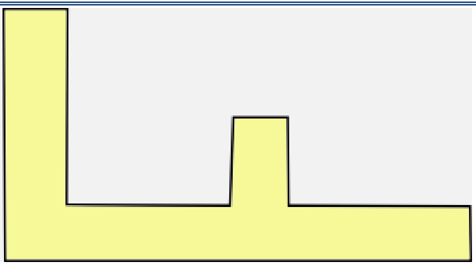

FIG. 19

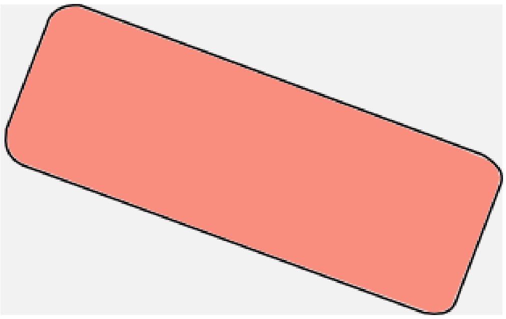

FIG. 20

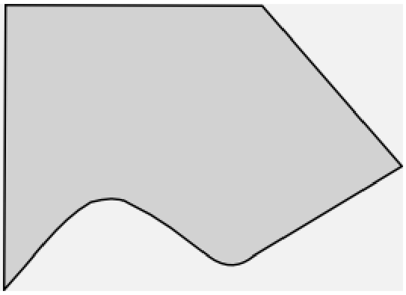

FIG. 21

8.4 NOTA STORICA.

8.4.1 La geometria che s'insegna nelle scuole si ispira fortemente a quella esposta da **Euclide** nei suoi ***Elementi*** intorno al 300 a.C.. Quest'opera è un compendio delle conoscenze matematiche dell'epoca in cui visse il suo autore e costituisce la sintesi di una ricca tradizione di studi matematici, iniziatasi e sviluppatasi in Grecia a partire dal 600 a.C.

8.4.2 Prima dei Greci la geometria era studiata a livello di applicazioni pratiche, dettate dalla necessità di misurare appezzamenti di terreno [3], volumi di edifici o di granai, eccetera. Questo, perlomeno, stando ai reperti archeologici di cui disponiamo e che sono soprattutto:

- il **Papiro di Rhind**, che risale circa al 1650 a.C., e il **Papiro di Mosca**, che risale circa al 1890 a.C. Entrambi contengono problemi (87 il primo e 25 il secondo) che testimoniano delle conoscenze della civiltà egizia in campo matematico;
- **circa 300 tavolette di argilla** – alcune risalenti al periodo della dinastia degli Hammurabi (1800-1600 a.C.), altre al periodo dei Seleucidi (IV sec. a.C.) – a contenuto matematico, a testimonianza delle conoscenze, in questo settore, della civiltà babilonese.

Sia i papiri egizi che le tavolette babilonesi presentano problemi vari, anche di geometria, ma riguardanti casi specifici, senza alcuna enunciazione di regole generali, e non si trova in essi alcun accenno di ciò che oggi chiamiamo dimostrazione, ma solo indicazioni su "come" fare per risolvere una determinata questione.

8.4.3 È con i Greci che la geometria assurge a livello di scienza moderna, di scienza cioè che non solo indica "come" ottenere certi risultati ma spiega anche "perché" bisogna operare in un determinato modo.
Sarebbe interessante conoscere le varie fasi attraverso le quali si è formata la geometria greca, prima di sfociare nell'opera di Euclide, dove si presenta come scienza già pienamente evoluta. Purtroppo le opere dei matematici greci pre-euclidei sono andate perdute e oggi non abbiamo che qualche frammento di matematici posteriori e la ricostruzione che, di quelle opere, hanno fatto commentatori successivi, ma vissuti molto tempo dopo [4].
Fra questi soprattutto **Proclo** di Licia, vissuto nel V sec. d.C., il quale non fornisce evidentemente notizie di prima mano, ma si rifà ad un riassunto di una *Storia della geometria*, che già allora era andata probabilmente perduta, scritta da un discepolo di Aristotele, **Eudemo** di Rodi (vissuto intorno al 320 a.C.). Abbiamo poi molti riferimenti alla matematica del periodo pre-euclideo nelle opere di **Platone** (427-347 a.C.) e di **Aristotele** (384-322 a.C.), che ci sono pervenute pressoché integralmente.

8.4.4 Proclo, rifacendosi dunque a testimonianze precedenti e in particolare ad Eudemo, scrisse un *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*. In esso, fra l'altro, delinea una brevissima storia della matematica greca da Talete ad Euclide, in cui sostiene che **Talete** di Mileto (vissuto all'incirca tra il 624 e il 548 a.C.), avendo fatto dei viaggi in quelli che allora erano i centri del sapere – Egitto, Babilonia – avesse ivi appreso lo studio della geometria e l'avesse introdotto in Grecia.
Egli attribuisce a Talete la scoperta e la dimostrazione delle seguenti proprietà:

- Ogni diametro divide il cerchio in due parti uguali.
- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.
- Gli angoli opposti al vertice sono uguali.
- Se due triangoli hanno uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, sono uguali.

Altre notizie su Talete geometra ci sono fornite da Diogene Laerzio (III sec. d.C.), commentatore di opere filosofiche. Avremo occasione di parlarne nel proseguimento degli studi.

---

[3] Il termine "geometria" significa letteralmente "misura della terra".
[4] Può sembrare paradossale, ma abbiamo informazioni più dirette e affidabili sulla matematica babilonese ed egizia che non su quella pre-euclidea.

8.4.5 C'è, indubbiamente, un progresso nel passaggio dalla geometria delle civiltà pre-elleniche a quella di Talete. Quelle civiltà limitavano la loro indagine ai casi particolari suggeriti dall'esperienza. Talete, invece, enuncia proprietà universali, contribuendo così a fondare la geometria pura come scienza, cioè come conoscenza di leggi generali.

Rimane, per la verità, il dubbio se Talete abbia realmente "dimostrato" quelle proposizioni. Proclo sostiene che «*egli stesso trovò molte cose e di molte indicò i principi a coloro che vennero dopo di lui, di alcune cose trattando in modo più generale, di altre in modo più sensibile*».

Ad ogni modo, che Talete abbia dimostrato tali proprietà, nel senso che oggi attribuiamo a questo fatto, cioè che le abbia dedotte con ragionamento da altre proposizioni (dimostrate o assunte come "regole"), appare agli storici moderni cosa del tutto inverosimile, per non dire impossibile. È più probabile che Talete abbia intuito quelle proprietà e convinto della loro validità generale per la frequenza con cui si presentavano nelle applicazioni pratiche, ne abbia fatto delle affermazioni universali. Un po' come hai fatto tu riguardo, per esempio, agli angoli opposti al vertice o alla somma degli angoli interni di un triangolo. Oppure riguardo anche ai criteri di congruenza dei triangoli.

8.4.6 Talete, insomma, pur gettando le basi per la costruzione razionale della Geometria, non sembra che potesse essere in grado di condurre dimostrazioni, probabilmente perché le proposizioni geometriche di cui aveva conoscenza erano ancora poche e piuttosto elementari perché potesse avvertire una concatenazione logica fra esse.

Via via che queste proposizioni si andarono accumulando, col contributo di altri geometri, e diventarono anche più complesse, sorse il desiderio, quasi la necessità, di darne giustificazione rifacendosi a proposizioni più semplici, dalle quali le altre potevano essere dedotte. E così, risalendo verso proposizioni sempre meno complesse, si arrivò al punto in cui se ne dovettero accettare alcune senza dimostrazione. Quelle che furono assunte come tali, vale a dire le "regole del gioco", che però i Greci chiamavano "postulati", furono le proposizioni giudicate vere perché "evidenti di per sé".

Ora, secondo il matematico e storico danese H.G.Zeuthen (1839-1920), la proposizione che ha suscitato nei geometri il desiderio di effettuare quel lavoro di risalita verso i principi di base fu quello che oggi chiamiamo "teorema di Pitagora". Il teorema, perlomeno come constatazione di un dato fatto in casi particolari, era già noto agli studiosi babilonesi. Con i Greci, però, esso assurse a livello di proposizione generale. Non ci è dato di sapere come il teorema sia stato scoperto. Fra le ipotesi che vengono avanzate una ricalca un procedimento simile a quello già illustrato all'inizio della precedente unità. Sembra dunque che Zeuthen sia d'accordo con Proclo per quanto concerne Pitagora. Dice, infatti, Proclo, riferendosi alla geometria: «*Pitagora trasformò questo studio in una forma di insegnamento liberale, risalendo ai primi principi e dimostrando i teoremi in maniera astratta e intellettuale*».

