Prerequisiti:
- Utilizzare consapevolmente connettivi e quantificatori
- Avere consapevolezza delle proprietà elementari della geometria piana
- Conoscere i numeri naturali e le loro proprietà
- Conoscere gli elementi di probabilità e statistica

L'unità è rivolta agli studenti del Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze applicate.
Per quanto riguarda le altre scuole stabilirà il docente se sia il caso o meno di farne un cenno.

Ci permettiamo tuttavia, come suggerimento, di proporre il paragrafo 87.1 in tutte le scuole e poi: l'assiomatica della "geometria" nel Liceo Scientifico "ordinario" e quella della "probabilità" nel Liceo Scientifico, opzione Scienze applicate.
Per quanto concerne le altre scuole, ammesso che il docente decida di occuparsene, suggeriamo: l'assiomatica della "geometria" nel Liceo Classico, quella della "aritmetica" nel Liceo delle Scienze Umane (ordinario) e l'assiomatica della "probabilità" nel Liceo delle Scienze Umane, opzione economico-sociale, e negli Istituti Tecnici e Professionali.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono:

- *avere consapevolezza della differenza fra concetto primitivo e definizione, assioma e teorema*
- *conoscere il significato di: concetto primitivo, assioma, teorema, lemma, corollario*
- *spiegare esaurientemente il significato di coerenza, indipendenza e completezza di un sistema assiomatico*
- *saper descrivere le caratteristiche del metodo assiomatico, limiti compresi*
- *essere in grado di fornire almeno un modello di sistema assiomatico e descriverne le caratteristiche*

Il metodo assiomatico
Unità 87

87.1 IL METODO ASSIOMATICO

87.1.1 La nostra impostazione della geometria [1] ha lasciato molti … buchi.
Per esempio abbiamo ammesso tacitamente fatti come i seguenti, tanto per citarne un paio (ma non sono i soli):
- una retta ha tanti punti quanti ne servono;
- per due punti distinti passa una ed una sola retta.

Ci siamo serviti dei concetti di punto, retta, piano senza aver chiarito preventivamente cosa fossero.
Abbiamo assunto come regole alcune proprietà che invece si sarebbero potute dimostrare.
Insomma, la nostra impostazione della geometria non si può proprio considerare il massimo del rigore logico. È comunque a questa impostazione che noi faremo riferimento nelle prossime pagine. Per cui riteniamo giunto il momento di fare una riflessione critica, ancorché breve, sul lavoro svolto.

87.1.2 Intanto dovrebbe essere chiaro che di norma, quando abbiamo introdotto nuovi enti geometrici, l'abbiamo fatto mediante una definizione di essi ricondotta ad altri enti già noti o supposti tali. Così pure abbiamo dimostrato le proprietà delle figure geometriche basandole in genere su altre già acquisite per dimostrazione o date come "regole del gioco".
Siamo stati costretti, però, a supporre noti alcuni enti e ad assumere come date alcune proprietà, dal momento che non tutto si può definire e non tutto si può dimostrare: bisogna infatti trovare necessariamente un punto di partenza. Più specificamente:
- vi sono enti che non si possono definire per mezzo di altri, dal momento che, prima di essi, altri enti non si suppongono esistenti;
- vi sono proprietà che non si possono dedurre da altre, poiché quelle sono le prime regole che si ammettono.

Gli enti che vengono assunti senza definizione si chiamano **enti** (o **concetti** o **termini**) **primitivi**.
Le proprietà che vengono ammesse senza dimostrazione (e che a suo tempo abbiamo chiamato "regole del gioco") si dicono più propriamente **postulati** (o **assiomi**). Essi precisano, in sostanza, alcune caratteristiche degli enti primitivi. Per questo sono considerati una sorta di "definizioni implicite" di quegli enti o *des définitions déguisées* (*delle definizioni camuffate*), come sostiene il matematico francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912) nell'opera *La scienza e l'ipotesi* (1902) [2].
Per oltre 2000 anni gli assiomi (della geometria) sono stati concepiti come *verità evidenti di per sé* [3]. Questo non fu più possibile dopo la scoperta delle geometrie non euclidee [4] dal momento che si presentarono proposizioni che risultavano "vere" in una geometria ma non lo erano più in un'altra. Dopo di allora la "verità" degli assiomi è accettata per "convenzione". La nostra scelta, fra tutte quelle possibili, può essere guidata da fatti sperimentali (es.: gli assiomi devono essere in grado di descrivere la

---

[1] Cfr,: Unità 7: Geometria: dall'intuizione alla dimostrazione.
[2] Cfr.: Lettura in chiusura dell'unità.
[3] In un libro dal titolo "*Elementi di Algebra e Geometria ricavati dai migliori scrittori di matematica per opera del Cav. Brunacci*", edito in Bologna presso Giacomo Monti Editore nel 1849, si definisce ancora "assioma" *una verità evidente di per se stessa*.
Vincenzo Brunacci (1768-1818) fu ispettore generale di Pubblica Istruzione del Regno italico (1805-1814) proclamato da Napoleone Bonaparte.
[4] La scoperta delle *geometrie non euclidee* avvenne nella prima metà dell'Ottocento. La "nota storica" collocata in questa unità (n. 87.5) si sofferma in modo abbastanza dettagliato su questo argomento.

realtà fisica) o dal senso dell'economia (es.: gli assiomi devono essere nel minor numero possibile) o anche dal senso dell'estetica (es.: gli assiomi devono enunciare proprietà semplici ed immediatamente comprensibili), ma «*resta libera ed è limitata unicamente dalla necessità di evitare qualsiasi contraddizione*» (ancora Poincaré [(5)]).

Una volta introdotti i concetti primitivi e i postulati, tutto il resto scaturisce in modo deduttivo, dando luogo ad un edificio matematico chiamato **sistema assiomatico** (e detto pure **teoria matematica**). Si sviluppa attraverso definizioni e teoremi.

- Una ***definizione*** è una proposizione che crea nuovi termini (o enti o concetti) sulla base di quelli già noti.

  Per esempio è una definizione la proposizione che crea il concetto di rette parallele (nel piano): «*due rette si dicono parallele se non hanno punti comuni*».

  A rigore, in linea teorica si potrebbe fare a meno delle definizioni, ma in questo modo il discorso diventerebbe sempre più complicato e poco chiaro. Dunque, in fin dei conti, le definizioni diventano estremamente utili e per questo essenziali.
- Un ***teorema*** è una proposizione vera, ma la cui "verità" è dedotta, mediante regole di inferenza, dalle proposizioni già esistenti nel sistema. Proposizioni, queste ultime, che possono essere state assunte per vere (assiomi) o essere state già dimostrate (teoremi).

  A volte la "verità" di una proposizione scaturisce come immediata conseguenza di un teorema già dimostrato o anche di una definizione: quella proposizione si dice allora un ***corollario*** (del teorema o della definizione).

  Altre volte la dimostrazione di un teorema va preparata con la dimostrazione di una proposizione preliminare, di solito più semplice o immediata: questa si dice allora un ***lemma***.

  In realtà, sono teoremi o postulati certe proposizioni che, in base alla situazione, sono indicate con nomi diversi, come i seguenti:
  - ***criterio*** (es.: criteri di congruenza e di similitudine dei triangoli);
  - ***principio*** (es.: principio di equivalenza delle equazioni, principio di induzione);
  - ***regola*** (es.: regola di Ruffini, regola di Archimede);
  - ***legge*** (esempi, tratti particolarmente dalle scienze sperimentali: leggi di Keplero, leggi di Ohm, legge di Avogadro, legge di Joule).

87.1.3 Come sottolineato sopra, il sistema assiomatico non deve presentare contraddizioni, vale a dire non deve essere presente nel sistema una proposizione P e la sua opposta $\overline{\mathrm{P}}$.

L'assenza di contraddizioni, all'interno di un sistema assiomatico, si esprime anche dicendo che il sistema degli assiomi è **coerente** (o **compatibile** o **consistente** o **non contraddittorio**).

Altrimenti esso è *incoerente* (o *incompatibile* o *inconsistente* o *contraddittorio*).

Ora, finché gli assiomi sono concepiti come "verità evidenti di per sé", da essi non possono che derivare altre verità e nessuna contraddizione e, perciò, non occorre alcun controllo della coerenza del loro sistema, ché certamente è coerente. Ma se gli assiomi non possono più essere concepiti in tal modo, ma sono considerati "veri per convenzione", nulla garantisce che il loro sistema sia necessariamente coerente. Questo va provato e nessuna persona di buon senso può pensare di farlo verificando la "verità" delle proprietà che man mano si ottengono, anche perché nessuno può garantire che in futuro non

[5] Cfr.: nota n. 2.

si possano ottenere proposizioni che siano in contraddizione con quelle già ottenute.
Orbene, **la coerenza di un sistema di assiomi viene controllata, quand'è possibile, con la costruzione di un modello in cui gli assiomi sono tutti contemporaneamente soddisfatti.**
Per una migliore comprensione di quanto detto or ora, consideriamo come esempio di sistema assiomatico quello in cui si assumono come primitivi i concetti di **punto**, **retta**, **piano**, i quali si suppongono caratterizzati dai seguenti postulati:

- P1: Il piano è l'insieme dei punti.
- P2: Esistono sottoinsiemi propri del piano, detti rette.
- P3: Ad ogni retta appartengono almeno due punti distinti.
- P4: Presi due qualsiasi punti distinti, esiste una ed una sola retta cui essi appartengono.
- P5: Per ogni punto esterno ad una retta, comunque scelta, si può condurre una ed una sola retta parallela ad essa.

Ebbene, verifica il suddetto sistema di assiomi il modello (Fig. 1) in cui:

- il piano è l'insieme di punti {A,B,C,D}, rappresentati in figura da pallini;
- le rette sono gli insiemi: {A,B}, {A,C}, {A,D}, {B,C}, {B,D}, {C,D}.

L'esistenza di un tale modello basta per farci concludere che il sistema dei 5 assiomi suddetti è coerente.

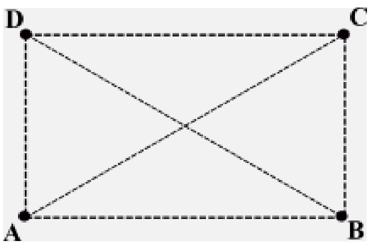


FIG. 1

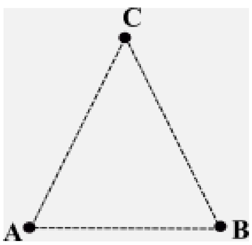


FIG. 2

87.1.4 Un sistema assiomatico deve avere un'altra caratteristica, diciamo di natura economico-estetica: la **indipendenza reciproca degli assiomi**; cioè deve soddisfare alla condizione che nessun assioma del sistema sia deducibile dagli altri. Un sistema siffatto si dice **indipendente**.
Per evidenziare tale caratteristica è di nuovo sufficiente costruire un modello in cui valgono tutti gli assiomi del sistema tranne quello che si vuole non deducibile dagli altri.
Per esempio, consideriamo il seguente modello (Fig. 2):

- il piano è l'insieme dei punti {A,B,C};
- le rette sono gli insiemi: {A,B}, {A,C}, {B,C}.

Esso soddisfa al sistema dei primi 4 assiomi su enunciati, ma non al 5º; il quale è per questo indipendente dagli altri.

Per la verità, nell'insegnamento elementare, mentre la condizione della coerenza va rispettata in ogni caso, non altrettanto avviene per quella dell'indipendenza. Talvolta, infatti, sono assunti come assiomi proposizioni che invece si potrebbero dimostrare. Noi, in effetti, l'abbiamo fatto nel nostro sviluppo della geometria. Non è elegante fare così, ma se ne trae qualche beneficio sul piano didattico.

87.1.5 Un'ultima condizione, cui deve sottostare un sistema di assiomi, è la **completezza**.
Proviamo a spiegare di che cosa si tratta. È possibile che vi siano delle proposizioni delle quali, sulla base degli assiomi del sistema, non si può concludere che sono vere né che sono false. Tali proposi-

zioni si dicono ***indecidibili*** nel sistema di assiomi considerato. Ebbene, un sistema di assiomi si dice ***completo*** se in esso non vi sono proposizioni indecidibili.
Portiamo un esempio, ancorché banale, ma buono per capire cosa vogliamo dire. Consideriamo al riguardo la seguente proposizione:

“P*er un punto esterno ad una retta si può condurre una ed una sola parallela a quella retta*”.

