Prerequisiti:

- Nozioni di probabilità e statistica

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire i tassi di sopravvivenza e di mortalità*
- *calcolare la probabilità di sopravvivenza o di morte di una persona, a determinate condizioni*
- *definire i concetti di vita probabile e di speranza di vita*

Questa unità è un esempio di applicazione delle nozioni di statistica e probabilità in una situazione reale. In verità il suo studio non è previsto esplicitamente dalle "Indicazioni Nazionali" né dalle "Linee Guida". Valuterà il docente se trattarne o meno.

Assicurazioni sulla vita: nozioni fondamentali

Unità 82

82.1 GENERALITÀ

82.1.1 Il Codice Civile (art. 1882) definisce l'assicurazione come "il contratto con il quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a risarcire l'assicurato, entro i limiti stabiliti, del danno provocato da un sinistro, oppure a corrispondere un capitale o una rendita al verificarsi di un evento riguardante la vita umana".

In altre parole, con un contratto assicurativo (detto anche ***polizza*** di assicurazione) un soggetto (l'***assicurato***) paga una certa somma (il ***premio***) ad un altro soggetto (l'***assicuratore***) per:

a) ricevere un risarcimento adeguato in caso di un evento casuale (il sinistro) che possa provocargli un danno previsto dal contratto (***assicurazione danni***),
b) vedersi corrisposta una somma al verificarsi di altri eventi casuali, essi pure previsti dal contratto, come, per esempio, essere in vita o essere morto in un determinato anno (***assicurazione sulla vita***).

Noi non ci occuperemo delle assicurazioni danni ma soltanto delle assicurazioni sulla vita.

82.1.2 Le **assicurazioni sulla vita** sono sostanzialmente di due tipi:

1) assicurazioni in caso di vita, 2) assicurazioni in caso di morte.

- Nelle ***assicurazioni in caso di vita***, l'assicuratore assume l'impegno di pagare un certa somma, tutta in una volta o a rate, all'assicurato soltanto se quest'ultimo è in vita in una determinata epoca precisata nella polizza di assicurazione.
- Nelle ***assicurazioni in caso di morte***, l'assicuratore paga la somma concordata nel contratto agli eredi dell'assicurato in caso di morte di quest'ultimo entro un periodo stabilito nella polizza di assicurazione.

Oltre alle predette, c'è una forma di assicurazione che contempla una combinazione delle due forme precedenti: si chiama ***assicurazione mista***.

Ora, si capisce che il premio, che l'assicurato versa all'assicuratore, al momento della stipulazione del contratto di assicurazione, non può essere una costante, ma dipende da fattori casuali come l'essere in vita o essere morto all'epoca in cui si presume di riscuotere la somma concordata. Per cui acquista importanza la conoscenza della probabilità di essere in vita o essere morto ad una determinata epoca.

82.2 TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA. TASSI DI SOPRAVVIVENZA E DI MORTALITÀ

82.2.1 La conoscenza della probabilità che ha un individuo di una data età di essere in vita ad una determinata epoca può avvenire solo in maniera empirica, per esempio analizzando quanti, fra gli individui che compongono una comunità, sopravvivono anno dopo anno. E, sulla base dei dati sperimentali osservati, calcolare la probabilità cercata.

Solitamente, per la costruzione di tabelle che indichino quanti, fra i componenti di una data comunità, sopravvivono anno dopo anno, si fa riferimento ad una generazione di 100.000 nati e si conta quanti di essi sono ancora vivi dopo x anni, partendo dall'età di **0** anni per arrivare all'età di **ω** anni (dove ω rappresenta l'età più avanzata, detta anche ***età estrema***, nel senso che, mentre è ancora in vita qualche individuo della comunità che ha ω−1 anni, non ne esiste alcuno che ha ω anni).

Ebbene, sulla base di questa tabella, chiamata ***tavola di sopravvivenza***, possiamo calcolare, per ogni età x, il numero L_x dei viventi di una certa comunità che hanno quella età.