Insomma, secondo Proclo, si deve a Pitagora la scoperta della dimostrazione.

8.4.7 Di **Pitagora** (circa 580-500 a.C.), da cui prende il nome il teorema succitato, come del resto anche di Talete, abbiamo poche notizie. Nato nell'isola di Samo, a nord del Dodecanneso, non lontano da Mileto, sembra che abbia viaggiato molto, visitando in particolare l'Egitto e la Mesopotamia, per fermarsi stabilmente a Crotone, nell'Italia Meridionale, dove fondò una scuola, denominata poi "pitagorica", che persistette a lungo, anche dopo la sua morte. Nell'ambito di questa scuola furono fatte importanti scoperte matematiche. Ma, date le caratteristiche della stessa, che era una specie di setta religiosa, segreta e comunitaria, è difficile stabilire con esattezza la paternità di esse, che dovrebbero dunque

essere attribuite genericamente alla "scuola pitagorica" piuttosto che al suo fondatore. Detto per curiosità, a questa scuola erano ammesse anche le donne ed era una cosa veramente eccezionale.
Tra le scoperte che in campo geometrico la tradizione attribuisce alla scuola pitagorica vi sono le seguenti: a) il teorema di Pitagora; b) il teorema riguardante la somma degli angoli di un triangolo; c) l'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato.
La scoperta delle grandezze incommensurabili – attribuita dai più a **Ippaso** di Metaponto (ca. 500 a.C.) e avvenuta comunque dopo la morte di Pitagora – fu un duro colpo per la scuola pitagorica, la quale riteneva che il numero (naturale) fosse il "principio di tutte le cose". Invece, sulla base del numero non si riusciva a spiegare un fatto apparentemente semplice: se il lato di un quadrato è 1, nessun numero o rapporto di numeri può esprimere la lunghezza della diagonale di quel quadrato.
Pare che si cercasse di nascondere questo fatto sconvolgente ma senza riuscirvi poiché qualcuno diffuse la notizia. La leggenda racconta che il "delatore" fu lo stesso Ippaso. Però, secondo quanto asserisce Giamblico (IV sec. d.C.) nella *Vita di Pitagora*: «*Colui che per primo rivelò la natura delle grandezze commensurabili e incommensurabili agli indegni di partecipare a tale cognizione, si dice che incorresse in tanto odio che non solo fu escluso da ogni compagnia e convivenza, ma anche gli fu costruita una tomba, come se colui, che era una volta un compagno, davvero avesse cessato di vivere*».

8.4.8 La crisi apertasi con la scoperta delle grandezze incommensurabili, che porta con sé quella degli irrazionali, non venne risolta dai Greci con un ampliamento del concetto di numero, ma col rifiuto degli stessi numeri e con la ricerca di una sintesi in geometria. Giacché i segmenti si adattavano bene a qualsiasi situazione e i numeri invece no. E, di fatto, i libri cosiddetti aritmetici degli *Elementi* di Euclide (VII, VIII, IX) trattano sì della teoria dei numeri (naturali) ma rappresentati con segmenti opportuni.
Il merito di aver risolto la prima crisi della matematica fu di **Eudosso** di Cnido (circa 408-355 a.C.), contemporaneo di Platone, di cui secondo alcuni (Proclo) fu discepolo e secondo altri maestro.
Eudosso si servì di uno schema di ragionamento molto rigoroso, che nel XVII secolo sarebbe stato chiamato ***metodo di esaustione***. Avremo modo di riprenderlo nel prosieguo degli studi.

8.4.9 **Euclide** visse probabilmente fra il 330 e il 260 a.C., fu certamente attivo intorno al 300 a.C.. Della sua vita non si sa praticamente nulla, se si esclude che insegnò matematica ad Alessandria, dove era stato chiamato da Tolomeo I (306-283 a.C.). Si raccontano comunque due aneddoti. Li riprendiamo dall'Introduzione a "Gli Elementi" di Euclide, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, classici UTET, 1970.
«*Nel primo aneddoto (riferito da Proclo) ci è detto che il re Tolomeo chiese a Euclide se non vi fosse un mezzo più breve degli* Elementi *per imparare la geometria, e che Euclide gli rispose che non esistono vie regie in geometria*».
Nel secondo aneddoto (riportato da Stobeo (5)) si narra che un discepolo, dopo avere imparato taluno dei primi teoremi, chiese ad Euclide: "*Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose?" Ed Euclide chiamò allora un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato discepolo (ed evidentemente di cacciarlo via), poiché egli voleva trarre profitto da quanto imparava*».
Il nome di Euclide è inscindibilmente legato ai 13 libri degli ***Elementi***, che ci sono pervenuti integralmente, anche se egli scrisse altre opere, alcune pure rimasteci.
Degli *Elementi* siamo andati dicendo nel corso di questa breve nota. Ne facciamo una rapida sintesi:

[5] Giovanni Stobeo è un antologista macedone vissuto nel V sec. d.C.

- Nei primi 4 libri si svolge esclusivamente la geometria piana, per tutto ciò che può essere trattato indipendentemente dalla teoria delle proporzioni.
- Questa teoria costituisce l'oggetto del V libro.
- Nel VI ne vengono fatte delle applicazioni, in particolare alle proprietà delle figure simili.
- I libri VII, VIII e IX trattano della teoria dei numeri naturali e ne studiano le proprietà generali.
- Il libro X, il più complesso dell'opera, tratta dettagliatamente delle grandezze incommensurabili.
- I libri XI, XII e XIII si occupano della geometria solida. In particolare nel XII libro si fa uso per la prima volta (proposizione 2 e altre) del metodo di esaustione. L'opera si chiude con lo studio dei cinque poliedri regolari.

La sistemazione che trovò la geometria elementare con l'opera di Euclide rimase praticamente immutata per oltre duemila anni e, seppure con fasi alterne, dominò nell'insegnamento fino ai primi anni del Novecento, quando nelle scuole italiane addirittura veniva usato come testo scolastico di geometria *Gli Elementi d'Euclide con note, aggiunte ed esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei, per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi*.

Ma, in seguito ad alcune critiche, avviate già da tempo e riproposte con maggiore insistenza nella seconda metà dell'Ottocento, segnatamente dal matematico tedesco **David Hilbert** (1862-1943), gli *Elementi* subirono una sorta di riadattamento operato dallo stesso Hilbert, senza perdere però l'originaria organizzazione.

Un discorso più approfondito e completo sulla questione sarà ripreso nel seguito degli studi, ma molto più in là. Per il momento fermiamo qui le nostre considerazioni.

VERIFICHE [6]

1. Aree dei poligoni

1.1. Di un quadrato è nota l'area. La lunghezza del suo lato è:
A) il valore dell'area diviso per 2; B) il valore dell'area diviso per 4;
C) la radice quadrata dell'area; D) un valore diverso dai precedenti.
Una sola alternativa è corretta: quale?

1.2. Di un rettangolo sono note l'area e una dimensione. L'altra dimensione è data:
A) dal rapporto fra l'area e la dimensione nota; B) dalla differenza fra l'area e la dimensione nota;
C) dal prodotto fra l'area e la dimensione nota; D) da un valore diverso dai precedenti.
Una sola alternativa è corretta: quale?

1.3. Di un triangolo sono note l'area e la base. L'altezza è data:
A) dal rapporto fra l'area e il doppio della base; B) dal rapporto fra la base e il doppio dell'area;
C) dal rapporto fra il doppio della base e l'area; D) da un valore diverso dai precedenti.
Una sola alternativa è corretta: quale?

1.4. Ricorda come si definisce la mediana di un triangolo. Dimostra quindi che ogni mediana di un qualunque triangolo lo divide in due triangoli equivalenti.