Nel sistema dei primi 4 assiomi enunciati sopra, quale valore di verità dovrebbe attribuirsi ad essa [(6)]?
Nel modello di figura 1 essa è vera, mentre nel modello di figura 2 è falsa. Quindi non si può concludere né che è vera né che è falsa. Ciò accade perché il sistema di quei 4 assiomi è, per l’appunto, “incompleto”.
Ora, mentre può risultare abbastanza semplice, almeno in qualche situazione, dimostrare che un sistema di assiomi è incompleto, risulta invece piuttosto complicato dimostrare che è completo.

87.1.6 Con riferimento ai postulati P1, P2, P3, P4, P5, ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi di verifica dell’apprendimento.

1. Costruire un modello di piano in cui sono soddisfatti i postulati P1, P2, P3, P4 ma non P5 e nel quale però esistano coppie di rette parallele.
   Presi, in questo modello, una retta r ed un punto P esterno ad essa, quali situazioni si possono presentare riguardo all’esistenza ed all’unicità della parallela condotta per P ad r?
2. In che cosa consiste la coerenza di un sistema di assiomi? In che cosa l’incoerenza? In che cosa l’indipendenza reciproca degli assiomi? In che cosa consiste la completezza?
3. Che differenza c’è fra teorema, corollario e lemma?
4. Spiegare perché è contraddittorio il sistema dei postulati {P1,P2,P3,P4,p} dove i primi 4 sono i postulati noti e p è la proposizione seguente: «due rette distinte hanno al più due punti comuni».
5. Spiegare perché è contraddittorio il sistema dei postulati {p,P2,P3,P4,P5} dove gli ultimi 4 sono i postulati noti mentre p è la proposizione seguente: «il piano è un insieme formato da 3 punti».
6. Assunti come concetti primitivi i termini “punto”, “retta”, “piano”, si consideri ciascuno dei seguenti sistemi di postulati:
   - S1 è il sistema {p,P2,P3,P4}, dove P2, P3, P4 sono i postulati noti, mentre
     p: “il piano è un insieme formato da 3 punti”.
   - S2 è il sistema {p,P2,P3,P4,P5}, dove gli ultimi 4 sono i postulati noti, mentre
     p: “il piano è un insieme formato da 4 punti”.
   - S3 è il sistema {p1,P2,p2,P4}, dove P2, P4 sono i postulati noti, mentre
     p1: “il piano è un insieme formato da 5 punti”;
     p2: “ad ogni retta appartengono esattamente 3 punti distinti”.
   - S4 è il sistema {P1,P2,p,P4}, dove P1, P2, P4 sono i postulati noti, mentre
     p: “ad ogni retta appartengono esattamente tre punti distinti”.

   Dimostrare che:
   a) il sistema S1 è coerente;
   b) il sistema S2 è coerente ma non indipendente (cioè almeno un postulato è deducibile dagli altri);
   c) il sistema S3 è incoerente;
   d) il sistema S4 è coerente.

RISOLUZIONE PARZIALE (dell’esercizio 6). Ci soffermiamo brevemente sull’ultima parte per dimostrare che il sistema S4 è coerente. Al riguardo è sufficiente riferirsi al modello di figura 3, per controllare che effetti-

[6] Precisiamo che “due rette si dicono *parallele* se non hanno punti comuni”

vamente tutti e quattro i postulati assunti sono verificati. Questo modello ha 7 punti: $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$, rappresentati da pallini e 7 rette, che sono gli insiemi:

$$\{A_1,A_2,A_5\},\ \{A_1,A_3,A_6\},\ \{A_1,A_4,A_7\},\ \{A_2,A_3,A_7\},\ \{A_5,A_3,A_4\},\ \{A_5,A_6,A_7\},\ \{A_2,A_6,A_4\}.$$

Questo modello di piano è stato ideato dal matematico italiano **Gino Fano** (1871-1952) e per questo è chiamato ***modello di Fano***.

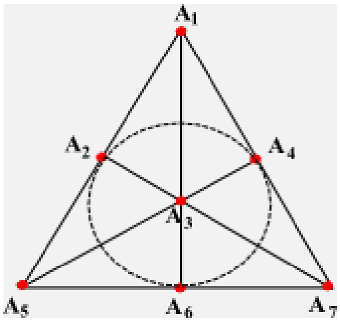


FIG. 3

87.1.7 Il metodo seguito per dimostrare proposizioni, all'interno di un sistema assiomatico, deducendole da altre si chiama **metodo assiomatico** (o **ipotetico-deduttivo**). È seguito, non solo in Matematica, ma in molti altri ambiti, specialmente nelle scienze sperimentali. In realtà, quando si parla di studio di una scienza condotto con "metodo matematico", ci si riferisce proprio a tale metodo.

Di due fatti, però, bisogna avere consapevolezza, quando ci si muove all'interno di una teoria costruita su un sistema assiomatico.

Il primo fatto è che bisogna accettare la possibilità che esistano:

a) proposizioni vere ma che non possono essere dimostrate né confutate all'interno della teoria;

b) proposizioni indecidibili, delle quali cioè non si può dire che sono vere né che sono false.

Questo limite dei sistemi assiomatici è stato mostrato nel 1931 da un giovane logico e matematico dell'Università di Vienna, poi emigrato negli Stati Uniti d'America: **Kurt Gödel** (1906-1978).

Il secondo fatto è che, quantunque una teoria matematica concepita come sistema assiomatico non abbia bisogno di un riferimento concreto alla realtà, una realtà tuttavia esiste ed è quella realizzata dai "modelli" della teoria stessa. È nei modelli, infatti, che sono interpretati i concetti primitivi e gli assiomi. Questo aspetto della teoria, in cui è fondamentale il significato degli enti, si chiama ***aspetto semantico*** ed è distinto dall'***aspetto sintattico*** che interessa invece lo svolgimento delle dimostrazioni, ma senza alcun riferimento al significato specifico dei concetti.

Ma ritorniamo per un momento sulla precedente affermazione a), per fornire un esempio di proposizione vera ma non dimostrabile (ovviamente sulla base degli assiomi ammessi).

Per prima cosa però dobbiamo precisare che, ammessi certi postulati (che per questo sono ritenuti "veri"), le deduzioni che ne derivano, vale a dire le proposizioni dimostrabili, non possono essere che proposizioni "vere".

Consideriamo ora la seguente proposizione:

A : «*La proposizione* A *non è dimostrabile*».

Delle due l'una: o A è vera o è falsa.

Se fosse falsa vorrebbe dire che "la proposizione A è dimostrabile". Dunque A sarebbe contemporaneamente falsa e dimostrabile. Il che è assurdo, giacché, come precisato prima, ogni proposizione di-

mostrabile è vera.
Se ne desume che la proposizione A è vera. Perciò esiste almeno una proposizione vera e non dimostrabile.
Il seguente grafo (Fig. 4) sintetizza efficacemente la situazione.

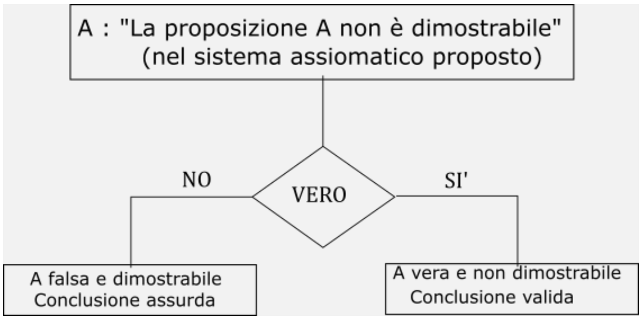


FIG. 4

87.2 L'ESEMPIO DELLA GEOMETRIA

87.2.1 Vogliamo adesso riprendere il discorso sull'impostazione assiomatica della geometria piana, sia per una sua riorganizzazione, sia per fornirti proprio un esempio di tale impostazione. Esempio che, naturalmente, è connesso a quanto abbiamo fatto intravedere fin qui.

Allora, un'impostazione assiomatica della geometria piana può essere quella in cui i concetti di ***punto***, ***retta*** e ***piano*** sono assunti come primitivi e sono caratterizzati dai postulati già enunciati. Di quei postulati, i primi quattro sono chiamati <u>postulati di connessione</u>. Per comodità li riportiamo qui di seguito:

Postulati di connessione (o di collegamento):

P1: Il ***piano*** è l'insieme dei ***punti***.

P2: Esistono sottoinsiemi propri del piano, detti ***rette***.

P3: Ad ogni retta appartengono almeno due punti distinti.

P4: Presi due qualsiasi punti distinti, esiste una ed una sola retta cui essi appartengono.

Sulla base di questi soli postulati si può già sviluppare una "mini-geometria". Lo facciamo con il tuo essenziale contributo.

- TEOREMA 1. *Scelta una retta qualsiasi del piano, esiste almeno un punto del piano che non appartiene ad essa.*
  DIMOSTRAZIONE. Siccome ogni retta è un sottoinsieme proprio del piano (P2), è evidente che almeno un punto del piano non sta sulla retta.
- TEOREMA 2. *Il piano contiene almeno tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa retta).*
- TEOREMA 3. *Il piano contiene almeno tre rette.*
  Lasciamo a te l'incombenza della dimostrazione di questi due teoremi.
- TEOREMA 4. *Due rette distinte hanno al più un punto in comune.*
  DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per assurdo. Se le due rette avessero in comune più di un punto, poniamo due, per essi passerebbero due rette distinte. Contro il postulato P4. Quindi le due rette non possono avere più di un punto in comune.

Il teorema 4 implica che in un piano che soddisfi ai 4 postulati di connessione, possono esistere coppie di rette che si secano in un punto (si dicono rette *secanti* o *incidenti*) e coppie di rette che non hanno punti comuni (rette *parallele*); anche se la presenza di queste ultime non è assicurata (rivedere modello di figura 2). Ebbene, noi vogliamo che nel nostro piano sia assicurata non solo l'esistenza ma anche l'unicità della retta parallela condotta ad una retta data per un punto esterno ad essa. Per questo dobbiamo integrare col postulato P5 il sistema dei primi 4. Riscriviamo anche questo postulato, noto come postulato delle parallele.

Postulato delle parallele:

P5: Per ogni punto esterno ad una retta, comunque scelta, si può condurre una ed una sola retta parallela ad essa.

Nel sistema dei cinque postulati P1, P2, P3, P4, P5 vale il seguente teorema.

- TEOREMA 5. *Il piano contiene almeno 4 punti ed almeno sei rette.*
  La dimostrazione è lasciata a te.

Ti proponiamo, inoltre, di studiare il seguente modello, detto **modello di Young** [7] (Fig. 5).

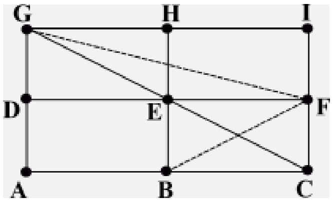


FIG. 5

Controlla in particolare che sono verificati i 5 postulati introdotti e le conseguenze che da esso discendono:
- il piano è l'insieme dei punti {A,B,C,D,E,F,G,H,I};
- le sue rette sono gli insiemi:

{A,B,C}, {D,E,F}, {G,H,I}, {A,D,G}, {B,E,H}, {C,F,I},
{A,E,I}, {C,E,G}, {A,F,H}, {B,D,I}, {B,F,G}, {C,D,H}.

In figura sono evidenziate nove delle dodici rette del piano di Young. Mettere in risalto le altre tre.
Ancora uno spunto per un tuo studio riguardo ad un piano che soddisfi ai 5 assiomi suddetti.

Dopo aver spiegato perché la precedente definizione di "rette parallele" (la retta a si dice parallela alla retta b se $a \cap b = \emptyset$) non è una relazione di equivalenza, modificala in questo modo:

«la retta a si dice parallela alla retta b se $a \cap b = \emptyset$ oppure $a = b$»

e dimostra che si tratta, questa volta, di una relazione di equivalenza E.
Le rette del piano si possono allora ripartire in classi di equivalenza rispetto ad E: ognuna di esse si chiama ***direzione***.
Stabilisci quante sono le direzioni nel modello di figura 1 e quante in quello di figura 2 e di figura 3.