In realtà, come si può facilmente capire, non è semplice seguire un campione di 100.000 individui dalla

nascita alla morte. Per questo, sotto speciali condizioni che garantiscano le cosiddette *ipotesi di stazionarietà e di omogeneità* (per esempio: non si sono verificate catastrofi né guerre, è rimasta praticamente uguale a zero la differenza fra emigrati ed immigrati, eccetera), si considera un campione fittizio, prendendo una popolazione statistica di 100.000 soggetti e rilevando in essa il numero dei viventi L_x di età x, al variare di x da 0 ad ω. Ovviamente $L_\omega=0$. Questi rilevamenti sono alla base della costruzione delle tavole di sopravvivenza.
Affinché si abbia chiara l'idea di un tale importante strumento, forniamo la tavola di sopravvivenza relativa ad una determinata popolazione (Tab. 1).

TAB.1 - TAVOLA DI SOPRAVVIVENZA

Età	N° viventi	Età	N° viventi	Età	N° viventi	Età	N° viventi	Età	N° viventi
0	100.000	**20**	99.164	**40**	97.967	**60**	92.175	**80**	62.724
1	99.658	**21**	99.125	**41**	97.841	**61**	91.577	**81**	59.454
2	99.607	**22**	99.093	**42**	97.715	**62**	90.893	**82**	56.209
3	99.573	**23**	99.058	**43**	97.590	**63**	90.148	**83**	53.031
4	99.556	**24**	99.019	**44**	97.462	**64**	89.411	**84**	49.872
5	99.551	**25**	98.970	**45**	97.341	**65**	88.669	**85**	46.330
6	99.546	**26**	98.914	**46**	97.206	**66**	87.819	**86**	42.327
7	99.537	**27**	98.856	**47**	97.034	**67**	86.859	**87**	37.978
8	99.527	**28**	98.796	**48**	96.820	**68**	85.759	**88**	33.727
9	99.517	**29**	98.740	**49**	96.559	**69**	84.663	**89**	29.726
10	99.507	**30**	98.695	**50**	96.271	**70**	83.487	**90**	25.947
11	99.492	**31**	98.658	**51**	95.979	**71**	82.220	**91**	22.338
12	99.447	**32**	98.615	**52**	95.680	**72**	80.769	**92**	18.892
13	99.407	**33**	98.562	**53**	95.386	**73**	79.129	**93**	15.635
14	99.366	**34**	98.504	**54**	95.058	**74**	77.362	**94**	12.623
15	99.324	**35**	98.451	**55**	94.682	**75**	75.378	**95**	10.071
16	99.272	**36**	98.388	**56**	94.260	**76**	73.176	**96**	7.879
17	99.230	**37**	98.293	**57**	93.783	**77**	70.838	**97**	5.935
18	99.215	**38**	98.193	**58**	93.261	**78**	68.396	**98**	4.351
19	99.196	**39**	98.074	**59**	92.722	**79**	65.767	**99**	2.961
								≥100	1.929

La tabella non indica l'età estrema, che potrebbe essere 101 anni o 102 o un'età maggiore, ma la cosa è irrilevante per i nostri scopi. Una lettura attenta di questa tabella fornisce già utili indicazioni sull'andamento del numero dei viventi rispetto all'età. In particolare ci si rende conto subito che questo numero diminuisce con l'aumentare dell'età e la cosa, naturalmente, non sorprende nessuno. Ma un grafico (Fig. 1) ci mostra meglio come vanno le cose.
Si possono allora notare alcuni fatti interessanti, ma certamente anch'essi non sorprendenti:

- fino a circa 35 anni, il numero dei viventi diminuisce molto lentamente (ci sono poche mortalità);
- la diminuzione è più rapida all'incirca dai 35 ai 70 anni (il numero delle mortalità aumenta);
- diventa precipitosa oltre i 70 anni (la mortalità diventa elevata).

Ma, soprattutto, una tavola di sopravvivenza permette di calcolare la probabilità che una persona di una certa età sia ancora viva ad una determinata epoca o muoia entro un dato intervallo di tempo.
È di ciò che andiamo ad occuparci.