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

1.5. Si consideri la seguente proposizione: “In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante”. Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [Tratto dall’esame di Stato 2007, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

[**R**. Unito il punto della base con il vertice opposto, il triangolo risulta diviso in due triangoli aventi … ; la somma delle loro aree è uguale all’area del triangolo dato, per cui … . A conti fatti, si trova che la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è uguale all’altezza del triangolo relativa ad uno dei lati uguali]

1.6. Considera un triangolo equilatero e un qualunque punto interno ad esso o appartenente ad uno qualunque dei lati. Dimostra che la somma delle distanze di tale punto dai lati del triangolo è uguale all’altezza del triangolo.

[**R**. Unito il punto con i vertici del triangolo, questo viene diviso in tre triangoli aventi …; per cui l’area del triangolo dato è uguale alla somma delle aree …]

1.7. Considerato il triangolo ABC, detto P un qualunque punto interno al lato BC e chiamati M ed N nell’ordine i punti medi dei lati AB e AC, dimostra che il quadrilatero PMAN è equivalente alla metà del triangolo ABC. [**R.** Tracciato il segmento AP, … . Per quanto dimostrato nell'esercizio 1.6, …]

1.8. Dimostra che, dei quattro triangoli in cui le diagonali dividono un trapezio, i due che non contengono le basi del trapezio stesso sono equivalenti.

[**R**. Questi due triangoli si ottengono togliendo uno stesso “pezzo” a …]

1.9. Dimostra che sono equivalenti i quattro triangoli in cui le diagonali dividono un parallelogramma.

1.10. Dimostra che il quadrato costruito su una diagonale di un quadrato ha area doppia di quella del quadrato dato.

1.11. Dimostra che la retta passante per i punti medi delle basi di un qualsiasi trapezio lo divide in due trapezi equivalenti.

1.12. Dimostra che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero assegnato ha area metà di quella del quadrilatero dato.

1.13. LABORATORIO DI MATEMATICA. Piazza S. Giovanni, in Roma, a causa di una manifestazione, era gremita di folla. Gli organizzatori, entusiasti, affermavano con enfasi: «Siano oltre 600 mila». Dagli uffici della Questura obiettavano: «I manifestanti non sono più di 200 mila». Il commentatore della televisione, con aria complice, mediava: «Diciamo che forse i manifestanti sono sui 400 mila». C’è qualcuno che dice il vero? Che spiegazione dai? (Ti può essere utile sapere che la piazza di cui si parla misura poco meno di 4 ettari e che un ettaro equivale a 10.000 m^2)

1.14. Fornisci un’interpretazione geometrica delle seguenti formule:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad a\,(b+c) = ab+ac.$$

1.15. Considerata la superficie ombreggiata in figura 22, calcola di essa l’area S e il perimetro P, nel caso in cui a, b siano lunghezze qualsiasi. Completa, quindi, la tabella sottostante, supponendo che le misure particolari di a, b siano espresse in metri.

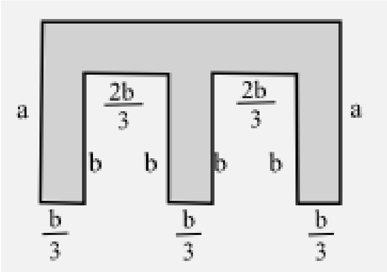

FIG. 22

a	b	S	P
3	2		
4	$\frac{3}{2}$		
$\frac{5}{2}$	2		
3 k	2 k		

1.16. Considerato il trapezio ABCD, sia AB la sua base minore. Si chiami E il punto in cui la parallela a BC condotta per A interseca la base CD e si chiami F il punto in cui tale base è intersecata dalla parallela ad AD condotta per B. Indicato con G il punto comune alle rette AE e BF, stabilire se l'area del quadrilatero AGFD è maggiore, minore o uguale a quella del quadrilatero BCEG.

1.17. a) Con riferimento al parallelogramma disegnato nella figura sottostante (Fig. 23a), quale percentuale del parallelogramma non è stata colorata?

[A] 65,25%. [B] 66,67%. [C] 68,75%. [D] Dati insufficienti per il calcolo.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

b) Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 23b), qual è il rapporto fra l'area della superficie colorata in rosso e quella colorata in verde?

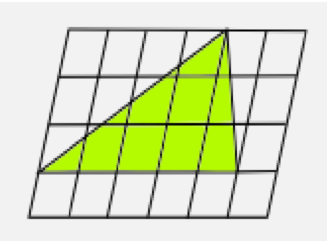

FIG. 23a

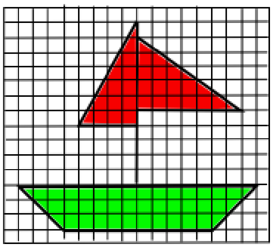

FIG. 23b

1.18. PROBLEMA RISOLTO. Considera il triangolo ABC, rappresentato in figura 24, dove AF è 1/3 di AB, BD è 1/3 di BC e CE è 1/3 di CA. Dimostra che l'area del triangolo PQR è uguale alla somma delle aree dei triangoli AFP, BDQ, CER.
[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

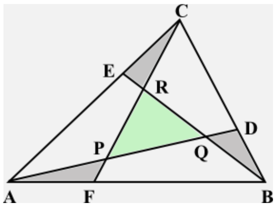

FIG. 24

RISOLUZIONE. Incominciamo a constatare che vale la seguente relazione:
S(ABC) – S(PQR) = [S(ABD)+S(BCE)+S(CAF)] – [S(AFP)+S(BDQ)+S(CER)].
D'altro canto, indicate con h_A, h_B, h_C le altezze del triangolo ABC uscenti rispettivamente da A, B, C, risulta:

$$S(ABD)=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot h_A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{BC}\cdot h_A=\frac{1}{3}S(ABC);\qquad S(BCE)=\frac{1}{2}\overline{CE}\cdot h_B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{CA}\cdot h_B=\frac{1}{3}S(ABC);$$

$$S(CAF)=\frac{1}{2}\overline{AF}\cdot h_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot h_C=\frac{1}{3}S(ABC).$$

Di modo che: S(ABC)=S(ABD)+S(BCE)+S(CAF) e di conseguenza:

S(PQR) = S(AFP)+S(BDQ)+S(CER).

NOTA BENE. Il triangolo PQR è noto come *triangolo di Feynman*. Prende il nome dal fisico statunitense Richard Feynman (1918-1988). In realtà, Feynman andò oltre la nostra dimostrazione. Dimostrò infatti che l'area del triangolo PQR è 1/7 di quella del triangolo ABC. Ma per questa dimostrazione sono necessari altri strumenti matematici, come la similitudine o il piano cartesiano o la trigonometria.

1.19. Nel triangolo ABC l'angolo in C è ottuso e i lati CA e CB sono disuguali. Siano D ed E le proiezioni ortogonali rispettivamente di A e B sulla retta della mediana CM del triangolo.

1) Dimostrare che:
   a) i triangoli CAM e CMB sono equivalenti;
   b) i triangoli EMA ed EMB sono equivalenti;
   c) il quadrilatero ADBE è un parallelogramma.
2) Sotto l'ipotesi che i triangoli BME e BCD siano equivalenti, dimostrare che: a) $\mathrm{ME} \cong \mathrm{CD}$; b) il triangolo CAM è isoscele; c) il triangolo ABC è equivalente al parallelogramma ADBE.

1.20. Posto che a, b, c siano tre lunghezze assegnate, con $a \geq b \geq c$ e $a+b+c \leq 1$, verificare mediante un'interpretazione geometrica che risulta: $a^2+3b^2+5c^2 \leq 1$.

[**R**. Costruito un quadrato di lato 1, si stacchino su ciascuno di due suoi lati consecutivi i segmenti adiacenti di lunghezze a, b, c e si costruiscano i quadrati … . Si può constatare che i 9 quadratini …]

1.21. Ammesso che le dimensioni di un rettangolo aumentino, una del 15% e l'altra del 10%, in quale percentuale aumenta l'area del rettangolo?

[A] 1,5% [B] 15% [C] 26,5% [D] 30% .

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

1.22. Internamente al quadrato ABCD si prenda il punto E in modo che il triangolo EAB sia equilatero.

a) Si "intuisce" che, dei triangoli AED e DEC, uno è acutangolo e l'altro è ottusangolo: è richiesto di dimostrarlo.
b) Dimostrare che, di tali medesimi triangoli, uno è commensurabile con il quadrato mentre l'altro non lo è.