87.2.2 Naturalmente, una costruzione della geometria basata sui soli postulati precedenti è troppo povera, benché non priva di spunti interessanti, come ti puoi rendere conto risolvendo alcuni degli esercizi posti nella sezione "verifiche". Ad ogni modo, in un piano in cui siano soddisfatti i soli 5 postulati ammessi potrebbe non aver senso un'espressione del tipo: «il punto C è compreso fra A e B». Basti pen-

7 **Young**, William Henry, matematico inglese, 1863-1942.

sare al modello dei 4 punti di figura 1. Allo stesso modo, potrebbero non aver senso altre espressioni del tipo di quella suddetta. Per cui non avrebbe senso parlare di "segmento" o di "semiretta".
Ebbene, espressioni di quel tipo acquistano invece pieno significato se il sistema dei 5 postulati è integrato da altri postulati: i cosiddetti postulati d'ordine. È necessario, però, assumere un altro concetto primitivo: il concetto "stare tra" o suoi sinonimi.

Postulati d'ordine:

P6: L'insieme dei punti di una retta è totalmente ordinato e su ogni retta sono possibili due ***ordinamenti*** (o ***versi***), uno opposto all'altro.

P7: Tra due punti distinti di ogni retta sta almeno un altro punto della retta.

P8: Per ogni punto di una retta esiste almeno un punto della stessa che lo precede ed almeno un punto che lo segue, secondo ognuno dei due versi possibili.

Il postulato P6 implica che la retta può essere concepita come retta ***ordinata*** (o ***orientata***).
Il postulato P7 assicura che la retta è ***densa***.
Il postulato P8 comporta che la retta è ***illimitata***.
Un'altra conseguenza dei postulati d'ordine è che ***la retta è costituita da un insieme infinito di punti***.
A questo punto possono essere definiti i concetti di "segmento" e di "semiretta":
- ***segmento*** è l'insieme dei punti di una retta che, secondo uno dei due ordinamenti possibili su di essa, sono compresi fra due dati punti della retta stessa, chiamati *estremi* del segmento;
- ***semiretta*** è l'insieme dei punti di una retta che, secondo uno dei due ordinamenti possibili su di essa, seguono un dato punto, detto *origine* della semiretta.

87.2.3 Un altro concetto, che è introdotto in uno studio empirico della geometria, è quello di "semipiano", definito come ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da una sua qualsiasi retta. Ora, anche se il fatto che una retta divida il piano in due parti può sembrare molto intuitivo, esso non può essere dedotto razionalmente dal sistema dei postulati P1-P8. È pertanto necessario codificarlo con un nuovo postulato.

Postulato di partizione del piano:

P9: Ogni retta r contenuta in un piano α determina una partizione di $\alpha - r$ in due sottoinsiemi, detti ***semipiani*** di *origine* r, tali che due qualsiasi punti dello stesso sottoinsieme sono gli estremi di un segmento che non interseca r, mentre due qualsiasi punti di sottoinsiemi diversi sono gli estremi di un segmento che interseca r.

87.2.4 Nella geometria, così come noi l'abbiamo sviluppata [(8)], 8 dei 9 postulati fin qui introdotti sono stati assunti tacitamente. Infatti solo il postulato delle parallele è stato enunciato esplicitamente. E ricorderai certamente che il nostro discorso fu avviato con le misure dei segmenti e degli angoli. Ma anche quest'approccio è stato di tipo intuitivo-sperimentale. Ora, in una trattazione assiomatica, ogni aggancio all'evidenza intuitiva deve essere escluso. Per cui anche le misure suddette devono trovare una collocazione razionale nel sistema assiomatico che stiamo descrivendo. Ciò può essere fatto in più modi diversi, tutti ugualmente rigorosi. Noi descriviamo un procedimento, forse non rigorosissimo, ma nel quale ben s'inserisce il discorso condotto a livello intuitivo negli anni passati.

[8] Cfr.: nota n. 1.

87.2.5 La misura di un segmento si definisce attraverso l'introduzione di un nuovo postulato, chiamato postulato della distanza.

Postulato della distanza:

P10: Ad ogni coppia ordinata (A,B) di punti del piano è associato uno ed un sol numero reale – si indica con la scrittura **d(A,B)** e si chiama ***distanza*** di A da B – tale che:
- $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$;
- $d(A,B)>0$ se e solo se $A \neq B$;
- $d(A,B) = d(B,A)$;
- $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ se e solo se $C \in [A,B]$;
- $d(A,B) < d(A,C) + d(C,B)$ se e solo se $C \notin [A,B]$.

Con la scrittura [A,B] si è indicato il segmento AB, estremi inclusi. Il numero d(A,B) si chiama anche ***misura*** (o ***lunghezza***) del segmento AB e si indica anche con $\overline{AB}$ oppure con dist(A,B) e a volte, se non si creano equivoci, semplicemente con AB. Come si sa, nella pratica è usato il *metro* come segmento unitario.
Considerata ora una retta r ed un punto O su di essa, per ogni punto P di ciascuna delle due semirette in cui r è divisa da O, l'assioma P10 assicura l'esistenza di un numero reale a, non negativo, tale che $\mathrm{dist}(O,P)=a$.
Nulla assicura, al contrario, che per ogni numero reale a non negativo, esista su ognuna delle due semirette un punto P tale che $\mathrm{dist}(O,P)=a$.
Se vogliamo che ciò avvenga dobbiamo aggiungere un nuovo assioma al nostro sistema. Un assioma che, in sostanza, assicuri che la retta non presenti "buchi", "interruzioni", "lacune". Per questo lo chiamiamo postulato di continuità della retta.

Postulato di continuità della retta:

P11: Considerata una qualunque delle due semirette in cui una retta r è divisa da un suo punto O, per ogni numero reale a, non negativo, esiste, sulla semiretta, uno ed un sol punto P tale che $\mathrm{dist}(O,P)=a$.

Il passaggio alla "retta cartesiana" è quasi automatico.

87.2.6 Riguardo agli angoli, se vogliamo un sistema assiomatico non inficiato dal ricorso a fatti intuitivi, dobbiamo modificare la tradizionale definizione, vale a dire la seguente definizione (o un'altra equivalente):

"***Angolo*** è ciascuna delle due parti in cui
il piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine".

Questa definizione non può essere generalizzata agli angoli maggiori di un angolo giro se non con considerazioni di carattere esclusivamente intuitivo. Se non vogliamo ricorrere a fatti intuitivi dobbiamo appunto modificare tale definizione. Assumiamo come nuova definizione la seguente:

Angolo orientato (r,s) è una coppia ordinata di semirette r, s aventi la stessa origine.

Se r ed s sono due semirette coincidenti l'angolo (r,s) si dice *nullo*; se sono opposte, l'angolo (r,s) si dice *piatto*.
L'angolo orientato (r,s) può essere positivo o negativo. Benché la distinzione possa essere precisata con considerazioni rigorose, in questo caso ci accontentiamo (ma solo per non appesantire il discorso) di chiarirla col ricorso all'intuizione. Diciamo allora che (r,s) è *positivo* se r ruota in senso antiorario

per sovrapporsi ad s, altrimenti esso è *negativo*.
La misura di un angolo orientato si definisce attraverso un postulato che possiamo chiamare postulato dell'ampiezza. Per enunciarlo abbiamo però bisogno di introdurre il concetto di "numeri *congrui* rispetto ad un dato modulo". Precisamente si dice che:
il numero reale a è ***congruo*** del numero reale b rispetto al modulo m, dove m è un numero reale positivo se esiste un intero k tale che risulti a–b=km: si scrive $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}\ (\mathbf{mod\ m})$.
Cosicché, per esempio:

- 390 è congruo di 30 rispetto al modulo 360; infatti: $390-30 = 1\cdot 360$;
- -30 è congruo di 330 rispetto al modulo 360; infatti: $(-30)-330 = -1\cdot 360$.

Enunciamo adesso il postulato dell'ampiezza.

Postulato dell'ampiezza:

P12: Fissato un intervallo reale $[0,2p[$, $\forall p\in\mathbb{R}_0^+$, ad ogni angolo orientato (r,s) è associato uno ed un sol numero reale – si indica ancora con $(\mathbf{r},\mathbf{s})$ oppure, se si teme di creare equivoci, con $\mathbf{mis}(\mathbf{r},\mathbf{s})$ – tale che, posto: $\widehat{rs}\equiv(r,s)\ (\text{mod } 2p)$, con $\widehat{rs}\in[0,2p[$, risulti:
- $\widehat{rs}=0$ se e solo se (r,s) è un angolo nullo;
- $\widehat{rs}=p$ se e solo se (r,s) è un angolo piatto;
- $(r,s)+(s,t)\equiv(r,t)\ (\text{mod } 2p)$ se r, s, t sono tre semirette qualsiasi aventi la stessa origine.

Il numero reale $\text{mis}(r,s)$ si chiama ***misura*** (o ***ampiezza***) dell'angolo orientato (r,s).
Il numero $\widehat{rs}$ si chiama ***misura*** (o ***ampiezza***) dell'angolo (r,s) positivo e minore di 2p. Quest'angolo si indica ancora con la scrittura $\widehat{rs}$.
Due angoli aventi la stessa ampiezza si dicono *congruenti* (o *uguali*).
Come si sa, nella pratica si assume p=180, nel qual caso si dice che gli angoli sono misurati in *gradi sessagesimali*. Un grado sessagesimale si indica con la scrittura 1°.
Ma si può assumere p=200. In tal caso gli angoli si dicono misurati in *gradi centesimali*. Un grado centesimale si indica con la scrittura 1^c.
E ancora si può assumere p=π, nel qual caso gli angoli sono misurati in *radianti*.
Con riferimento agli angoli misurati in gradi sessagesimali, facciamo notare che, per esempio, considerati gli angoli (r,s) ed (s,t), ampi rispettivamente 300° e 210° e aventi la stessa origine, risulta:

$$(r,s)+(s,t) = 300°+210° = 510° \equiv 150°\ (\text{mod } 360°)\ .$$

Si può osservare che, per P12, posto t = r, risulta:

$$(r,s)+(s,r) \equiv (r,r)\ (\text{mod } 2p) \equiv 0\ (\text{mod } 2p)\ ;$$

da cui segue:

$$(s,r) \equiv -(r,s)\ (\text{mod } 2p)\ .$$

Presi, ora, una semiretta r di origine O, per ogni semiretta s di origine O, per P12 esiste uno ed un solo numero reale $\alpha\in[0,2p[$ tale che, considerato uno degli angoli (r,s), risulti: $\alpha\equiv(r,s)\ (\text{mod } 2p)$.

Per assicurarsi che, presa una semiretta r di origine O, ad ogni numero reale α resti associata una ed un'altra sola semiretta r di origine O, tale che $\alpha\equiv(r,s)\ (\text{mod } 2p)$, si può assumere, come nel caso della retta, un postulato analogo, che possiamo definire "postulato di continuità degli angoli".

Postulato di continuità degli angoli:

P13: Per ogni retta r e per ogni numero reale α esiste una ed una sola semiretta s, con la stessa origine di r, tale che risulti $\alpha\equiv(r,s)\ (\text{mod } 2p)$.

Il numero reale α è ovviamente la misura dell'angolo $\widehat{rs}$.
A questo punto si possono introdurre tutte le definizioni sugli angoli già studiate, vale a dire le definizioni di angoli *consecutivi*, angoli *adiacenti*, angoli *opposti al vertice*.
Si può dimostrare, in particolare, che "due angoli opposti al vertice sono congruenti".

87.2.7 Le isometrie sono trattate come abbiamo fatto in passato [9]. Con la differenza che adesso il tutto è basato su un solo assioma – quello che a suo tempo abbiamo chiamato "primo criterio di congruenza dei triangoli" – dal momento che si dimostrano non solo il 2° e il 3° criterio, ma anche la proposizione che assicura che "*due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti*" e quella che assicura che "*per un punto si può condurre una ed una sola perpendicolare ad una retta*". Proposizioni che, invece, a suo tempo abbiamo assunto come "regole del gioco".
Enunciamo, dunque, questo assioma e vediamo come si conducono le dimostrazioni suddette.

Postulato della congruenza dei triangoli:

P14 - Primo criterio di congruenza dei triangoli: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso allora sono congruenti.

- TEOREMA - **Secondo criterio di congruenza dei triangoli**.