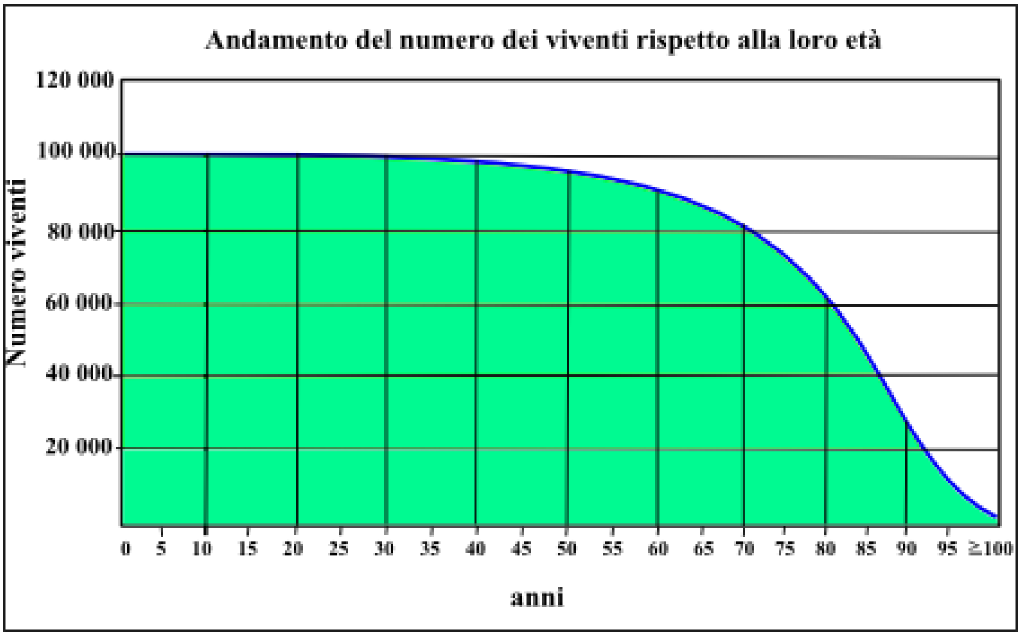

FIG. 1

- Utilizzando una tavola di sopravvivenza, è facile calcolare la probabilità P_x che una persona di età x raggiunga l'età x+1. Precisamente, rifacendoci alla concezione frequentista, abbiamo che:

> La probabilità P_x che una persona di x anni raggiunga gli x+1 anni è uguale al rapporto fra il numero L_{x+1} dei viventi di età x+1 e il numero L_x dei viventi di età x:
>
> $$P_x=\frac{L_{x+1}}{L_x}.$$
>
> Questa probabilità si chiama **tasso annuo di sopravvivenza** per una persona di età x.

Per esempio, con riferimento alla tabella 1, il tasso annuo di sopravvivenza di una persona di 35 anni è:

$$P_{35}=\frac{L_{36}}{L_{35}}=\frac{98388}{98451}\approx 99{,}94\% .$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 35 anni, 9.994 raggiungeranno i 36 anni.
In genere una tavola di sopravvivenza fornisce anche i tassi di sopravvivenza.

- S'intende che la probabilità contraria Q_x di P_x, cioè $Q_x=1-P_x$, rappresenta la probabilità che una persona di x anni non raggiunga gli x+1 anni. In altri termini, Q_x rappresenta la probabilità che una persona di x anni muoia prima di raggiungere l'età x+1.

Osservato che si ha:

$$Q_x=1-P_x=1-\frac{L_{x+1}}{L_x}=\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x}$$

e constatato che differenza L_x-L_{x+1} fra il numero dei viventi di età x e quello dei viventi di età x+1 non è altro che il numero D_x dei morti all'età di x anni, risulta che:

La probabilità che una persona di x anni muoia prima di raggiungere gli x+1 anni è uguale al rapporto fra il numero dei morti all'età di x anni ed il numero dei viventi di età x anni.
Questa probabilità si chiama **tasso annuo di mortalità** per una persona di x anni.