2. Teoremi di Pitagora e di Euclide

2.1. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 5 cm e 12 cm. Quanto misura l'ipotenusa?

[A] 13 cm. [B] 15 cm. [C] 17 cm. [D] Un valore diverso dai precedenti.

Una sola alternativa è corretta: quale?

2.2. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 25 cm e 24 cm. Quanto misura l'altro cateto?

[A] 5 cm. [B] 7 cm. [C] 17 cm. [D] Un valore diverso dai precedenti.

Una sola alternativa è corretta: quale?

2.3. La diagonale di un quadrato misura 10 cm. Qual è la misura del lato?

[A] $10\sqrt{2}$ cm. [B] $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ cm. [C] $\left(10+\sqrt{2}\right)$ cm. [D] Un valore diverso dai precedenti.

Una sola alternativa è corretta: quale?

2.4. I triangoli OAB, OBC, OCD (Fig. 25) sono triangoli rettangoli, rispettivamente in A, in B, in C. Quanto misura OD?

[A] $\sqrt{10}$. [B] $\sqrt{5}$. [C] 3. [D] 2.

Una sola alternativa è corretta: trovarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

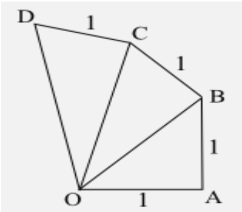

FIG. 25

2.5. PROBLEMA RISOLTO. Un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa misura 20 cm, ha un angolo di 30°. Calcolarne area e perimetro.

RISOLUZIONE. Nel triangolo ABC, rettangolo in A (Fig. 26), sia: $\overline{BC}=20$ (cm), $A\hat{B}C=30°$.
Intanto è evidente che l'angolo $A\hat{C}B$, essendo il complementare di $A\hat{B}C$, misura 60°.
Si costruisce ora il punto D in modo che A risulti il punto medio del segmento CD (più semplicemente si dice che D è il **punto simmetrico** di C rispetto ad A). Il triangolo BCD è equilatero: infatti, dalla congruenza dei due triangoli ABC e ABD segue che l'angolo $C\hat{D}B$ misura 60°. Quindi il triangolo BCD è equiangolo e dunque equilatero. Di modo che:

$$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC}\sqrt{3}=10\sqrt{3}\text{ (cm)},\quad \overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{DC}=10\text{ (cm)}.$$

Pertanto:

$$A(ABC)=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot10\cdot10\sqrt{3}=50\sqrt{3}\text{ (cm}^2\text{)},$$

$$P(ABC)=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10\sqrt{3}+20+10=30+10\sqrt{3}\text{ (cm)}.$$

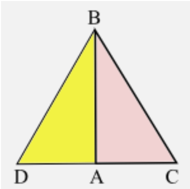

FIG. 26

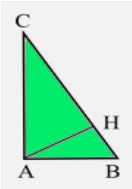

FIG. 27

2.6. PROBLEMA RISOLTO. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 5a e 12a, dove a è una lunghezza assegnata. Determinare l'altezza relativa all'ipotenusa.

RISOLUZIONE. Nel triangolo rettangolo ABC, sia H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa BC (Fig. 27). Indicata con S l'area del triangolo, a seconda che si consideri come sua base il cateto AC o l'ipotenusa BC, risulta evidentemente:

$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\ \text{ oppure }\ S=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH};$$

per cui deve essere: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\overline{AH}$; e da qui, dividendo entrambi i membri per $\overline{BC}$, si ottiene:

$$\overline{AH}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Conoscendo le lunghezze di AB ed AC, si tratta di calcolare quella di BC. Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2,\ \text{ da cui: }\ \overline{BC}^2=(5a)^2+(12a)^2=169a^2;\ \text{ e perciò:}\overline{BC}=13a.$$

Di conseguenza:

$$\overline{AH}=\frac{5a\cdot12a}{13a}=\frac{60}{13}a.$$

2.7. PROBLEMA RISOLTO. Dimostrare la seguente proprietà:
La mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga la metà dell'ipotenusa stessa.
Sapendo poi che l'ipotenusa è lunga 10 cm e che l'area del triangolo vale 24 cm^2, calcolare le misure dei cateti.
RISOLUZIONE. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A, sia D il punto medio dell'ipotenusa (Fig. 28). Condotte per D le corde DE e DF parallele rispettivamente ai cateti AC e AB, si spiega facilmente che il quadrilatero AEDF è un rettangolo: sicché le sue diagonali AD ed EF sono congruenti. D'altronde, siccome il segmento FD è parallelo e congruente ad EB, il quadrilatero FDBE è un parallelogramma. Perciò FE ≅ DB. Di conseguenza:

$$AD \cong DB \cong DC\,.$$

Come dire che la mediana AD è lunga per l'appunto la metà dell'ipotenusa BC. [c.v.d.]

Per inciso, proponiamo di dimostrare che FD è la metà di AB e DE è la metà di AC.

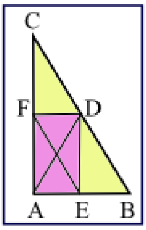

FIG. 28

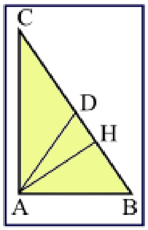

FIG. 29

Posto ora che BC sia lunga 10 cm, siccome l'area del triangolo è $S = 24\,cm^2$, l'altezza AH relativa all'ipotenusa (Fig. 29) è tale che:

$$S=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH},\ \text{ ossia }\ 24=5\,\overline{AH},\ \text{ per cui }\ \overline{AH}=4{,}8\text{ cm}.$$

Prendiamo adesso in esame il triangolo rettangolo AHD e osserviamo anzitutto che: $\overline{AD}=5$ cm, $\overline{AH}=4{,}8$ cm; per mezzo del teorema di Pitagora si trova: $\overline{HD}=1{,}4$ cm. Di conseguenza: $\overline{BH}=\overline{BD}-\overline{HD}=5-1{,}4=3{,}6$ (cm).
A questo punto è facile trovare (te ne lasciamo il compito) che: $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{AC}=8$ cm.

IMPORTANTE. Della proprietà enunciata sopra vale l'inversa:
Se una mediana di un triangolo è la metà del lato relativo ad essa allora il triangolo è rettangolo e il lato in questione ne è l'ipotenusa.
Per dimostrare questa proprietà basta constatare che vi sono degli interessanti triangoli isosceli e ricordare quanto vale la somma degli angoli interni di un triangolo.

2.8. I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 3 cm e 4 cm. Calcola: a) il perimetro e l'area del triangolo; b) l'altezza relativa all'ipotenusa; c) le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[**R.** 12 cm; 6 cm^2; 2,4 cm; 1,8 cm; 3,2 cm]

2.9. L'area di un rombo è 120 m^2 ed una sua diagonale misura 24 m. Calcola il perimetro del rombo e la distanza del punto in cui si secano le diagonali da uno dei lati. [**R.** 52 m; …]

2.10. Due lati consecutivi di un parallelogramma misurano 10 cm e 15 cm e l'angolo che essi formano è ampio 150°. Calcola l'area del parallelogramma.

2.11. Un lato di un triangolo e l'altezza relativa ad esso misurano rispettivamente 24 cm e 16 cm. Calcola l'area del triangolo.

Spiega perché i dati assegnati non sono sufficienti per calcolare il perimetro del triangolo. Fornisci un elemento (un dato numerico o una caratteristica particolare del triangolo) che ti consenta di calcolarne il perimetro. Confronta la tua scelta con quella dei tuoi compagni.

2.12. I lati di un triangolo misurano $5\ \text{cm}$, $12\ \text{cm}$ e $13\ \text{cm}$. Verifica che si tratta di un triangolo rettangolo e determina l'altezza relativa all'ipotenusa e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

2.13. In un trapezio rettangolo, il cui lato obliquo misura 30 cm, la diagonale minore, lunga $40\ \text{cm}$, è perpendicolare a tale lato. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. [**R.** 136 cm; 984 cm^2]

2.14. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e l'altezza relativa ad essa sono lunghe rispettivamente 20 m e $9{,}6\ \text{m}$. Calcola le lunghezze della mediana del triangolo relativa all'ipotenusa e il perimetro del triangolo stesso. [**R.** …; 48 m]

2.15. In un triangolo rettangolo la mediana e l'altezza relative all'ipotenusa sono lunghe rispettivamente $1{,}25\ \text{cm}$ e $1\ \text{cm}$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.