Se due triangoli hanno congruenti rispettivamente un lato e i due angoli adiacenti ad esso allora sono congruenti.
DIMOSTRAZIONE. Siano ABC e A'B'C' i due triangoli (Fig. 6) e supponiamo che sia:

$$AB \cong A'B', \quad \widehat{A} \cong \widehat{A'}, \quad \widehat{B} \cong \widehat{B'}.$$

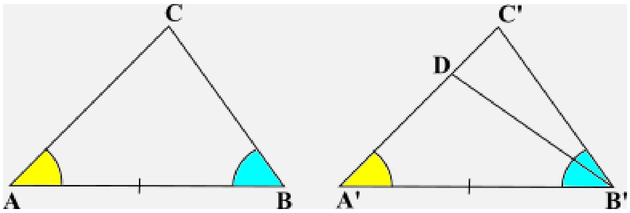


FIG. 6

Se fosse $AC \cong A'C'$ allora, in virtù del primo criterio, i due triangoli sarebbero congruenti.
Per concludere, quindi, che effettivamente lo sono, è sufficiente provare che $AC \cong A'C'$.
Ragioniamo per assurdo e supponiamo $AC \neq A'C'$. Delle due l'una: o $AC < A'C'$ o $AC > A'C'$.
Nella prima ipotesi esiste $D \in]A'C'[$ tale che $AC \cong A'D$. Di modo che i due triangoli ABC e A'B'D, essendo $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'D$ e $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$, sarebbero congruenti e risulterebbe $A\widehat{B}C \cong A'\widehat{B'}D$.
Di conseguenza gli angoli $A'\widehat{B'}D$ e $A'\widehat{B'}C'$, entrambi congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$, avrebbero la stessa ampiezza. Il che è assurdo poiché $A'\widehat{B'}D < A'\widehat{B'}C'$, in quanto la semiretta di origine B' passante per D è interna all'angolo $A'\widehat{B'}C'$. Bisogna, perciò, escludere che sia $AC < A'C'$.
Allo stesso modo si esclude che sia $AC > A'C'$. In definitiva deve essere $AC \cong A'C'$. [c.v.d.]

- TEOREMA - **Terzo criterio di congruenza dei triangoli**.

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente congruenti allora sono congruenti.
Sorvoliamo sulla dimostrazione, che comunque può essere effettuata sulla base delle proprietà fin qui acquisite.

[9] Cfr.: Unità 16: Isometrie nel piano e Unità 17: Composizione di isometrie.

La dimostrazione del prossimo teorema presuppone che sia stata definita l'isometria e ne siano stati evidenziati gli invarianti. E inoltre che sia stata trattata la simmetria centrale e siano stati evidenziati i suoi invarianti. Tutto ciò si fa, ovviamente, senza il coinvolgimento del teorema appresso enunciato.

- TEOREMA. *Due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano a, b due rette parallele (in senso stretto) e t una trasversale (Fig. 7). Poniamo $a\cap t=\{A\}$ e $b\cap t=\{B\}$, e sia O il punto medio del segmento AB. Chiamata s la simmetria centrale di centro O, osserviamo subito che $s(a)$ è la parallela ad a passante per $s(A)=B$. Cioè: $s(a)=b$.
D'altronde la simmetria s trasforma angoli in angoli congruenti e siccome $s\left(O\widehat{A}C\right)=O\widehat{B}D$, concludiamo che $O\widehat{A}C=O\widehat{B}D$. Di conseguenza anche $O\widehat{A}C'=O\widehat{B}D'$. [c.v.d.]

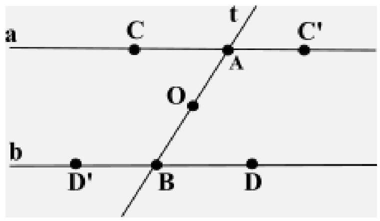


FIG. 7

87.2.8 Per dimostrare il teorema dell'esistenza ed unicità della perpendicolare ad una retta per un punto abbiamo bisogno di rivedere alcune definizioni e di qualche altra dimostrazione preliminare. Precisamente, supposti gli angoli misurati in gradi sessagesimali (ma il discorso vale in ogni caso):

- Un angolo (r,s) si dice ***retto*** se la sua ampiezza è 90°.
- Date due rette secanti r ed s, se uno dei quattro angoli che esse formano è retto allora tutti e quattro sono retti (la dimostrazione è semplice): le due rette si dicono ***perpendicolari***.
- Date due semirette r ed s, aventi la stessa origine O, esiste una ed una sola semiretta b, di origine O, tale che $\widehat{rb}=\widehat{bs}$.
  In effetti, siccome $\widehat{rb}+\widehat{bs}=\widehat{rs}$, affinché valga la precedente uguaglianza è necessario e sufficiente che risulti: $\widehat{rb}=\frac{1}{2}\ \widehat{rs}$. La semiretta b si dice ***bisettrice*** dell'angolo orientato (r,s) positivo e minore di 2p.

A questo punto possiamo dimostrare il teorema cui abbiamo accennato sopra.

- TEOREMA. *Per ogni punto del piano si può condurre una ed una sola retta perpendicolare ad una qualsiasi retta del piano.*

DIMOSTRAZIONE. Indicati con P il punto e con r la retta, se $P\in r$ (Fig. 8) la dimostrazione è pressoché immediata. Infatti, la perpendicolare per P ad r è la retta s che contiene la bisettrice di uno dei due angoli piatti aventi vertice in P e come lati le due semirette in cui P divide r.

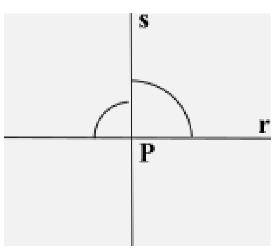


FIG. 8

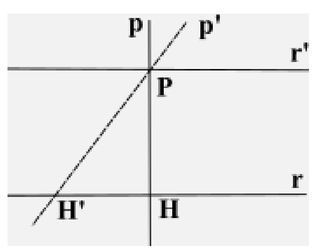


FIG. 9

Se invece $P \notin r$ (Fig. 9), conduciamo per P dapprima la parallela r' ad r e poi la perpendicolare p ad r'. Per il teorema precedente risulta $p \perp r$.
Questa perpendicolare è unica. Infatti, se per P si potesse condurre un'altra perpendicolare p' ad r, posto $\{H\}=r \cap p$ ed $\{H'\}=r \cap p'$, il triangolo PHH' avrebbe due angoli retti. Il che è assurdo.

87.2.9 Un'ultima regola abbiamo ammesso nell'impostazione della geometria piana: la regola per il calcolo delle aree. La assumiamo come postulato anche in questa impostazione assiomatica e lo sviluppo già noto non subisce modificazioni.

Postulato dell'area:

P15: Ad ogni superficie piana S è associato uno ed un solo numero reale non negativo – si indica con **A(S)** e si chiama ***area*** di S – tale che:
- A(S)=0 se S è un segmento;
- A(S)=ab se S è un rettangolo di dimensioni a, b;
- A(S')=A(S") se S' ed S" sono due superfici congruenti;
- A(S)=A(S')+A(S") se la superficie S è la somma delle superfici S' ed S".

Sulla base dei 15 postulati ammessi, la geometria piana può essere sviluppata completamente con un processo rigorosamente deduttivo. Tutto sommato, è quello che abbiamo fatto intravedere nella nostra impostazione. S'intende che quello descritto da noi non è l'unico sistema assiomatico. Tutt'altro. Anzi, ad onor del vero, altri sistemi assiomatici sono più rigorosi del nostro. Se proseguirai gli studi in ambito matematico ed avrai voglia di approfondire questa questione, la letteratura in materia non manca.

Qui comunque vogliamo fare ancora qualche breve considerazione riguardante la geometria. Dalla loro stesura (ca. 300 a.C.) e per oltre 2 millenni, gli *Elementi* di **Euclide** sono stati considerati un illustre esempio di rigore matematico. In realtà, oggi è chiaro a tutti che le cose non stanno esattamente in questi termini. E, in effetti, nella sistemazione euclidea, diverse cose non quadrano: vi sono assunzioni tacite, cioè non esplicitamente dichiarate (es.: la continuità della retta, l'ordinamento dei punti); figurano definizioni che appaiono prive di senso (es.: *punto è ciò che non ha parti*); l'opera insomma presenta dei difetti sotto l'aspetto del rigore logico e, soprattutto, appare basata su fatti intuitivi. Per questi motivi, ma soprattutto per ragioni legate alla scoperta delle geometrie non euclidee, che si possono sviluppare assumendo proprietà che sono in contrasto con quelle di Euclide, verso la fine dell'Ottocento, i matematici avvertirono la necessità di una reimpostazione più rigorosa della Geometria.
«[…] i termini non definiti della geometria devono essere assunti senza attribuire loro altre proprietà oltre quelle indicate negli assiomi. Bisognava abbandonare il livello empirico-intuitivo delle vecchie idee geometriche, e si dovevano concepire i punti, le rette e i piani semplicemente come elementi di certi insiemi dati».
Questo concetto, espresso dallo storico della matematica Carl B. Boyer,[10] traspare dalla lettura dell'opera geometrica che maggiormente avrebbe influenzato lo studio della geometria, e non solo di essa, fino ai nostri giorni: i *Fondamenti della geometria* (1899) del tedesco **David Hilbert** (1862-1943).
La geometria elementare studiata oggigiorno nelle nostre scuole continua comunque ad ispirarsi per lo più agli *Elementi* di Euclide, ancorché integrati e corretti dall'opera succitata di Hilbert. A volte si ispira anche all'opera *L'insegnamento della geometria* (1964) del matematico francese **Gustave Choquet** (1915-2006).

[10] BOYER C. B., ***Storia della matematica***, Milano, Mondadori, 1976.

Opera che, dando risalto alla geometria delle trasformazioni, determina una svolta rispetto a quella di Hilbert.
Qui non vogliamo fare una disamina di queste due opere. Ci piace però sottolinearne qualche aspetto interessante.
La geometria di Hilbert è fondata prevalentemente sulle nozioni di angolo e di triangolo, oltre che su quella di lunghezza (concepita come classe di segmenti congruenti) e di parallelismo. In essa svolgono un ruolo determinante le catene di triangoli congruenti. Tutto sommato come nell'opera di Euclide, ma con maggior rigore.
L'impostazione di Choquet – basata, oltre che sul campo totalmente ordinato dei numeri reali, anche sulla struttura additiva della retta, sul parallelismo e sulle simmetrie assiali – non fa ricorso agli angoli nella fase iniziale, e in essa i criteri di congruenza dei triangoli sono quasi una semplice curiosità.
Mentre in Hilbert "lunghezza di un segmento" e "misura della lunghezza di un segmento" (detta anche "misura del segmento") sono concetti distinti, in Choquet sono sinonimi. Allo stesso modo, in Hilbert "ampiezza di un angolo" e "misura dell'ampiezza di un angolo" (detta pure "misura dell'angolo") sono concetti distinti, mentre in Choquet sono sinonimi.
La nostra impostazione – pur con limiti di carattere logico, ma con qualche beneficio sul piano didattico – ha cercato di mediare tra le due suddette posizioni. Qualcosa ha pure mutuato dall'opera *Elementi di Geometria* (1926) del matematico italiano **Francesco Severi** (1879-1961), nella quale il "movimento" è assunto come concetto primitivo.

87.3 L'ESEMPIO DELL'ARITMETICA

87.3.1 Un altro esempio di teoria assiomatica è quella dei numeri naturali, fondata dal matematico piemontese **Giuseppe Peano** (1858-1932). Egli assume come concetti primitivi quelli di ***numero*** (**a**), di ***zero*** (**0**) e di ***successivo*** (**a***). Quindi, indicata con $\mathbb{N}$ la classe dei naturali, introduce 5 postulati:

1. $\mathbf{0} \in \mathbb{N}$
   (0 è un numero)
2. $\mathbf{a} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{a}^* \in \mathbb{N}$
   (il successivo di un numero è un numero)
3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N},\ \mathbf{a}^* = \mathbf{b}^* \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$
   (se i successivi di due numeri sono uguali anche i due numeri sono uguali)
4. $\mathbf{a} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{a}^* \neq \mathbf{0}$
   (zero non è il successivo di alcun numero)
5. $\mathbf{P} : \{\mathbf{P}(\mathbf{0}) \wedge (\forall \mathbf{a} \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{a}^*))\} \rightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbf{x}))$
   (se zero gode di una proprietà e se ogni volta che un numero gode di quella proprietà lo stesso vale per il successivo del numero, allora tutti i numeri godono di quella proprietà)
   (Si tratta evidentemente del celebre **principio d'induzione**: di esso Peano si serve per le sue dimostrazioni in maniera sistematica e continuativa).