Sempre con riferimento alla tabella 1, risulta:

$$Q_{35}=1-P_{35}=1-0{,}9994=0{,}06\%\ .$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 35 anni, ne moriranno 6 entro l'anno.

A volte, piuttosto che riferirsi a tavole di sopravvivenza, si costruiscono **tavole di mortalità**. Anche adesso si fa riferimento ad una popolazione di 100.000 nati e si conta quanti di essi muoiono prima di raggiungere il 1° anno di vita, il 2°, il 3° e così via. Ma, come detto, questo risulta di difficile realizzazione, per cui il numero D_x dei morti all'età x viene rilevato attraverso il rilevamento effettuato in una idonea popolazione statistica. Se è L_0 la dimensione di questa popolazione, attraverso la tavola di mortalità si possono ottenere via via:

- il numero dei viventi di età 0 anni, coincidente ovviamente con L_0;
- il numero dei viventi di età 1 anno, uguale evidentemente alla differenza fra il numero dei viventi di età 0 anni e quello dei morti all'età di 0 anni: $L_1 = L_0 - D_0$;
- il numero dei viventi di età 2 anni: $L_2 = L_1 - D_1$;
- …………………………………. ;
- il numero dei viventi di età x+1 anni: $L_{x+1} = L_x - D_x$;
- …………………………………. .

A questo punto si può procedere come se si disponesse di una tavola di sopravvivenza.

82.2.2 Vediamo adesso qualche esercizio in cui si applicano i concetti precedenti.

- ESERCIZIO 1. Calcolare la probabilità che una persona di x anni raggiunga gli x+n anni.

RISOLUZIONE. Affinché una persona di x anni raggiunga l'età di x+n anni occorre evidentemente che raggiunga anno dopo anno le età: x+1, x+2, …, x+n. La probabilità cercata si indica solitamente col simbolo $_n\mathbf{P}_x$, che si legge: *P con x temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di sopravvivenza di x, dopo n anni***. Si ha allora:

$$_nP_x=P_xP_{x+1}\dots P_{x+n}=\frac{L_{x+1}}{L_x}\cdot\frac{L_{x+2}}{L_{x+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{L_{x+n}}{L_{x+n-1}}=\frac{L_{x+n}}{L_x}\ .$$

Da ciò si evince che:

La probabilità che una persona di x anni raggiunga gli x+n anni è il rapporto fra il numero dei viventi di età x+n anni e quello dei viventi di età x anni.

Per esempio, facendo ancora una volta riferimento alla tabella 1, la probabilità che una persona di 50 anni raggiunga gli 80 anni è:

$$_{30}P_{50}=\frac{62724}{96271}\approx 65{,}12\%.$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 50 anni, 6.512 raggiungeranno gli 80 anni.

- ESERCIZIO 2. Calcolare la probabilità che una persona di x anni non raggiunga gli x+n anni.

RISOLUZIONE. Questa probabilità è evidentemente la probabilità contraria della precedente. Si indica con il simbolo $_n\mathbf{Q}_x$ che si legge: *Q con x temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di morte di x entro n anni***. Si ha ovviamente:

$$_nQ_x = 1 - {_nP_x} = 1 - \frac{L_{x+n}}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x}\ .$$

Constatato che la differenza $L_x - L_{x+n}$ fra il numero dei viventi di età x e quello dei viventi di età x+n non è altro che il numero dei morti all'età compresa fra gli x anni (inclusi) e gli x+n anni (esclusi), possiamo concludere che:

La probabilità che una persona di x anni muoia entro n anni è uguale al rapporto fra il numero dei morti all'età compresa fra x anni (inclusi) ed x+n anni (esclusi) ed il numero dei viventi di età x anni.

Per esempio, di nuovo con riferimento alla tabella 1, la probabilità che una persona di 50 anni non raggiunga gli 80 anni è evidentemente:

$$_{30}Q_{50} = 1 - {_{30}P_{50}} = 1 - 0{,}6515 = 34{,}85\%\ .$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 50 anni, ne moriranno 3.485 entro i prossimi 30 anni.