2.16. In un trapezio rettangolo la diagonale minore, lunga $10\ \text{cm}$, è perpendicolare al lato obliquo e forma con la base maggiore un angolo di $60°$. Calcola le misure dei lati del trapezio.
[**R.** 20 cm, $10\sqrt{3}$ cm, …]

2.17. Considerato un quadrilatero ABCD, si sa che gli angoli di vertici A, B, C misurano nell'ordine $90°$, $120°$, $45°$; si sa inoltre che la diagonale BD è lunga $2\ \text{m}$ e biseca l'angolo in B. Condotta per D la perpendicolare DE al lato BC, dimostra che i due triangoli ABD ed EBD sono congruenti e che il triangolo DEC è isoscele. Calcola quindi la misura del lato DC. [**R**. …; $\sqrt{6}$ m]

2.18. Considerato un triangolo equilatero, calcola il rapporto fra l'area del quadrato costruito su un suo lato e quella del quadrato costruito su una sua altezza.

2.19. ® Di un trapezio si conoscono le misure – $20\ \text{cm}$, $12\ \text{cm}$, $6\ \text{cm}$ – rispettivamente della base maggiore, della base minore e dell'altezza.
I dati forniti sono sufficienti per determinare l'area e il perimetro del trapezio?
Calcola le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che congiungono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.
[**R.** ...; $30\ \text{cm}^2$, $18\ \text{cm}^2$, $18\ \text{cm}^2$, $30\ \text{cm}^2$]

2.20. L'area di un rettangolo è $192\ \text{m}^2$. Calcola il suo perimetro sapendo che una diagonale misura $20\ \text{m}$.
[**R.** 56 m]

2.21. La base di un triangolo isoscele e l'altezza relativa ad essa misurano rispettivamente $16\ \text{cm}$ e $6\ \text{cm}$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. Calcola inoltre le misure dell'altezza e della mediana relative ad uno dei lati uguali. [**R.** …; 9,6 cm, $3\sqrt{17}$ cm]

2.22. La base minore di un trapezio isoscele misura $20\ \text{m}$ ed una sua diagonale lo divide in due parti, una equivalente ai $2/3$ dell'altra. Calcola la misura della base maggiore. Sapendo poi che l'area del trapezio è $75\ \text{m}^2$, determina l'altezza e il perimetro. [**R.** 30 m, 3 m, ...]

2.23. Calcola la lunghezza della mediana relativa al minore dei cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 26 cm ed area $156\ \text{cm}^2$. [**R.** $2\sqrt{130}$ cm]

2.24. Su ciascun lato, lungo 2 m, di un triangolo equilatero costruisci il quadrato esterno al triangolo e calcola il perimetro e l'area dell'esagono avente per vertici i vertici dei tre quadrati che però non siano vertici del triangolo dato. [**R**. $6\left(1+\sqrt{3}\right)$ m, $12\left(1+\sqrt{3}\right)\ \text{m}^2$]

2.25. Le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo sono lunghe $9\ \text{m}$ e $16\ \text{m}$. Calcola i perimetri e le aree dei due triangoli in cui l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo dato.
[**R.** 36 m, 48 m; ...]

2.26. In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Questa diagonale e l'altezza del trapezio misurano rispettivamente 4 cm e $2{,}4\text{ cm}$. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. [**R.** $13{,}6\text{ cm}, \ldots$]

2.27. L'area di un triangolo rettangolo è $96\,\text{m}^2$. Calcola il perimetro sapendo che l'ipotenusa misura $20\,\text{m}$.

2.28. Un triangolo equilatero ed un quadrato hanno uguale perimetro. Calcolare il rapporto fra l'area del triangolo e quella del quadrato. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4}{9}\sqrt{3}\right]$

2.29. Un triangolo equilatero ed un esagono regolare hanno uguale perimetro. Qual è il rapporto fra l'area dell'esagono e quella del triangolo? [**R.** $3/2$]

2.30. Un quadrato e un rettangolo hanno uguale perimetro. Calcolare il rapporto fra l'area del quadrato e quella del rettangolo sapendo che una dimensione del rettangolo è metà dell'altra. [**R.** 9/8]

2.31. Calcola l'area di un esagono regolare di lato lungo L. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}L^2\sqrt{3}\right]$

2.32. ® Calcola l'area di un ottagono regolare di lato lungo L. $\left[\mathbf{R.}\ 2L^2\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

2.33. Il seguente problema, concettualmente semplice, è importante sul piano storico, perché è presente, pur con sfumature diverse, sia nell'antica matematica babilonese (circa XIX sec. a.C.), sia in quella seleucida (circa IV sec. a.C.). È pure presente nella matematica indiana (Bhaskara, XII sec.), come anche nel *Liber abaci* (1202) di Leonardo Fibonacci e nella *Summa* (1494) di Luca Pacioli. Ovviamente gli studiosi che ai loro tempi lo affrontarono, lo risolvettero senza poter disporre nel nostro agile simbolismo. Tu prova, invece, a fare uso degli strumenti di cui disponi. Questo è il problema: «Un palo, lungo 30 cm e completamente appoggiato ad una parete, scivola lungo la parete, abbassandosi di 6 cm. Di quanto si è scostato dalla parete?» [**R.** 18 cm]

2.34. ® Nel trapezio ABCD, la base maggiore AB è lunga $5/2$ della base minore DC. Sapendo che l'area del triangolo ABC è 35 m^2, calcola l'area del trapezio. [**R.** 49 m²]

2.35. ® Considerato un quadrato ABCD, si supponga che due formiche si muovano, partendo contemporaneamente da A, dove sono esattamente sovrapposte l'una all'altra: la prima percorre di continuo il perimetro del quadrato sempre nello stesso verso di rotazione, la seconda percorre la diagonale AC in moti continui di andata e ritorno. Dimostra che, se le due formiche si muovono con la stessa velocità, non s'incontrano più dopo la partenza, nel senso che non saranno più esattamente sovrapposte.

2.36. Sulla base di un triangolo isoscele si consideri un punto P. L'altezza del triangolo relativa ad uno dei lati uguali misura 5 cm.

a) Spiega perché i dati sono sufficienti per calcolare la somma delle distanze di P dai lati uguali del triangolo. [cfr. es. n. 1.5]

b) I dati sono sufficienti per calcolare l'area del triangolo? Se non lo sono, introduci un altro dato che permetta questo calcolo. Confronta la tua scelta con quella dei tuoi compagni.

2.37. Su una mediana di un triangolo equilatero si consideri un punto P. Sapendo che la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è uguale a $10\ \text{m}$, dire se i dati sono sufficienti per calcolare il perimetro e l'area del triangolo. [cfr. es. n. 1.6]

2.38. Di un triangolo rettangolo si conosce la misura dell'ipotenusa, che è 10 cm.

a) Spiega perché il dato è sufficiente per calcolare la misura della mediana del triangolo relativa all'ipotenusa.

b) Il dato è sufficiente per calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa? Se non lo è, integralo introducendo un altro dato, che non sia ovviamente tale altezza ma ti permetta di calcolarne la misura.

2.39. Di un triangolo si conoscono le misure di un lato e dell'altezza relativa ad esso, che sono rispettivamente: 14 cm e 8 cm. Si sa, inoltre, che la proiezione ortogonale di uno degli altri due lati sul lato assegnato misura 6 cm. Spiegare se i dati sono essenziali o sovrabbondanti per calcolare: a) l'area del triangolo; b) il perimetro del triangolo.

2.40. Di un triangolo si conoscono le misure dei lati, che sono 10 cm, 17 cm, 21 cm, e quella dell'altezza relativa al lato maggiore, che è 12 cm. Spiegare se questi dati sono contraddittori o sovrabbondati per calcolare la sua area.

2.41. I lati AB e BC del parallelogramma ABCD misurano rispettivamente 12 cm e $6\sqrt{2}$ cm e, inoltre, la diagonale BD misura pure $6\sqrt{2}$ cm. Calcolare l'area di ciascuna delle parti in cui il parallelogramma è diviso dalla perpendicolare alla diagonale minore nel suo punto medio.