Oltre ai tre concetti primitivi, per la verità, bisogna assumere un altro concetto, di natura logica, quello di uguaglianza "A=B", in base al quale è consentito sostituire A al posto di B e, viceversa, B al posto di A. In altri termini, è possibile leggere l'uguaglianza da sinistra a destra ma anche da destra a sinistra. Ed ancora, bisogna introdurre nel sistema l'uso delle parentesi: nulla di diverso e di nuovo rispetto a ciò che già conosci.

L'intera costruzione dei numeri naturali e delle operazioni con essi, proprietà incluse, discende solo ed esclusivamente da quei postulati (con le aggiunte di natura logica che abbiamo sottolineato).

Osservazione. Il quinto postulato, cioè il principio di induzione, in pratica afferma che, se A è un sottoinsieme di ℕ che soddisfa le due proprietà seguenti:

$$i)\ 0 \in \mathbb{N},$$
$$ii)\ a \in \mathbb{N} \to a^* \in \mathbb{N},$$

allora A coincide esattamente con ℕ, cioè A= ℕ.

Dai postulati 1 e 2 discende subito la definizione del numero "uno". Precisamente:

- Il successivo del numero **0** è un numero che si chiama "uno" (simbolo: **1**).

In simboli:

$$\mathbf{0}^* = \mathbf{1}.$$

87.3.2 L'**addizione** sui numeri naturali è un'operazione binaria (simbolo: "+", si legge: "più"), il cui risultato (detto **somma**), è caratterizzato dalle seguenti definizioni:

- il successivo a* del numero a è uguale alla somma di a con il numero 1;
- la somma di a con 0 è a;
- la somma di a con il successivo di b è il successivo di a+b.

In simboli, nell'ordine:

(1) $$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + \mathbf{1},$$
(2) $$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$
(3) $$\mathbf{a} + \mathbf{b}^* = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^*,$$

dove a, b sono numeri naturali qualsiasi.

Si desume subito come ad un qualsiasi numero si possa sommare 1, 2, 3, 4, ...

Esempi:

$1+1 = 1^* = 2$, $2+1 = 2^* = 3$, $3+1=3^*=4$, ... ;
$3+2 = 3+1^* = (3+1)^* = 4^* = 5$;
$5+3 = 5+2^* = (5+2)^* = 7^* = 8$;
$4+4 = 4+3^* = (4+3)^* = 7^* = 8$;
eccetera.

Si dimostrano alcuni teoremi, che esprimono le proprietà dell'addizione sui naturali.

TEOREMA 1. **Proprietà associativa dell'addizione**:

Comunque si scelgano i numeri naturali a, b, c:

(4) $$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ricorre al principio d'induzione.

Quali che siano a, b, la proprietà è vera per c=0. Infatti:

	(a)	$a+(b+0) =$
per la (2) in (a)	(b)	$= a+b =$
per la (2) in (b)	(c)	$= (a+b)+0.$

Dimostriamo che, se è vera per c=k, è vera anche per c=k+1. Ora, appunto per c=k+1, si ha:

	(d)	$a+(b+c) =$
poiché c=k+1 in (d)	(e)	$= a+[b+(k+1)] =$

per la (1) in (e)	(f)	$= a+(b+k^*) =$
per la (3) in (f)	(g)	$= a+(b+k)^* =$
per per la (3) in (g)	(h)	$= [a+(b+k)]^* =$
per la (1) in (h)	(i)	$= [a+(b+k)]+1 =$
per la (4) quando c=k in (i)	(l)	$= [(a+b)+k]+1 =$
per la (3) in (l)	(m)	$=[(a+b)+k]^* =$
per la (3) in (m)	(n)	$= (a+b)+(k+1) =$
per la (1) in (n)		$= (a+b)+c.$

In conclusione, per ogni scelta di a, b, c: $a+(b+c)=(a+b)+c$. [c.v.d.]

TEOREMA 2. **Proprietà commutativa dell'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b:

(5) $$\mathbf{a + b = b + a}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (2) si vede subito che la (5) vale quando b=0, ossia che, per ogni a:

(5') $$\mathbf{a + 0 = 0 + a.}$$

Ora, per il seguito della dimostrazione, occorre dimostrare anche che la proprietà vale per b=1, cioè che, per ogni a:

(5'') $$\mathbf{a + 1 = 1 + a.}$$

Per provare la (5'') procediamo di nuovo con il principio d'induzione.

Dalla (5'), la proprietà ($a+1=1+a$) vale evidentemente per a=0. Ammettiamo che valga per a=k (cioè ammettiamo che sia: $k+1=1+k$) e dimostriamo che vale ancora per a=k+1. Ora, appunto per a=k+1, si ha:

	(a)	$a+1 =$
poiché a=k+1 in (a)	(b)	$= (k+1)+1 =$
poiché k+1=1+k in (b)	(c)	$= (1+k)+1 =$
per la (4) in (c)	(d)	$= 1+(k+1) =$
poiché a=k+1 in (d)		$= 1+a.$

Quindi, per ogni a:

(5') $$\mathbf{a + 1 = 1 + a.}$$

Prendiamo adesso in esame il caso in cui b sia un numero naturale qualsiasi e, ancora una volta, procediamo con il principio d'induzione.

In base al caso precedente, qualunque sia a, la proprietà è certamente vera per b=1. Ammettiamo allora che sia vera per b=k e dimostriamo che è ancora vera per b=k+1. Ora, appunto per b=k+1, si ha:

	(e)	$a+b =$
poiché b=k+1 in (e)	(f)	$= a+(k+1) =$
per la (4) in (f)	(g)	$= (a+k)+1 =$
per la (5) quando b=k in (g)	(h)	$= (k+a)+1 =$
per la (4) in (h)	(i)	$= k+(a+1) =$
per la (5') in (i)	(l)	$= k+(1+a) =$

per la (4) in (l)	(m)	$=(k+1)+a=$
poiché $b=k+1$ in (m)		$=b+a.$

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b. [c.v.d.]

87.3.3 La **moltiplicazione** sui numeri naturali è un'operazione binaria (simbolo: "×", si legge "per"; oppure "·" oppure "niente" se non si creano equivoci), il cui risultato (detto **prodotto**), è caratterizzato dalle seguenti definizioni:

- il prodotto del numero a per 1 è uguale ad a;
- il prodotto del numero a per 0 è uguale a 0;
- il prodotto di a per il successivo di b è uguale al prodotto di a per b aumentato di a.

In simboli, nell'ordine:

(6) $$\mathbf{a\cdot 0 = 0\cdot a = 0,}$$

(7) $$\mathbf{ab^{*} = ab + a,}$$

dove a, b sono numeri naturali qualsiasi.

Esempi:

$3\times2 = 3\times1^* = 3\times1 + 3 = 3+3 = 6$; $5\times2 = \ldots = 10$; $5\times3 = 5\times2^* = 5\times2 + 5 = 10+5 = 15$.

Si noti che dalla (6) e dalla (7) segue immediatamente che:

(8) $$\mathbf{a\cdot 1 = a\cdot 0 + a = 0 + a = a,}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è usata la (2).

Si dimostra un teorema che esprime un legame fra l'addizione e la moltiplicazione.

TEOREMA 3. **Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, c:

(9) $$\mathbf{a(b + c) = ab + ac}.$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente, in virtù della (2) e della (6), la proprietà è vera per $c=0$.

Ammettiamo adesso che sia vera per $c=k$ e dimostriamo che è vera per $c=k+1$. Ora, appunto per $c=k+1$, si ha:

	(a)	$a(b+c)=$
poiché $c=k+1$ in (a)	(b)	$=a[b+(k+1)]=$
per la (4) in (b)	(c)	$=a[(b+k)+1]=$
per la (1) in (c)	(d)	$=a(b+k)^*=$
per la (8) in (d)	(e)	$=a(b+k)+a=$
per la (9) quando $c=k$ in (e)	(f)	$=(ab+ak)+a=$
per la (4) in (f)	(g)	$=ab+(ak+a)=$
per la (8) in (g)	(h)	$=ab+a(k+1)=$
poiché $c=k+1$ in (h)		$=ab+ac$

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b, c. [c.v.d.]

Si dimostrano alcuni teoremi, che esprimono le proprietà della moltiplicazione sui naturali.

TEOREMA 4. **Proprietà associativa della moltiplicazione**:

Comunque si scelgano i numeri naturali a, b, c:

(10) $$\mathbf{a(bc) = (ab)c}.$$

DIMOSTRAZIONE. Quali che siano a, b, la proprietà è vera per c=0. Infatti, dalla (6):

$$a(b\cdot 0)=a\cdot 0=0=(ab)\cdot 0 .$$

Dimostriamo che, se è vera per c=k, è vera anche per c=k+1. Ora, appunto per c=k+1, si ha:

	(a)	$a(bc) =$
poiché c=k+1 in (a)	(b)	$= a[b(k+1)] =$
per la (1) in (b)	(c)	$= a(bk^*) =$
per la (8) in (c)	(d)	$= a(bk+b) =$
per la (9) in (d)	(e)	$= a(bk)+ab =$
per la (9) quando c=k in (e)	(f)	$= (ab)k+ab =$
per la (8) in (f)	(g)	$= (ab)k^* =$
per la (1) in (g)	(h)	$= (ab)(k+1) =$
poiché c=k+1 in (h)		$= (ab)c.$

In conclusione, la proprietà è vera per ogni scelta di a, b, c. [c.v.d.]

TEOREMA 5. **Proprietà commutativa dell'addizione**:

Comunque si prendano i numeri naturali a, b:

(11) $\mathbf{ab = ba}$.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare questa proprietà abbiamo bisogno di un paio di risultati preliminari.
Anzitutto proviamo che, per ogni a:

(11') $\mathbf{a \cdot 1 = 1 \cdot a.}$

Procediamo ancora una volta con il principio d'induzione per provare la (11').
La (6) ci dice che la proprietà (a·1=1·a) vale per a=0. Ammettiamo che valga per a=k (cioè ammettiamo che sia: k·1=1·k) e dimostriamo che vale ancora per a=k+1. Ora, appunto per a=k+1, si ha:

	(a)	$1\cdot a =$
poiché a=k+1 in (a)	(b)	$= 1\cdot(k+1) =$
per la (7) in (b)	(c)	$= 1\cdot k+1 =$
per la (11') in (c) quando a=k	(d)	$= k\cdot 1+1 =$
per la (8) in (d)	(e)	$= k+1 =$
per la (8) in (e)	(f)	$= (k+1)\cdot 1 =$
poiché a=k+1 in (f)		$= a\cdot 1.$

Perciò la (11') rimane provata, usando il principio di induzione.
Ora occorre provare che

(11'') $\mathbf{(k+1)\cdot a = k\cdot a + a.}$

Anche in questo caso usiamo il principio di induzione su a. Anzitutto, la (11'') è senz'altro vera quando a=0, perché (k+1)·0=0 dalla (6), e k·0+0=0 dalla (6) e dalla (2). Ora, supponiamo vera la proprietà per a, e proviamo che è vera per a+1, cioè che (k+1)·(a+1)=k·(a+1)+ a+1. Si ha che:

	(a)	$(k+1)\cdot(a+1) =$
dalla (9) in a	(b)	$= (k+1)\cdot a+(k+1)=$
per la (11') che è vera per a	(c)	$= k\cdot a+a+k+1=$
per la (5) in (c)	(d)	$= k\cdot a+k+a+1=$

per la (9) in (d) (e) $= k\cdot(a+1)+a+1$.

Perciò anche la (11'') rimane provata, usando il principio di induzione.

Ora proviamo finalmente la (11). Di nuovo, usiamo il principio di induzione.

Sappiamo dalla (6) che la proprietà (11) è certamente vera per $b=0$. Ammettiamo allora che sia vera per $b=k$ e dimostriamo che è ancora vera per $b=k+1$. Ora, appunto per $b=k+1$, si ha:

	(g)	$ab =$
poiché $b=k+1$ in (g)	(h)	$= a(k+1) =$
per la (9) in (h)	(i)	$= ak+a\cdot 1 =$
per la (11) quando $b=k$ e la (11') in (i)	(l)	$= ka+a =$
per la (11'') in (l)	(m)	$= (k+1)a =$
poiché $b=k+1$ in (m)		$= ba$.

Dunque la proprietà è vera per ogni scelta di a, b. [c.v.d.]