- ESERCIZIO 3. Calcolare la probabilità che una persona di x anni muoia ad un'età compresa tra gli x+n anni e gli x+n+m anni.

RISOLUZIONE. Affinché una persona dell'età di x anni muoia fra gli x+n anni e gli x+n+m anni, occorre evidentemente che si verifichino due eventi:

- la persona deve raggiungere l'età di x+n anni;
- la persona, raggiunta questa età, non deve raggiungere l'età di x+n+m anni.

Ora, la probabilità che una persona di x anni raggiunga l'età di x+n anni sappiamo che è:

$$_nP_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}\,.$$

La probabilità che questa persona, di x+n anni, raggiunga l'età di x+n+m anni è:

$$_{x+n+m}P_{x+n} = \frac{L_{x+n+m}}{L_{x+n}}\ .$$

Quella che non la raggiunga è allora: $1 - \frac{L_{x+n+m}}{L_{x+n}}$.

Siccome il secondo evento è subordinato al primo, la probabilità cercata (che si indica con il simbolo $_{m/n}\mathbf{Q}_x$ che si legge: *Q con x differito m e temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di morte di x, differita di m anni e temporanea di n anni***) è data dal prodotto delle probabilità dei due eventi, vale a dire:

$$_{m/n}Q_x = {_nP_x} \cdot \left(1 - \frac{L_{x+n+m}}{L_{x+n}}\right) = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_{x+n}} = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_x}\,.$$

Constatato che la differenza $L_{x+n} - L_{x+n+m}$ fra il numero dei viventi di età x+n anni e quello dei viventi di età x+n+m anni non è altro che il numero dei morti di età compresa fra x+n anni (inclusi) e x+n+m anni (esclusi), dal risultato precedente segue che:

La probabilità che una persona di x anni muoia ad un'età compresa fra gli x+n anni e gli x+n+m anni è uguale al rapporto fra il numero dei morti di età compresa fra x+n anni (inclusi) ed x+n+m anni (esclusi) ed il numero dei viventi di età x anni.

Per esempio, con riferimento alla solita tabella 1, la probabilità che una persona di 40 anni muoia fra il 70° anno di vita (incluso) e l'80° (escluso) è:

$$_{10/30}Q_{40} = \frac{L_{70} - L_{80}}{L_{40}} = \frac{83487 - 62724}{97967} \approx 21{,}19\%.$$

Come al solito, questo significa che, in media su 10.000 persone di 40 anni, ne moriranno 2.119 fra il 70° e l'80° anno di età.

82.3 VITA PROBABILE E SPERANZA DI VITA

82.3.1 Nel linguaggio delle assicurazioni sono frequenti due concetti, quello di *vita probabile* e quello di *speranza di vita*. Riteniamo opportuno farne un breve cenno.

82.3.2 Incominciamo con una definizione:

Vita probabile di una persona è il numero di anni che, con probabilità del 50%, gli rimangono da vivere.

Per calcolare la vita probabile di una persona di x anni bisogna disporre di una tavola di sopravvivenza. Vediamo in che modo questo calcolo possa essere effettuato.

Ammesso, allora, che sia t la vita probabile di una persona di x anni, in base a quanto detto in precedenza (esercizio 1), intanto risulta:

$$\frac{L_{x+t}}{L_x} = \frac{1}{2}\ .$$

Nella tavola di sopravvivenza si legge il valore di L_x, perciò si conosce il valore di L_{x+t}, che vale esattamente: $\frac{1}{2} L_x$.

Se capita il caso, molto fortunato, che questo valore di L_{x+t} si trovi nella tavola di sopravvivenza, basta leggere, sempre nella tavola, quale valore di x+t corrisponde a L_{x+t}; ammesso che esso sia u, significa che $x+t=u$ e perciò $t=u-x$.