2.42. È assegnato il quadrato ABCD, il cui lato misura 8 cm. Sul lato BC è preso il punto E e sul lato CD il punto F in modo che i segmenti BE e CF misurino entrambi 6 cm.
a) Dimostrare che le corde AE e BF sono perpendicolari.
b) Calcolare le aree delle quattro regioni in cui il quadrato è diviso da tali corde.

[**R.** a) ... ; b) 8,64 cm^2, 15, 36 cm^2, 15,36 cm^2, 24,64 cm^2]

2.43. Considerato il quadrato ABCD di lato lungo 12 u, dove u è una lunghezza assegnata, si dica E il punto del lato AB tale che AE = 4 u. Tracciata per A la perpendicolare a DE, si chiami F il punto in cui essa interseca il lato BC e G il punto in cui interseca la corda DE. Calcolare l'area del triangolo DFG.

$\left[\mathbf{R.}\ \frac{252}{5}u^2\right]$

2.44. ® I tre fratelli Aldo, Giovanni e Giacomo hanno ricevuto in eredità dai loro genitori un appezzamento di terreno avente la forma di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi 72 m e 96 m. Vorrebbero suddividere l'appezzamento in tre parti ugualmente estese ma non sanno come fare. Sei in grado di suggerire loro qualche soluzione?

2.45. PROBLEMA RISOLTO. Considerato il quadrato ABCD e chiamato P un qualsiasi punto interno ad esso, dimostrare che si ha: $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$.

RISOLUZIONE (traccia). Condotte per il punto P le parallele ai lati del quadrato, si indichino con a il lato del quadrato e con b e c rispettivamente le distanze di P dai lati AB e BC. Si calcola $\overline{PA}^2$, $\overline{PC}^2$, $\overline{PB}^2$, $\overline{PD}^2$ applicando il teorema di Pitagora a 4 convenienti triangoli rettangoli. Si verifica infine che vale la relazione da dimostrare.

2.46. Il punto P è un punto interno al quadrato ABCD tale che: $A\widehat{P}B=90°$, $\overline{AP}=1$, $\overline{BP}=2$. Calcolare le distanze di P dai vertici C e D.

2.47. L'area del triangolo ABC è 84 cm^2, mentre i lati AB e AC misurano rispettivamente 21 cm e 10 cm. Preso, internamente al lato AB, il punto D tale che l'area del triangolo ACD sia doppia di quella del triangolo BCD, calcolare la misura della corda CD. [**R.** $8\sqrt{2}$ cm]

2.48. È dato il segmento OA, lungo 1 cm. Si tracci il segmento AB, perpendicolare ad OA e lungo 1 cm. Si tracci quindi, da parte opposta di A rispetto ad OB, il segmento BC, perpendicolare ad OB e lungo 1 cm. Si tracci infine, da parte opposta di B rispetto ad OC, il segmento CD, perpendicolare ad OC e lungo 1 cm. Calcolare il perimetro e l'area del pentagono OABCD.

2.49. Un triangolo isoscele ha area 12 cm^2. Determinare le misure dei suoi lati sapendo che, espresse in centimetri, sono numeri interi. [**R**. 2 triangoli: 6, 4, 4; 8, 3, 3]

2.50. Il triangolo ABC è rettangolo in B. Il cateto BC e la mediana AM misurano rispettivamente 80 cm e 50 cm. Si chiamino D ed E le proiezioni ortogonali rispettivamente di B e C sulla retta AM. a) Calcolare l'area del triangolo AMC. b) Dimostrare che il quadrilatero BDCE è un parallelogramma. c) Calcolare l'area di tale parallelogramma. [**R.** a) 600 cm^2, b) ... , c) 1536 cm^2]

2.51. Nel parallelogramma ABCD si ha: $AB=2\ AD$, $B\widehat{A}D=60°$. Dopo aver tracciato le bisettrici dei suoi angoli interni, dimostrare che:

a) i punti in cui tali bisettrici s'intersecano sono vertici di un rettangolo;

b) due vertici opposti di tale rettangolo appartengono uno al lato AB ed uno al lato CD.

2.52. Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, sia M il punto medio dell'ipotenusa e sia $B\widehat{M}C=60°$. Si prenda sul cateto AC il punto P tale che $M\widehat{P}A=60°$.

a) Stabilire quali delle seguenti relazioni sono vere e quali sono false, fornendo esauriente spiegazione delle risposte:

$$1)\ AC>BC;\quad 2)\ CM>CB;\quad 3)\ P\widehat{M}A<90°,\quad 4)\ PM=PC.$$

b) Posto che la lunghezza del segmento PM sia a, calcolare il perimetro e l'area del triangolo ABC.

2.53. Con riferimento alla sottostante figura (Fig. 30), dove è rappresentato il quadrato ABCD, a e b sono lunghezze assegnate. Inoltre: AHPQ e RFES sono quadrati, mentre HBML, LMGP, FGCE, QRSD sono rettangoli. Trovare quale polinomio in a, b rappresenta:

a) la lunghezza del lato del quadrato ABCD; b) l'area dello stesso quadrato;

c) l'area del rettangolo FGCE; d) il perimetro di tale rettangolo;

e) l'area del rettangolo HBML; f) il perimetro di tale rettangolo.

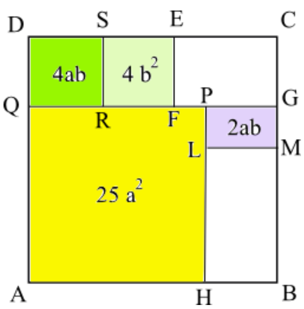

FIG. 30

2.54. Nel quadrilatero ABCD si ha: $AB=AD=a$, $B\widehat{A}D=60°$, $A\widehat{B}C=A\widehat{D}C=90°$, dove a è una lunghezza assegnata. a) Dimostrare che $BC=CD$. b) Calcolare l'area del quadrilatero.

[**R.** a) Prolungati i lati AB dalla parte di B e DC dalla parte di C, ...; b) $a^2/\sqrt{3}$]

2.55. ® I numeri naturali $a,\ b,\ c$ sono le misure, rispetto alla medesima unità di misura, di tre segmenti. Sapendo che si tratta di numeri primi tali che $a>c>b$, determinarli in modo che l'area del rettangolo di dimensioni $a+b$ e c sia 80. [**R.** $13, 3, 5$]

2.56. Nel trapezio rettangolo ABCD il lato perpendicolare alle basi è AB, BC è la base maggiore ed E è il punto d'incontro delle diagonali.

a) Dimostrare che i triangoli AEB e CED sono equivalenti.

b) Sapendo che le aree dei due triangoli ABC e ABD sono rispettivamente $96\ cm^2$ e $42\ cm^2$, calcolare l'area del trapezio.

c) Sapendo poi che la somma delle basi del trapezio è 23 cm, calcolarne il perimetro.

[**R.** … ; c) 50 cm]

2.57. L'esagono ABCDEF, disegnato nella figura sottostante (Fig. 31) è equilatero, vale a dire che ha i lati uguali. Inoltre gli angoli di vertici A, C, E sono retti. a) Calcolare le ampiezze degli angoli di vertici B, D, F. b) Posto che sia a la lunghezza di ciascun lato dell'esagono, calcolare la sua area.

$$\left[\mathbf{R.}\ a)\ ...;\ \ b)\ \frac{a^2}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)\right]$$

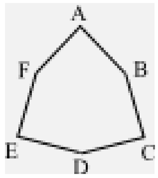

FIG. 31

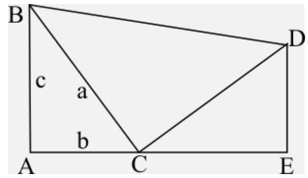

FIG. 32

2.58. È dato il triangolo rettangolo ABC (Fig. 32), di ipotenusa a e cateti b e c. Si costruisce, da parte opposta del triangolo dato il triangolo BCD, isoscele sulla base BD, e si indica con E il piede della perpendicolare condotta da D sulla retta AC. Ragionando su due modi diversi di calcolare l'area del quadrilatero ABDE, dimostrare il teorema di Pitagora relativo al triangolo ABC, vale a dire: $a^2=b^2+c^2$.