87.3.4 Riguardo alla sottrazione e divisione con i numeri naturali, nulla di nuovo rispetto a quanto già conosci. E nulla di nuovo neppure per l'elevamento a potenza. Per la precisione:

- La **sottrazione** sui naturali è un'operazione binaria (simbolo: "-", si legge: "meno") il cui risultato (detto ***differenza*** o ***resto***) è caratterizzato dalla seguente proprietà:
  Presi due numeri naturali a, b, se esiste un naturale c tale che $b+c=a$, allora $a-b=c$.
  Il numero c è la *differenza* fra a e b.
- La **divisione** sui naturali è un'operazione binaria (simbolo: ":" oppure "/", si legge: "diviso") il cui risultato (detto ***quoziente esatto*** o ***quoto***) è caratterizzato dalla seguente proprietà:
  Presi due numeri naturali a, b, ($b\neq 0$), se esiste un naturale c tale che $bc=a$, allora $a:b=c$.
  Il numero c è il *quoto* fra a e b.
- L'**elevamento a potenza** sui naturali è un'operazione binaria il cui risultato è caratterizzato dalla seguente proprietà:
  Presi due numeri naturali a, b, si chiama ***potenza*** di *base* a e di *esponente* b (in simboli: $\mathbf{a^b}$, si legge: "a elevato b"), il numero:
  $$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{b fattori}}\ \text{ se } b>1;\quad a \text{ se } b=1;\quad 1 \text{ se } b=0 \text{ ma } a\neq 0.$$

Si possono dimostrare le varie proprietà di queste operazioni.

Osservazione. La divisione sui naturali di cui si è parlato poc'anzi non deve essere confusa (anche se, ovviamente, vi sono molte analogie) con la divisione "con quoziente e resto", che consiste, dati due numeri naturali a, b, con $b\neq 0$, nel determinare due numeri q, r (detti appunto *quoziente* e *resto*, rispettivamente) tali che:

$$a = b\cdot q + r,\qquad 0\leq r<b.$$

Quest'ultima divisione infatti, a differenza di quella di cui si è parlato prima, fornisce come risultato 2 numeri (appunto, quoziente e resto) e non uno solo. Inoltre, è sempre ben definita (nel senso che, presi a, b, con $b\neq 0$, esistono **sempre** quoziente e resto), mentre quella di cui si è parlato precedentemente no. Ovviamente, il legame tra queste due definizioni diverse di divisione è espresso dalla proprietà che, ogni qualvolta il resto della divisione tra a e b è 0, allora a:b è ben definita, e il risultato (il quoto) è proprio pari al quoziente.

87.3.5 Nulla di nuovo neppure riguardo alle relazioni “è minore” ed “è maggiore”. Precisamente:

- si dice che il numero naturale a è ***minore*** del numero naturale b (in simboli: a<b) se e solo se esiste un numero naturale c tale che a+c=b;
- si dice che il numero naturale a è ***maggiore*** del numero naturale b (in simboli: a>b) se e solo se esiste un numero naturale c tale che a=b+c.

Si dimostra facilmente che ogni volta che un numero a è minore di un numero b, accade che b è maggiore di a, e viceversa.

Si dimostra che ciascuna delle due relazioni gode della proprietà transitiva.

TEOREMA 6. **Proprietà transitiva di “<”.**

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, c: se a<b e b<c allora a<c.

DIMOSTRAZIONE. Se a<b allora esiste un naturale x tale che a+x=b; parimenti, se b<c allora esiste un naturale y tale che b+y=c. Quindi, per sostituzione: (a+x)+y=c, vale a dire a+(x+y)=c. Dal che, essendo evidentemente x+y un numero naturale, si desume che deve essere a<c. [c.v.d.]

TEOREMA 7. **Proprietà transitiva di “>”.**

Comunque si prendano i numeri naturali a, b, c: se a>b e b>c allora a>c.

DIMOSTRAZIONE. Se a>b e b>c allora evidentemente b<a e c<b. Di conseguenza, per il teorema 6, c<a e perciò a>c. [c.v.d.]

Osservazione. Torniamo ancora una volta sul principio di induzione. Una volta che sono state definite le relazioni di minore e maggiore, si può fornire una sua generalizzazione, utile per dimostrare proprietà che magari non sono vere per tutti i numeri naturali, ma lo sono “definitivamente”, cioè a partire da un certo numero naturale in poi. Si può infatti dimostrare, a partire dai cinque postulati, la seguente regola:

$$\mathbf{k\in\mathbb{N},\ P:\ \{P(k)\wedge(\forall a\in\mathbb{N}:a\geq k, P(a)\to P(a^*))\}\to(\forall x\in\mathbb{N}:x\geq k, P(x)),}$$

cioè: se un certo numero naturale k fissato gode di una proprietà e se ogni volta che un numero *maggiore o uguale a k* gode di quella proprietà lo stesso vale per il successivo del numero, allora tutti i numeri *maggiori o uguali a k* godono di quella proprietà.

Come si può constatare, si tratta di una generalizzazione alla quale abbiamo accennato in passato [11].

87.3.6 All’interno della teoria assiomatica dei numeri naturali esistono molte proposizioni indecidibili. Noi faremo un breve cenno soltanto ad alcune di esse. Prima di proseguire, è necessaria però una precisazione. Tali proposizioni sono *attualmente* indecidibili, ma può darsi che in futuro non lo saranno più, nel senso che qualche studioso sarà riuscito a dimostrarne la verità o la falsità all’interno della teoria assiomatica dei numeri naturali. Ciò non implica, tuttavia, che all’interno di questa teoria non ci saranno più proposizioni indecidibili. Al contrario: l’esistenza di tali proposizioni è inevitabile, giacché è intrinseca alla teoria stessa, che per questo rimane irrimediabilmente incompleta.

Andiamo adesso ad occuparci delle proposizioni indecidibili.

- Un numero naturale si dice **perfetto** se è uguale alla somma dei suoi divisori propri. I primi quattro numeri perfetti sono: **6, 28, 496, 8128**. Sembra che fossero già noti ai Pitagorici e fino all’anno 1461 furono i soli numeri perfetti conosciuti. In quell’anno fu scoperto il 5° numero perfetto, $\mathbf{2^{12}(2^{13}-1)}$. Negli anni seguenti, fino al 1876, furono trovati altri 7 numeri perfetti. A partire poi dalla metà del Novecento,

[11] Cfr.: Unità 39: Il principio d’induzione.

in seguito all'avvento dell'informatica, sono stati aggiunti 39 numeri perfetti ai 12 precedenti [12], così da portare il loro numero a 51, alla data del 7 dicembre 2018. Il numero scoperto in quella data, che è attualmente il più grande tra i numeri perfetti conosciuti, è formato da quasi 50 milioni di cifre nell'usuale sistema di numerazione decimale posizionale. Per avere un'idea di ciò che questo significhi, si immagini che ogni cifra occupi una larghezza di 2 mm: ebbene, il numero coprirebbe una lunghezza di quasi 100 km.

La congettura che esistano infiniti numeri perfetti è una proposizione indecidibile.

- Due numeri naturali si dicono **amici** (o anche, con una traduzione oscena dall'inglese: **amicabili**) se ciascuno di essi è uguale alla somma dei divisori propri dell'altro. La coppia di numeri amici più antica è {**220, 284**}: la sua scoperta è attribuita ai Pitagorici ed è l'unica coppia conosciuta dagli antichi. La seconda coppia di numeri amici, in ordine di tempo, è {**17296, 18416**} ed è attribuita a Fermat (1636). La terza coppia, sempre in ordine di tempo, è attribuita a Cartesio (1638) ed è la coppia {**9363584**, **9437056**}. In realtà esistono molte altre coppie di numeri amici, come le seguenti: **{1184, 1210}, {2620, 2924}, {5020, 5564}, {6232, 6368}**. Al giorno d'oggi se ne conoscono oltre 7 milioni di coppie.

  La congettura che esistano infinite coppie di numeri amici è una proposizione indecidibile.
- Si sa che, se si esclude il numero 2, gli altri numeri primi si trovano tutti nella successione dei numeri dispari a partire da 3 (1 non si considera "primo"):
  $$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ \ldots .$$
  Ora può capitare che due numeri consecutivi di questa successione siano entrambi primi, come per esempio quelli delle seguenti coppie:
  $$3-5\,,\quad 5-7\,,\quad 11-13\,,\quad 17-19\,,\quad 29-31\,,\quad 41-43\,,\quad \ldots .$$
  Ebbene, due numeri siffatti si dicono **numeri primi gemelli**.

  La congettura che esistano infinite coppie di numeri primi gemelli è una proposizione indecidibile.
- Anche la **congettura di Polignac**, la quale generalizza la congettura dei numeri primi gemelli affermando che:

  Per ogni numero pari n, esistono, nella successione dei numeri primi,
  infinite coppie di numeri primi consecutivi p, q tali che q-p = n,

  è una **proposizione indecidibile**.
- Un'altra **proposizione indecidibile** è la cosiddetta **congettura di Goldbach** [13]. Figura in una lettera scritta da Goldbach al suo collega ed amico Eulero nel 1742. Pare che Eulero l'abbia rielaborata ed oggi la congettura assume la forma seguente:

  Per ogni numero intero pari n maggiore di 2,
  esiste (almeno) una coppia di numeri primi p, q tali che n = p+q.

  Esempi:

$4 = 2 + 2;$	$6 = 3 + 3;$	$8 = 3 + 5;$
$10 = 3 + 7 = 5 + 5;$	$12 = 5 + 7;$	$14 = 3 + 11 = 7 + 7;$
$16 = 3 + 13 = 5 + 11;$	$18 = 5 + 13 = 7 + 11;$	eccetera.

87.4 L'ESEMPIO DELLA PROBABILITÀ

87.4.1 Una teoria assiomatica della probabilità è stata elaborata dal russo **Andrej Nikolaevic Kolmogorov**

[12] In realtà, oggigiorno si ricercano i numeri primi del tipo 2^p-1, dove p è a sua volta un numero primo. Questi numeri sono denominati numeri primi di Mersenne.

[13] **Goldbach**, Christian, nato a Könisberg, nella Prussia orientale, nel 1690, morì a Mosca nel 1764.

(1903-1987) che ne gettò le basi con la pubblicazione del lavoro *A general theory of measure and the calculus of probabilities* del 1929. La definitiva sistemazione si ebbe nel 1933, quando Kolmogorov pubblicò in Germania quello che è ormai un classico della matematica e un punto di riferimento per tutti i probabilisti: *Foundations of the Calculus of Probabilities*.

87.4.2 Un breve cenno a questa teoria, ancorché limitato al caso degli spazi campionari finiti.

Sia Ω un insieme di ***eventi semplici***. Ω è detto ***spazio campionario*** (o ***spazio di prova***). Supponiamo che sia finito. Sia poi Σ una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:

1) $\Omega \in \Sigma$;
2) se $A \in \Sigma$ e $B \in \Sigma$ allora $A \cup B \in \Sigma$, $\overline{A} \in \Sigma$, $\overline{B} \in \Sigma$, essendo A e $\overline{A}$ due eventi tali che $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ed analogamente B e $\overline{B}$.

Gli elementi di Σ si chiamano *eventi casuali*. Si dimostra che se $A \in \Sigma$ e $B \in \Sigma$ allora $A \cap B \in \Sigma$.

Si hanno le seguenti **definizioni**:

- l'evento casuale Ω si dice ***evento certo***, l'evento casuale $\emptyset$ si dice ***evento impossibile***;
- due eventi casuali A, B si dicono ***(mutuamente) incompatibili*** se $A \cap B = \emptyset$;
- l'evento casuale A e l'evento casuale $\overline{A}$ si dicono ***eventi contrari*** (o ***opposti***).

Si assumono i seguenti **assiomi**:

1) Ad ogni evento casuale $A \in \Sigma$ è associato uno ed un solo numero reale non negativo, indicato con P(A), detto ***probabilità*** di A.
2) $P(\Omega)=1$.
3) Se gli eventi casuali A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ di Σ sono incompatibili due a due allora:
$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Dagli assiomi si deducono subito alcune conseguenze.

COROLLARIO 1.

$$P(\emptyset) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. $\Omega=\Omega\cup\emptyset \rightarrow P(\Omega) = P(\Omega)+P(\emptyset) \rightarrow P(\emptyset) = 0$.

COROLLARIO 2.

$$P(\overline{A})=1-P(A)\,,\ \forall A\in\Sigma.$$

DIMOSTRAZIONE. $A\cup \overline{A}=\Omega \rightarrow P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega) \rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)$.

COROLLARIO 3.

Ammesso che sia $\Omega=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, se $A_i=\{a_i\}$ e $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=P$ allora: $P=1/n$.