Se, al contrario, capita il caso, più frequente, che il valore di L_{x+t} non si trovi nella tavola di sopravvivenza, bisogna ricorrere all'interpolazione. Per questo si cercano nella tavola i due valori consecutivi entro i quali è compreso L_{x+t}: ammettiamo che siano L_n ed L_{n+1}. Si costruisce allora la seguente tabella di corrispondenza fra le età e il numero dei viventi:

$$\begin{bmatrix} n & L_n \\ x+t & L_{x+t} \\ n+1 & L_{n+1} \end{bmatrix}$$

Deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{L_{x+t} - L_n}{L_{n+1} - L_n} = \frac{(x+t) - n}{(n+1) - n}\ .$$

da cui si ricava il valore di t.

Per esempio, supponendo che la tavola di sopravvivenza di riferimento sia quella della tabella 1, ci proponiamo di calcolare la vita probabile di una persona di 45 anni.

Intanto, indicata con t la vita probabile cercata, si ha:

$$L_{45+t} = \frac{1}{2} L_{45} = 48603\ .$$

Nella tavola di sopravvivenza (tab. 1) non figura, nella colonna "N° viventi", il valore 48.603. Ma si può constatare che esso è compreso fra i due valori: 49.872 e 46.330, cui corrispondono rispettivamente le età 84 anni e 85 anni. Si ha pertanto la seguente relazione:

$$\frac{L_{45+t}-L_{84}}{L_{85}-L_{84}}=\frac{(45+t)-84}{1}\ ,\ \text{ossia:}\ \ \frac{48603-49872}{46330-49872}=t-39\ ,\ \text{da cui segue:}\ \ t\approx 39{,}36\ .$$

Perciò: una persona di 45 anni di età ha una probabilità di vita all'incirca di 39,36 anni.

Oppure, detto in altri termini: una persona di 45 anni di età vivrà, con probabilità del 50%, per altri 39,36 anni, che è come dire 39 anni 4 mesi e 9 giorni circa.

Questo, sostanzialmente, significa che, su 100 persone di 45 anni di età, 50 vivranno per altri 39,36 anni e 50 vivranno per un periodo diverso (minore o maggiore).

82.3.3 Un altro concetto, molto usato nel linguaggio delle assicurazioni, come detto, è quello di "speranza di vita" di una persona di x anni.

Si definisce **speranza di vita** (o **vita media**) di una persona il numero medio di anni che ancora gli restano da vivere.

Di particolare rilievo è la vita media di una persona di 0 anni, cioè la ***speranza di vita alla nascita***.

Esistono formule matematiche, idonee a calcolare la speranza di vita di una persona di x anni di età, basate sempre sulle tavole di sopravvivenza, ma questo parametro è sistematicamente presente nelle tavole medesime.

Per esempio, per quanto concerne l'Italia, l'ISTAT fornisce la speranza di vita alle diverse età, riferita al 1999 e distinta fra i due sessi. La tabella corrispondente è parzialmente riprodotta qui sotto (Tab. 2).

Speranza di vita in Italia – anno 1999		
Età	Maschi	Femmine
0	76,0	82,1
15	61,6	67,7
45	33,1	38,4
65	16,2	20,2
75	9,7	12,3

TAB. 2

Sempre l'ISTAT fornisce la stima della speranza di vita alla nascita, relativa all'anno 2001, distribuita per regione e per sesso (Tab. 3).

Speranza di vita alla nascita, per regione e per sesso – anno 2001.						
Regione	Maschi	Femmine		Regione	Maschi	Femmine
Piemonte e Valle d'Aosta	76,4	82,6		Marche	78,0	84,3
Lombardia	76,3	83,1		Lazio	76,9	82,7
Prov. Autonoma Bolzano	77,0	84,1		Abruzzo e Molise	77,7	83,8
Prov. Autonoma Trento	76,9	83,9		Campania	75,3	81,2
Veneto	76,9	83,7		Puglia	77,6	83,2
Friuli Venezia Giulia	76,6	83,2		Basilicata	77,5	83,0
Liguria	76,5	82,7		Calabria	77,6	82,9
Emilia Romagna	77,2	83,4		Sicilia	76,6	81,9
Toscana	77,3	83,4		Sardegna	76,2	83,0
Umbria	778	83,6		**TOTALE**	**76,7**	**82,9**