[N.B.: Del teorema di Pitagora esistono centinaia di dimostrazioni. Quella che abbiamo descritto noi è una delle tante, forse la più intuitiva. Una di tali dimostrazioni, basata su considerazioni algebriche e geometriche, è attribuita al 20° presidente degli USA, James Adam Garfield (1831-1881), che l'avrebbe pubblicata nel 1876, quando ancora non era presidente. È questa dimostrazione che ti abbiamo proposto]

2.59. Nella figura a fianco (Fig. 33) è ombreggiato un ennagono (poligono con 9 lati), la cui area è $84\ m^2$. Calcolare le misure dei suoi lati.

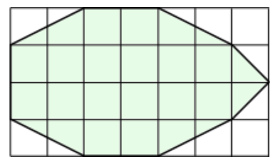
FIG. 33

2.60. Sia dato un filo lungo 24 cm, tenuto teso fra due punti A e B. Supponi adesso che il filo sia allungato di 2 cm e, fissato sempre per gli stessi estremi A e B, sia tirato per il suo punto medio M in modo che risulti teso. Ovviamente il punto M si allontana dalla retta AB. a) Senza fare calcoli, ma solo ad intuito, di quanto valuti che il punto M si sia allontanato dalla retta AB: di meno di 1 cm, di 1 cm, di più di 1 cm? b) Fatti i debiti calcoli, il risultato che hai trovato corrisponde alle tue previsioni?

2.61. È dato il triangolo rettangolo ABC, i cui cateti AB e AC misurano rispettivamente 48 cm e 36 cm. Determinare il punto D sul lato AB ed i punti E e F sul lato CB in modo che i 4 triangoli CAE, EAD, EDF, FDB, in cui è ripartito il triangolo dato, siano equivalenti.

[**R.** Attenzione! Non occorrono speciali calcoli. Basta riflettere sul triangolo CAE e constatare che la sua area è … e che ha, rispetto al triangolo ABC, la stessa altezza uscente da A, per cui CE misura …; poi riflettere analogamente sul triangolo EAD e trovare che AD misura … e infine … . Si trova: CE=15 cm, AD=16 cm, EF=22,5 cm]

2.62. I seguenti esercizi si risolvono più o meno allo stesso modo e richiedono il ricorso alle terne pitagoriche:

A) Dimostrare che esiste uno ed un solo numero naturale N tale che $85-N$ e $84+N$ siano numeri naturali quadrati perfetti.

B) Dimostrare che non esiste alcun numero naturale N tale che $72-N$ e $72+N$ siano numeri naturali quadrati perfetti.

C) Dimostrare che esiste almeno un numero naturale N tale che $N-8$ e $N+8$ siano numeri naturali quadrati perfetti oppure, viceversa, dimostrare che non esiste alcun numero N siffatto.

[**R.** A) Devono esistere due numeri naturali h, k tali che $85-N=h^2$, $84+N=k^2$, per cui, sommando membro a membro queste due uguaglianze, si ha: $13^2=h^2+k^2$; gli unici valori possibili di h, k sono: h=5, k=12; di conseguenza: N=60; B) … ; C) …]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che la distanza d di due lati opposti di un rombo di lato lungo a e diagonali d' e d" è espressa dalla formula: $d=\frac{d'd''}{2a}$?
2. È vero che in un triangolo rettangolo avente un angolo acuto di 30° il cateto opposto a quest'angolo è lungo la metà dell'ipotenusa?
3. Un quadrato ed un triangolo equilatero hanno uguale area. Quanto vale il rapporto fra il lato del quadrato e quello del triangolo?
4. È vero che un trapezio è equivalente ad un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è lunga quanto la somma delle basi del trapezio mentre l'altezza relativa ad essa è uguale all'altezza del trapezio?
5. È corretto affermare che, in virtù del teorema di Pitagora, l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei cateti?
6. Un trapezio rettangolo ha le diagonali perpendicolari. È vero che il quadrato costruito sulla sua altezza è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le sue basi?
7. È vero che il rapporto fra il lato di un triangolo equilatero e la sua altezza è $1/\sqrt{3}$?
8. Quale relazione lega la mediana di un triangolo rettangolo relativa all'ipotenusa e l'ipotenusa medesima?
9. È vero che la somma delle distanze di un qualsiasi punto interno ad un triangolo equilatero dai lati del triangolo è maggiore dell'altezza del triangolo?
10. In un triangolo, un lato e l'altezza relativa ad esso misurano rispettivamente 4 cm e 3 cm. Cosa si può dire del perimetro P del triangolo?
    [A] P = 12 cm   [B] P < 12 cm
    [C] P > 12 cm   [D] Dati insufficienti per un confronto con 12 cm
    Individuare l'alternativa corretta e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
11. Dimostrare che esiste almeno una coppia di due numeri interi positivi x, y (con $x<y$) tali che:
    a) $x^2+y^2=17^2$;   b) $x^2+y^2=85^2$.

RISPOSTE.

1. Sì. Infatti, potendosi considerare il rombo come un parallelogramma di base a ed altezza d, si ha: $d=A/a$, dove A è l'area del rombo. Questa, peraltro, può essere espressa come semiprodotto delle diagonali. Da cui la formula indicata.
2. Sì. Il triangolo, infatti, può essere pensato come la metà di un triangolo equilatero di lato uguale alla sua ipotenusa.
3. Se L_4 ed L_3 indicano i lati del quadrato e del triangolo equilatero, mentre A_4 ed A_3 indicano le loro aree, risulta:
   $$A_4=L_4^2,\ \ A_3=\frac{\sqrt{3}}{4}L_3^2;$$
   di conseguenza:
   $$L_4^2=\frac{\sqrt{3}}{4}L_3^2 \text{ e perciò: } \frac{L_4^2}{L_3^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\text{, ossia: } \left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2=\frac{3^{1/2}}{4}\text{, da cui: } \frac{L_4}{L_3}=\left(\frac{3^{1/2}}{4}\right)^{1/2}=\frac{3^{1/4}}{4^{1/2}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}.$$
4. Sì. Infatti trapezio e triangolo hanno la stessa area.

5. No. L'ipotenusa è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei cateti.

6. La risposta, che comunque è sì, richiede la conoscenza di una particolare costruzione geometrica: si prolunga la base maggiore del trapezio, dalla parte dell'angolo retto, di un segmento congruente alla base minore; dopo aver congiunto il secondo estremo di questo segmento col vertice dell'angolo retto della base minore, si ottiene un triangolo, che si dimostra essere rettangolo. Il seguito è abbastanza elementare ove si tenga presente il 2° teorema di Euclide.

7. No. Tale rapporto è $\sqrt{3}$.

8. La mediana relativa all'ipotenusa è lunga la metà dell'ipotenusa.

9. No. È uguale all'altezza del triangolo.

10. Se i dati assegnati fossero i cateti di un triangolo rettangolo, il perimetro del triangolo sarebbe effettivamente 12 cm. Ma solo in questo caso. Negli altri casi potrebbe essere maggiore o minore di 12 cm. [D] è l'alternativa corretta.

11. Nel caso a) la risposta è immediata: basta constatare che i numeri 15, 8, 17 formano una terna pitagorica, avente come "ipotenusa" il numero 17. Di conseguenza si ha la seguente soluzione: $x=8,\ y=12$. E ciò basta ai fini del quesito. In realtà la soluzione mostrata è l'unica possibile.

Anche nel caso b) si avrebbe una risposta quasi immediata. Basta constatare che 85=5·17 e agire di conseguenza, trovando una soluzione: $x=3\cdot17=51,\ y=4\cdot17=68$. E ciò basta ai fini del quesito.

Vogliamo però andare avanti mostrando che esistono altre soluzioni.

Intanto ce ne una seconda immediata: basta scambiare i ruoli di 5 e 17 e, procedendo come sopra, si trova la soluzione $x=5\cdot8=40,\ y=5\cdot15=75$.

Procediamo adesso con l'attribuire ad m, n nella tabella in 8.2.4 valori successivi: ebbene, per $m=7$ ed $n=6$, si trova: $x=13,\ y=84$, e per $m=9$ ed $n=2$ si trova: $x=36,\ y=77$. Non ci sono altre soluzioni.