Si dice che gli eventi semplici dello spazio campionario Ω sono ***equiprobabili***.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono due a due disgiunti, ossia se $A_i\cap A_j=\emptyset$ (con $i\neq j$), e inoltre $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega$, se ne desume che $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$. Per cui:

$$\underbrace{P+P+\ldots+P}_{\text{n addendi}}=1 \text{ e quindi } nP=1 \text{ e infine } P=1/n.$$

COROLLARIO 4.

Ammesso che $A=\{a_1, a_2,\ldots, a_k\}$ sia un evento casuale di uno spazio campionario Ω, formato da n eventi semplici equiprobabili, allora si ha: $P(A)=k/n$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $A_i=\{a_i\}$, risulta evidentemente $A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k$ e di conseguenza:

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{k\ \text{addendi}}=\frac{k}{n}\ .$$

Si possono dimostrare quindi i teoremi classici della teoria della probabilità (per spazi finiti). Ci vogliamo soffermare su quelli che costituiscono la necessaria premessa per la dimostrazione di due delle proprietà più significative della probabilità.

TEOREMA 1.

Quali che siano gli eventi casuali A, B di una stessa famiglia, risulta:

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B).$$

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, magari col supporto visivo di un diagramma di Eulero-Venn, si fa vedere che:

$$A-B=A\cap\overline{B},\quad (A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\emptyset\ ,\ (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A;$$

cosicché: $P(A-B)=P(A\cap\overline{B})$ e $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)$. Di conseguenza: $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$.

TEOREMA 2.

Se A, B sono due eventi casuali di una stessa famiglia, con $B\subseteq A$, allora:

$$P(A-B)=P(A)-P(B),\quad P(B)\le P(A).$$

DIMOSTRAZIONE.

$B\subseteq A \to A\cap B=B \to P(A\cap B)=P(B) \to P(A-B)=P(A)-P(B)$;

$B\subseteq A \to P(A-B)\ge 0 \to P(B)\le P(A)$.

TEOREMA 3.

Per ogni evento casuale A risulta: $\mathbf{0\le P(A)\le 1}$.

DIMOSTRAZIONE. Indicato con Ω lo spazio campionario, evidentemente $A\subseteq\Omega$. Per cui: $P(A)\le P(\Omega)$ e quindi $P(A)\le 1$. D'altronde, per assioma 1: $P(A)\ge 0$. Pertanto il teorema è dimostrato.

TEOREMA 4.

Quali che siano i due eventi casuali A, B, risulta: $\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto, magari col supporto visivo di un diagramma di Eulero-Venn, si fa vedere che:

$$A\cup B=A\cup(B-A)\quad \text{e}\quad A\cap(B-A)=\emptyset.$$

Quindi, tenendo presente il teorema 1:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ .$$

A questo punto, può essere introdotto il concetto di probabilità condizionata.

La probabilità dell'evento E_1, calcolata quando si sa che si è verificato un certo evento E, si chiama ***probabilità condizionata*** di E_1 quando si è verificato E (o probabilità di E_1 ***subordinata*** ad E). Si indica con la scrittura: $\mathbf{p\ (E_1|E)}$ e si legge: «pi di E_1 se E» oppure «pi di E_1 condizionata da E».

Si dimostra quindi che:

$$\mathbf{p(E_1|E)=\frac{p(E_1\cap E)}{p(E)}}\ .$$

Formula valida, evidentemente, solo se $p(E)\neq 0$.

Lo sviluppo è sostanzialmente analogo a quello già visto negli anni passati, almeno per alcuni aspetti di carattere elementare, che però non esauriscono la materia, ma ne costituiscono solo una parte infinitesimale.

S'intende che è possibile una teoria assiomatica estesa agli spazi campionari infiniti, ma non ce ne possiamo occupare.

87.5 NOTA STORICA

Dal V postulato di Euclide alle geometrie non euclidee … ed oltre.

87.5.1 Abbiamo accennato più volte in passato agli *Elementi* di Euclide. Qui ci interessa una disamina particolare di parte del I libro per ragioni che saranno chiare dalla lettura delle prossime pagine.

Esso inizia con un elenco di 23 ***definizioni***, alcune delle quali, per la verità, non definiscono nulla o, per meglio dire, forniscono una descrizione di enti supposti esistenti, come ad esempio la def. I: "*Punto è ciò che non ha parti*" o la definizione II: "*Linea è lunghezza senza larghezza*".

La critica moderna non le accetta come definizioni vere e proprie, poiché considera tali soltanto quelle definizioni che "creano" un ente o un concetto, come ad esempio la definizione XXIII che, tradotta nel nostro linguaggio, afferma: "*Parallele sono quelle rette che, essendo complanari, non hanno punti comuni".*

Dopo le definizioni Euclide elenca 5 *postulati* e 5 *nozioni comuni* [14].

I ***postulati***, tradotti nel nostro linguaggio, sono i seguenti:

I) per due punti distinti passa una e una sola retta;
II) ogni retta è illimitata;
III) si può descrivere un cerchio con un centro e un raggio qualsiasi;
IV) tutti gli angoli retti sono uguali fra loro;
V) se una retta, intersecandone altre due, forma due angoli coniugati interni la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette si intersecano da quella parte in cui la somma di quei due angoli è minore di due retti.

Le ***nozioni comuni*** sono le seguenti:

I) cose uguali a una terza sono uguali fra loro;
II) se a cose uguali sono addizionate cose uguali le totalità sono uguali;
III) se da cose uguali sono sottratte cose uguali i resti sono uguali;
IV) cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali;
V) il tutto è maggiore della parte.

Dopo l'elenco delle definizioni e quelli dei postulati e delle nozioni comuni il I libro prosegue e si conclude con 48 ***proposizioni***. Si tratta di veri e propri teoremi con relativa dimostrazione, vale a dire con deduzione logica dai postulati e dalle nozioni comuni, senza spazio alcuno all'intuizione che deriva dall'esperienza, almeno secondo le intenzioni di Euclide. Ma, come annotato, secondo la critica moderna questo non è sempre vero (es.: continuità, ordine).

[14] I "postulati" e le "nozioni comuni" sono proposizioni non dimostrate ma, secondo la concezione aristotelica, tutte più o meno "evidenti di per sé". La distinzione che ne fa Euclide deriva dal fatto che i primi si riferiscono solo a enti geometrici mentre le seconde sono intese come comuni alla geometria e ad altre scienze: queste ultime corrisponderebbero in certo modo a quelli che Aristotele chiamava "assiomi". Oggi non si fa più alcuna distinzione fra un postulato e un assioma: postulato e assioma sono sinonimi.

87.5.2 Si nota, nello svolgimento del I libro degli *Elementi*, una circostanza interessante: per le dimostrazioni delle prime 28 proposizioni Euclide non fa uso del V postulato. Sembra quasi che egli non sia tanto convinto che quel postulato sia realmente tale e non sia invece un teorema. E cerchi di ritardarne l'uso nella speranza di poterlo dimostrare. Le proposizioni 27 e 28 costituiscono il contenuto di quello che A. Frajese [(15)] chiama "teorema diretto delle parallele". Ad un certo punto, nella dimostrazione della proposizione 29, che inverte il "teorema diretto delle parallele", Euclide è costretto a ricorrere al V postulato e da allora in avanti lo utilizza senza riserve.

A ben vedere, mentre i primi 4 postulati euclidei hanno una forte evidenza intuitiva, il V è meno evidente. Ed è quasi certamente per questo che in molti, dopo Euclide, cercarono di darne una dimostrazione. Poiché nessuno, né Euclide né altri dopo di lui fino ai primi anni dell'Ottocento, dubitava della "verità" che esso esprimeva.

Ad ogni modo, tutti i tentativi di dimostrazione di quel postulato fallirono e non ebbero altro risultato che quello di sostituire ad esso un'altra proposizione, in qualche caso più "evidente" del V postulato, in qualche altro meno, ma comunque essa pure non dimostrata.

Tutta questa faccenda passò alla storia come **questione delle parallele**.

Ecco alcune delle tante proposizioni (oltre 20) – con qualche licenza nella loro formulazione – proposte in sostituzione del V postulato di Euclide:

- *Gli angoli coniugati interni formati da due rette parallele con una trasversale sono supplementari* (**Tolomeo**, matematico e astronomo alessandrino, 2º sec. d.C.).
- *Per un punto fuori di una retta si può condurre una sola parallela alla retta data* [(16)] (**Proclo** di Licia, filosofo neoplatonico, commentatore dell'opera euclidea, 5º sec. d.C.).
- *Se due rette a, b sono una perpendicolare e una obliqua ad una trasversale, rispettivamente in A e in B, i segmenti di perpendicolare abbassati dai punti di b su a sono minori di AB dalla parte in cui AB forma con b un angolo acuto, maggiori di AB dalla parte in cui AB forma con b un angolo ottuso* (**Nasir Eddin**, matematico arabo, 1201-1274).
- *Di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria* (**John Wallis**, matematico inglese, 1616-1703).
- *La somma degli angoli interni di un triangolo qualunque è uguale a due retti* (**Gerolamo Saccheri**, prete gesuita, docente di matematica, 1667-1733) [(17)].
- *Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza* (**Wolfgang Bolyai,** matematico ungherese, 1775-1856).

Tutte queste proposizioni sono equivalenti al V postulato di Euclide e quindi sono equivalenti tra loro. Nel senso che – supposti i primi 4 postulati e, di conseguenza, le prime 28 proposizioni – se si assume per vero il V postulato è dimostrabile ognuna delle proposizioni suddette e se si assume per vera una qualsiasi di esse è dimostrabile il V postulato.

---

[15] EUCLIDE, ***Gli elementi*** (a cura di A. Frajese – L. Maccioni), coll. Classici, Torino, UTET, 1970.

[16] Questa formulazione, integrata aggiungendovi l'unicità della parallela, assume la forma seguente: «*Per un punto fuori di una retta si può condurre una e una sola parallela alla retta data*». E, su proposta del matematico scozzese John Playfair (1748-1819), sostituì definitivamente, a partire dal 1795, il V postulato di Euclide. La nuova formulazione è anche denominata *assioma di Playfair*.

[17] In realtà, in Saccheri questa proposizione è dedotta e non è pertanto un postulato.

Per la verità, riguardo alle proposizioni di Nasir Eddin e di Gerolamo Saccheri, per l'equivalenza occorre ammettere un'altra ipotesi, il cosiddetto "postulato di Eudosso-Archimede":
«Date due grandezze omogenee, di ognuna di esse esiste almeno una multipla che supera l'altra».
Non ci soffermiamo sulla dimostrazione dell'equivalenza di ognuna delle suddette proposizioni, o di altre ancora, con quella di Euclide.

87.5.3 Nel contesto della "questione delle parallele" è notevole l'opera di Padre Gerolamo Saccheri. Ciò essenzialmente perché egli ebbe il merito di aver per primo impostato la questione in termini veramente corretti dal punto di vista logico, anche se poi non altrettanto rigoroso fu nella conclusione. Bisogna dire che fu anche coraggioso, poiché metteva in discussione un'opera classica, gli *Elementi*, come nessuno aveva mai fatto.
Ne parliamo in modo assai succinto. Questo sostanzialmente il suo modo di ragionare:

Ammetto i primi 4 postulati di Euclide e una negazione del V. Se nello sviluppo della teoria cado in contraddizione, concludo che quella negazione è falsa. Se riesco a fare ciò per ogni aspetto delle negazioni del V postulato, posso concludere che il V postulato è vero e ne ho dato così una dimostrazione.

Il contributo di Saccheri è contenuto in un libro, pubblicato nel 1733, anno della sua morte, dal titolo (ridotto, poiché in realtà il titolo è più lungo) *Euclides ab omni naevo vindicatus* (***Euclide emendato da ogni neo***).
Per la sua teoria egli introduce il "quadrilatero birettangolo isoscele" (Fig. 10), ottenuto mandando per gli estremi di un segmento AB, dalla stessa parte rispetto ad esso, due segmenti AD e BC, perpendicolari ad AB e congruenti fra loro.

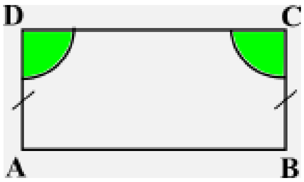


FIG. 10

Dimostra anzitutto che gli angoli in C e D sono congruenti. Ma come sono? Saccheri assume tre ipotesi:

- <u>ipotesi dell'angolo ottuso</u>: i due angoli sono ottusi;
- <u>ipotesi dell'angolo acuto</u>: i due angoli sono acuti;
- <u>ipotesi dell'angolo retto</u>: i due angoli sono retti.