TAB. 3

Detto per inciso, questi valori sembravano in crescita con il trascorrere degli anni. A riprova di ciò, nell'anno 2007 la stima della speranza di vita alla nascita è stata, in Italia, di 78,6 anni per i maschi e di 84,0 anni per le femmine; mentre nell'anno 2014 era di 80,3 anni per i maschi e 85,0 per le femmine. Ma questa tendenza sembra invertirsi nell'anno 2015. I dati relativi a quell'anno indicano, infatti, una speranza di vita alla nascita di 80,1 anni per i maschi e 84,7 anni per le femmine.
Valori che, comunque, sono più elevati rispetto a quelli di non molti anni or sono. Questo grazie a fattori svariati, come, per esempio, una migliore nutrizione, controlli medici più accurati, lavori meno faticosi, eccetera.
Ad ogni modo, vogliamo fornire una formula matematica che consente di avere una buona approssimazione della vita media E_x di una persona di età x anni.
Se L_n indica, come al solito, il numero dei viventi di n anni di età e, in particolare, l'anno ω rappresenta l'anno oltre il quale non sopravvive nessuno (per cui: $L_\omega=0$ mentre $L_{\omega-1}\neq 0$), allora l'età media di una persona di x anni è espressa dalla formula seguente:

[1] $$E_x=\frac{L_{x+1}+L_{x+2}+\ldots+L_{\omega-1}}{L_x}\ .$$

Per esempio, facendo riferimento ancora una volta alla tabella 1 ed applicando più volte la formula [1]:
- dopo aver constatato che $L_{50}=96.271$, mentre $L_{51}+L_{52}+\ldots+L_{\omega-1}=3.095.245$, si ha: $E_{50}\approx 32{,}15$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{60}=92.175$, mentre $L_{61}+L_{62}+\ldots+L_{\omega-1}=2.152.259$, si ha: $E_{60}\approx 23{,}35$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{70}=83.487$, mentre $L_{71}+L_{72}+\ldots+L_{\omega-1}=1.272.974$, si ha: $E_{70}\approx 15{,}25$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{80}=62.724$, mentre $L_{81}+L_{82}+\ldots+L_{\omega-1}=537.215$, si ha: $E_{80}\approx 8{,}56$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{90}=25.947$, mentre $L_{91}+L_{92}+\ldots+L_{\omega-1}=102.614$, si ha: $E_{90}\approx 3{,}95$ anni.

Ci soffermiamo adesso sulla **dimostrazione della formula [1]**. Incominciamo col dire che gli anni che ha ancora da vivere un individuo di età x anni è una variabile aleatoria V suscettibile dei valori:
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega-x-1$$
con probabilità rispettivamente:
$$Q_x,\ {}_{1/1}Q_x,\ {}_{1/2}Q_x,\ {}_{1/3}Q_x,\ \ldots,\ {}_{1/(\omega-x-1)}Q_x\,,$$
vale a dire, nell'ordine:
$$\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x},\ \frac{L_{x+1}-L_{x+2}}{L_x},\ \frac{L_{x+2}-L_{x+3}}{L_x},\ \frac{L_{x+3}-L_{x+4}}{L_x}\ ,\ldots,\ \frac{L_{\omega-1}-L_\omega}{L_x}.$$
Che V sia effettivamente una variabile aleatoria è giustificato dal fatto che la somma S di queste probabilità è uguale ad 1. Si ha infatti, ricordando che $L_\omega=0$:
$$S=\frac{L_x-L_\omega}{L_x}=1\ .$$
Ebbene, la vita media del soggetto in questione non è altro che la media della variabile aleatoria V, ossia:
$$E_x=0\cdot\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x}+1\cdot\frac{L_{x+1}-L_{x+2}}{L_x}+2\cdot\frac{L_{x+2}-L_{x+3}}{L_x}+3\cdot\frac{L_{x+3}-L_{x+4}}{L_x}+\ldots+(\omega-x-1)\cdot\frac{L_{\omega-1}-L_\omega}{L_x}.$$
A conti fatti segue a [1].