Per queste due ultime coppie si potrebbe seguire, volendo, una via più sofisticata, chiamando in causa le terne pitagoriche. Anzitutto bisogna osservare che si ha:

$$85^2=(17\cdot5)^2=17^2\cdot5^2=(15^2+8^2)(4^2+3^2)\,.$$

Occorre poi ricordare che si ha:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

per cui, nel caso specifico in cui si pone: a=15, b=8, c=4, d=3, si trova: …; e nel caso in cui i pone: a=15, b=8, c=3, d=4, si trova: … . .

LETTURA

LA DUPLICAZIONE DEL QUADRATO

Prima della lettura ti proponiamo di risolvere il seguente problema, che possiamo denominare "*problema della duplicazione del quadrato*".

♦ PROBLEMA. È assegnato un quadrato. Costruire geometricamente, utilizzando soltanto riga e compasso, il quadrato di area doppia.

A questo punto dei tuoi studi non dovresti trovare eccessiva difficoltà a risolverlo. Ma pensa che questo problema ha costituito oggetto di interesse di un grande filosofo dell'antica Grecia: l'ateniese **Platone**, 428-437 a. C. Egli, in una delle sue opere che vanno sotto il nome di *Dialoghi*, dal titolo ***Menone***, descrivendo l'azione educativa del suo maestro **Socrate** nei confronti di un allievo, immagina il seguente interessante dialogo, finalizzato per l'appunto alla risoluzione del problema succitato [7]:

---

[7] L'azione educativa di Socrate è detta *maieutica* poiché del tutto simile all'arte dell'ostetrica.

Socrate - Dimmi, ragazzo: sai che questo spazio qui è un quadrato?

Ragazzo - Sì, lo so.

Socrate - Questo è un quadrato: ha cioè uguali i quattro lati AB, BC, CD, DA?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Se il lato del quadrato è lungo 2 cm quanti centimetri quadrati vale l'area?

Ragazzo - 4 cm^2, Socrate.

Socrate - Non si potrebbe costruire un quadrato di area doppia di quello dato?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Di quanti centimetri quadrati sarà?

Ragazzo - Di otto.

Socrate - Cerca ora di dirmi quanto sarà lungo ciascun lato del quadrato di area doppia. Il lato del quadrato dato è di 2 cm. Quanto sarà lungo il lato del quadrato doppio?

Ragazzo - Ma è evidente, Socrate: sarà il doppio.

Socrate - Dimmi: secondo te dal lato doppio risulta area doppia?

Ragazzo - Sì, mi sembra.

Socrate - Questo lato (AB) non diventa forse doppio se aggiungiamo, di seguito, un segmento uguale?

Ragazzo - Certamente.

Socrate - Questo lato doppio, tu dici, è quello di un quadrato di area 8 cm^2 ?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Tracciamo dunque questo quadrato (Fig. 34). Tu dici che la sua area è 8 cm^2 ?

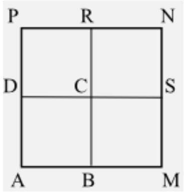

FIG. 34

Ragazzo - Proprio così.

Socrate - Ma in questo nuovo quadrato non sono forse contenuti quattro quadrati come quello di partenza avente l'area di 4 cm^2 ?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Quanto è grande dunque il nuovo quadrato? Non è forse quattro volte quello di partenza?

Ragazzo - E come no?

Socrate - E se è quattro volte l'altro è forse il suo doppio?

Ragazzo - No, per Giove.

Socrate - E quant'è?

Ragazzo - È il quadruplo.

Socrate - Dal lato doppio dunque, ragazzo, non risulta area doppia, ma quadrupla.

Ragazzo - È vero.

Socrate - E quattro volte quattro fa sedici, no?

Ragazzo - Sì.

Socrate - E da quale lato otterremo il quadrato di 8 cm^2 ? Questo lato (AM) non ci dà forse il quadrato quadruplo?

Ragazzo - Sì.

Socrate - E questo lato (AB) ci dà il quadrato di 4 cm^2 ?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Sia: il quadrato di 8 cm^2 non è forse il doppio di questo (ABCD) e la metà di quello (AMNP)?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Dunque non dovremmo cercare un segmento maggiore di questo (AB) e minore di quello (AM)?

Ragazzo - Mi sembra che sia così.

Socrate - Ebbene: cerca di dirmi di quale lunghezza deve essere.

Ragazzo - Di 3 cm.

Socrate - Perché il lato sia lungo 3 cm, aggiungiamo a questo lato (AB) la sua metà

Il dialogo è tratto da: Attilio FRAJESE (a cura di), *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Editrice Studium, 1963, ma con qualche adattamento (i Greci non usavano certamente i centimetri) e qualche taglio per renderlo più vicino al linguaggio moderno.
A titolo di curiosità, ci piace ricordare che Socrate e Gesù sono gli unici grandi personaggi storici a non aver lasciato nessuna testimonianza scritta.

(BT) (Fig. 35): non si otterrà così un segmento (AT) di 3 cm ?

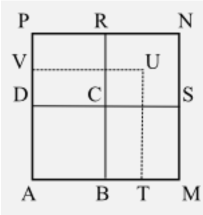

FIG. 35

Ragazzo - Sì.

Socrate - E poiché questo segmento (AT) è di 3 cm e quest'altro (TU) è pure di 3 cm, tutto il quadrato (ATUV) avrà l'area di 9 cm^2, non è vero?

Ragazzo - Sembra di sì.

Socrate - E il quadrato doppio di quanti centimetri quadrati doveva essere?

Ragazzo - Di otto.

Socrate - Dunque dal lato di 3 cm non si genera il quadrato di area 8 cm^2.

Ragazzo - No di certo.

Socrate - E da quale lato allora? Cerca di dirmelo giustamente e se non vuoi calcolarlo mostra qui sul disegno da quale lato si generi il quadrato richiesto.

Ragazzo - Ma per Giove, o Socrate, non lo so.

Socrate - Ma ora dimmi ancora: questo quadrato (ABCD) non è di 4 cm^2 ?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Aggiungiamogli accanto un altro quadrato ad esso uguale (BMSC) (Fig. 35).

Ragazzo - Va bene.

Socrate - Ed anche un terzo (SNRC) uguale a ciascuno dei primi due.

Ragazzo - Va bene.

Socrate - E non vogliamo ora riempire lo spazio vuoto in quest'angolo (angolo $D\widehat{C}R$)?

Ragazzo - Riempiamolo.

Socrate - Non abbiamo così quattro quadrati uguali?

Ragazzo - Sì.

Socrate - E tutt'e quattro insieme formano un quadrato (AMNP), che quante volte è quello di partenza (ABCD)?

Ragazzo - È quadruplo.

Socrate - Doveva essere invece doppio, non ti ricordi?

Ragazzo - Certo che lo ricordo.

Socrate - Ma questi segmenti (DB, BS, SR, RD) che andiamo a tracciare (Fig. 36) non tagliano esattamente a metà ciascuno dei quattro quadrati?

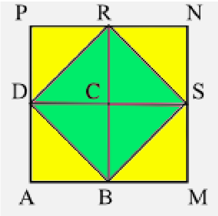

FIG. 36

Ragazzo - Sì.

Socrate - Dunque non abbiamo qui forse quattro lati uguali (DB, BS, SR, RD) che comprendono tra loro questo spazio (BSRD)?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Guarda ora: quanto misura questo nuovo quadrato?

Ragazzo - Non lo so.

Socrate - Ma i segmenti tracciati (DB, BS, SR, RD) non dividono forse internamente per metà ciascuno dei quattro quadrati?

Ragazzo - Sì.

Socrate - E quante di queste metà ci sono nel tutto?

Ragazzo - Quattro.

Socrate - E quante metà vi sono in questo quadrato di partenza?

Ragazzo - Due.

Socrate - E quattro che cosa è di due?

Ragazzo - Il doppio.

Socrate - Di quanti cm^2 è dunque questo quadrato (BSRD)?

Ragazzo - Di otto.

Socrate - E qual è il lato di questo nuovo quadrato?

Ragazzo - Questo (DB).

Socrate - Cioè il segmento che andando da un angolo all'altro taglia il quadrato di partenza?

Ragazzo - Sì.

Socrate - Ebbene: i sapienti chiamano *diagonale* questo segmento. Cosicché, se questo segmento si chiama diagonale, è proprio dalla diagonale che si genera il quadrato di area doppia.

Ragazzo - Proprio così, Socrate.