VERIFICHE

NOTA BENE. Senza altre specificazioni, avvertiamo che in tutti gli esercizi si fa riferimento, quando serve, alla tabella 1 (tavola di sopravvivenza relativa ad una determinata popolazione), ripetendo ancora una volta, se ce ne fosse bisogno, che l'uso di una tavola differente implica certamente qualche cambiamento nei risultati, ma lascia tutto invariato sul piano concettuale.

1. Completare la seguente tabella, che fornisce il tasso annuo di sopravvivenza P_n e quello di mortalità Q_n di una persona di n anni:

n	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
P_n	0,9998	0,9996				0,9935		0,9479	
Q_n	0,0002								

2. Completare la seguente tabella, che fornisce la probabilità ${}_nP_x$ che una persona di x anni raggiunga l'età di x+n anni:

n \ x	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
10	0,9966							0,4137
20							0,3108	
30		0,9709		0,8522		0,2815		
40								
50			0,6355		0,0002			
60								

3. Completare la seguente tabella, che fornisce la probabilità ${}_nQ_x$ che una persona di x anni non raggiunga l'età di x+n anni (e quindi muoia entro n anni):

n \ x	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
10	0,0034							0,5867
20							0,6892	
30		0,0291		0,1478		0,7185		
40								
50			0,3645		0,9998			
60								

4. Completare la seguente tabella, che fornisce la probabilità ${}_{m/n}Q_x$ che una persona di x anni muoia non prima di n anni e non dopo n+m anni:

x	20	30	40	50	60	70	80
n	10	30	20	30	10	15	10
m	20	35	25	40	20	20	15
${}_{m/n}P_x$	0,0073						

5. Completare la seguente tabella, che fornisce la vita probabile (EP_x) di una persona di x anni:

x	30	35	40	45	50	55	60
EP_x				39,36			

6. Completare la seguente tabella, che fornisce la vita media (E_x) di una persona di x anni:

x	60	65	70	75	78	82	85
E_x	23,35		15,25				

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Cos'è una polizza di assicurazione sulla vita? Cosa s'intende per "premio"?

2. Cos'è il tasso annuo di sopravvivenza? Cosa, quello di mortalità?

3. Quanto vale la probabilità che una persona di x anni sopravviva ancora n anni?

4. Quanto vale la probabilità che una persona di x anni muoia non prima di n anni e non dopo m anni ($m>n$)?

5. Cosa s'intende con vita probabile di una persona di x anni? Cosa, con vita media?

RISPOSTE.

1. È un contratto con il quale un soggetto (l'assicurato) paga una certa somma (il premio) ad un altro soggetto (l'assicuratore), a condizione che:
a) egli riceva una somma prevista, se è in vita ad una certa scadenza (si chiama "assicurazione in caso di vita");
b) i suoi eredi ricevano una somma prevista, se egli è morto ad una certa scadenza (si chiama "assicurazione in caso di morte").

2. Il tasso annuo di sopravvivenza è la probabilità p_x che ha una persona di x anni di raggiungere l'età di $x+1$ anni: è uguale al rapporto fra il numero L_{x+1} dei viventi di età $x+1$ e il numero L_x dei viventi di età x. Il tasso annuo di mortalità è la probabilità q_x che una persona di x anni non raggiunga l'età di $x+1$ anni; si ha: $q_x=1-p_x$.

3. Questa probabilità è uguale al rapporto fra il numero dei viventi di età $x+n$ anni e quello dei viventi di età x anni.

4. Questa probabilità è uguale al rapporto fra il numero dei morti all'età compresa fra $x+n$ anni (inclusi) ed $x+m$ anni (esclusi) ed il numero dei viventi di età $x+n$ anni.

5. La vita probabile di una persona di x anni è il numero di anni che, con probabilità del 50%, le rimangono da vivere. La vita media, detta anche speranza di vita, di una persona di x anni è il numero medio di anni che ancora le restano da vivere.