Dimostra quindi alcuni teoremi, tra cui il seguente:

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, acuto, retto,
la somma degli angoli interni di ogni triangolo è rispettivamente
maggiore, minore, uguale a due retti.

A questo punto Saccheri articola una serie di considerazioni che conducono alla distruzione dell'ipotesi dell'angolo ottuso. Per dirla con le sue parole, «*Hypotesis anguli obtusi est absolute falsa, quia in se ipsam destruit*» [18].
Eliminata l'ipotesi dell'angolo ottuso in modo assolutamente rigoroso, Saccheri passa al tentativo di eliminare anche l'ipotesi dell'angolo acuto e conclude la sua fatica con questo teorema:

L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa.

Egli, infatti, aveva stabilito in precedenza che in tale ipotesi dovrebbero esistere rette che si avvicinano sempre di più senza incontrarsi (*rette asintotiche*) o, per meglio dire, che s'incontrano all'infinito dove inoltre presenterebbero una perpendicolare comune e ciò, secondo il suo punto di vista, ***ripugna alla natura della retta***.
Ora, la conclusione alla quale giunge Saccheri può pure "ripugnare alla natura della retta", ma non contraddice le premesse e perciò non è accettabile. In sostanza il tentativo di Saccheri fallisce.
L'opera di Saccheri si diffuse rapidamente dopo la sua pubblicazione, ma, una volta individuato l'errore logico, cadde nel dimenticatoio. Solo nel 1889 il matematico italiano Beltrami [19] richiamò su di essa l'attenzione dei geometri, pubblicando sull'argomento la nota: *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatscheivsky* .

87.5.4 Attraverso due millenni, dunque, matematici di epoche e Paesi diversi non riuscirono a dimostrare il V postulato di Euclide con deduzione logica dagli altri 4 poiché sempre si trovarono costretti a sostituire quello con un'altra proposizione, essa pure non dimostrabile sulla sola base dei primi 4 postulati di Euclide. Ora però, ad onor del vero, l'affermazione che i matematici non giunsero ad altro risultato se non a quella sostituzione, come abbiamo detto in precedenza, è riduttiva. Infatti, oltre ad aver arricchito la Geometria con la scoperta di numerosi teoremi più o meno interessanti, un risultato veramente importante, almeno ai nostri occhi, fu raggiunto. Questo:

In una ipotetica geometria in cui il V postulato di Euclide non fosse valido (ma lo fossero i primi 4) non sarebbero valide neppure le proposizioni ad esso equivalenti.

In questa ipotetica geometria, in particolare:
- per un punto non si potrebbe condurre una sola parallela ad una retta (Proclo): si dovrebbero poter condurre o nessuna parallela o più di una parallela;
- non esisterebbero figure simili in senso stretto (Wallis): due figure simili sarebbero congruenti;
- la somma degli angoli interni di un triangolo non sarebbe uguale a due retti (Saccheri): sarebbe minore o maggiore;
- non sarebbe vero che per tre punti non allineati passa una circonferenza (W. Bolyai).

87.5.5 Oggi, in realtà, sappiamo che esistono geometrie in cui non è valido il V postulato di Euclide (ma lo sono gli altri 4): si chiamano **geometrie non euclidee**. Sappiamo pure che la causa dei fallimenti dei tentativi compiuti per dimostrare il V postulato fu dovuta al fatto che si cercava una cosa che non c'è. Solo che questo, fino ai primi anni del XIX secolo, i matematici non lo sapevano. Non sapevano, cioè, che il V postulato di Euclide non è dimostrabile poiché, per l'appunto, è un postulato.

[18] *L'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa in quanto distrugge se stessa*.
[19] **Beltrami**, Eugenio; Cremona, 1835 – Roma, 1900.

Bisogna arrivare all'opera di **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (1793-1856) e di **Janos Bolyai** (1802-1860, figlio di Wolfgang) per scoprirlo. Essi, in effetti, risolsero definitivamente la questione delle parallele e lo fecero l'uno separatamente e indipendentemente dall'altro.
Bisogna aggiungere che altri studiosi si erano occupati della faccenda e soprattutto il tedesco **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), al quale si deve il nome di «*geometria non euclidea*». Egli quasi certamente era giunto alla scoperta di una geometria non euclidea, ma non lasciò mai trapelare le sue idee perché sicuro di non essere compreso. Come scrisse egli stesso, voleva evitare «*das Geschrei der Böotier*», cioè «*le risa dei beoti*». Noi sappiamo tutto questo dalla corrispondenza che Gauss tenne con altri studiosi della sua epoca e che fu pubblicata dopo la sua morte.


J. Bolyai


Lobačevskij


Gauss

Si era dedicato anima e corpo alla questione delle parallele l'ungherese Janos Bolyai, nonostante le insistenze del padre che cercava di dissuaderlo in tutti i modi dall'impegnarsi in un tentativo al quale egli, Wolfgang, aveva dedicato inutilmente una vita di studi. Ecco cosa scriveva al figlio [20]:
Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito e della felicità.
Ma Janos non desistette e il 3 novembre 1823, alla giovane età di 21 anni, scriveva al padre una lettera in cui fra l'altro diceva [21]:
Sono ormai risoluto di pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; […]. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: Ho dal nulla creato un nuovo universo.
Dopo alcuni tentennamenti, Janos, nel 1829, si decise a mandare l'opera al padre, che nel 1832 la pubblicò come *Appendice* [22] al primo volume di una sua opera oggi conosciuta come ***Tentamen***. L'appendice fu inviata anche a Gauss – amico di Wolfgang – affinché esprimesse il suo autorevole parere. Così il 6 marzo 1832 Gauss rispondeva a Wolfgang [23]:

---

20 BOYER C. B., op. cit.
21 BOYER C.B., op. cit.
22 Precisamente: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (*Appendice che espone in maniera assoluta la vera scienza dello spazio*)
23 BONOLA R., ***La geometria non-euclidea***, Bologna, Zanichelli, 1906.

Se comincio col dire che non posso lodare questo lavoro, tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non posso dire altra cosa; lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'opera, la via spianata da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. Così rimasi pienamente stupefatto. In quanto al mio lavoro personale, del quale fin qui ho ben poco confidato alla carta, era mia intenzione di non lasciare che si pubblicasse nulla durante la mia vita. [...] Al contrario era mia idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perché esso almeno non perisse con me. È adunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico, che mi abbia preceduto in modo così notevole.

Questa lettera ebbe un effetto dirompente su Janos, che si sentì defraudato della primogenitura di una scoperta che riteneva sua. E non solo conservò una notevole avversione per Gauss, ma non pubblicò più nessun altro lavoro e morì pazzo.

La produzione del russo Lobačevskij è più ricca di quella di Bolyai. Forse incomincia con una comunicazione che egli avrebbe tenuto nel 1826 alla sezione fisico-matematica dell'Università di Kazan, dal titolo ***Una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele***, ma sulla quale non tutti gli storici concordano. Comunque, anche se tale comunicazione c'è stata, la memoria andò perduta.

Certamente Lobačevskij nel 1829, sul Gazzettino di Kazan, pubblicò in russo l'opera ***Sui principi della geometria*** e, ancora in russo, tra il 1835 e 1838, ***i Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele***.

Fino a questo momento le sue idee non erano uscite dall'ambito di Kazan. Ma nel 1840 le sue ***Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele*** furono lette da Gauss, che propose di eleggere Lobačevskij membro della Società Scientifica di Gottinga: cosa che avvenne nel 1842.

Nel 1855, l'anno prima della sua morte, Lobačevskij pubblicò in russo e in francese la ***Pangeometria***.

Le teorie di Lobačevskij e di Bolyai sono simili come idea, ma differenti nella realizzazione pratica.

In particolare, Bolyai si occupò a fondo delle proprietà geometriche che si ottengono sulla base dei primi 4 postulati di Euclide ma senza formulare ipotesi sulla validità o meno del 5º postulato. L'insieme dei risultati costituisce la cosiddetta **geometria assoluta**.

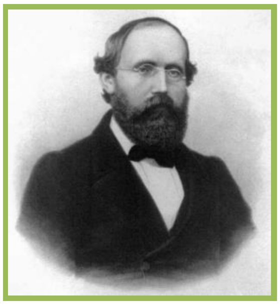
Lobačevskij invece approfondì la geometria che si basa, oltre che sui primi 4 postulati di Euclide, su una negazione del V, precisamente quella che corrisponde all'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri.

In particolare nella **geometria di Lobačevskij**, valgono le seguenti proprietà:
- Per un punto esterno ad una retta di possono condurre due parallele alla retta.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti ma non è costante. Precisamente, detta S tale somma espressa in radianti, la differenza $d = \pi - S$ (chiamata ***difetto***), è proporzionale all'area del triangolo.
- Non esistono quadrilateri con i quattro angoli retti.
- Due figure simili sono congruenti.

87.5.6 La geometria di Lobačevskij-Bolyai realizza dunque l'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri.

L'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa (come lo stesso Saccheri aveva dimostrato) e per questo irrealizzabile. Sempre, però, che si ammettano i primi 4 postulati euclidei. Se però viene meno l'ipotesi dell'illimitatezza della retta (II postulato), anche l'ipotesi dell'angolo ottuso si realizza. In effetti nella geometria di Lobačevskji-Bolyai le rette sono illimitate e, pertanto, di lunghezza infinita.
La teoria di una geometria in cui le rette hanno una lunghezza finita fu sviluppata dal matematico tedesco **Bernhard Riemann** (1826-1866) in un suo lavoro, noto come la ***Dissertazione***, pubblicato postumo, nel 1867, ad opera del suo biografo ed amico Richard Dedekind, ma composto nel 1854.

Si tratta di una geometria non euclidea, oggi denominata **geometria di Riemann**. Valgono in essa le seguenti proprietà:
- Non esistono parallele condotte per un punto ad una retta.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti ma non è costante. Precisamente, detta S tale somma espressa in radianti, la differenza $d=S-\pi$ (chiamata ***eccesso***), è proporzionale all'area del triangolo.
- Non esistono quadrilateri con i quattro angoli retti.
- Due figure simili sono congruenti.


Riemann


Klein

87.5.7 Allora con la geometria euclidea, quella di Lobačevskji e quella di Riemann, sono possibili almeno tre geometrie e i risultati validi in ciascuna di esse sono in chiara contraddizione con quelli delle altre due.

Qual è la geometria vera? Ha senso tale domanda? Com'è possibile trovare una risposta?

Sono tutti interrogativi che sorsero prepotentemente nella seconda metà dell'Ottocento.
Per provare la coerenza degli assiomi da cui deriva una geometria, e quindi sostanzialmente la sua "verità", si pensò di fornire dei modelli di quella geometria. Fu il matematico tedesco **Felix Klein** (1849-1925) a suggerire i modelli adatti. Fu poi lo stesso Klein ad attribuire alle geometrie di Riemann, di Lobačevskji e di Euclide i nomi rispettivamente di ***geometria ellittica***, ***geometria iperbolica*** e ***geometria parabolica***.

● Il **modello di geometria iperbolica** proposto da Klein è il seguente:
  - il "piano" è rappresentato dai punti interni ad una conica, per esempio una circonferenza k (Fig. 11);
  - la "retta" passante per due punti A, B è la corda di k, esclusi gli estremi C, D, passante per A, B; due corde di k secantisi in un punto di k medesima sono due "rette parallele";

- la “distanza” di due punti è definita nel modo seguente:

$$\mathrm{dist}(A, B) = \rho \left| \ln \frac{\overline{CA} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{CB}} \right|$$

dove ρ è una costante di proporzionalità, reale e positiva.

Si può constatare che $\mathrm{dist}(A,B)=\rho \ln 1 = 0$ se $A=B$, mentre $\mathrm{dist}(A,B)\to\infty$ sia se $A\to C$ sia se $B\to D$.

Con appropriate definizioni di “angolo” di due rette e di “figure congruenti”, il modello di Klein è un sistema perfettamente coerente, nel quale peraltro sono validi i primi 4 postulati di Euclide.

È possibile dimostrare inoltre che per ogni punto P del piano di Klein si possono condurre due rette parallele ad una retta AB: le rette PC e PD. Per cui non vale il V postulato di Euclide. Ed ancora, che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti.

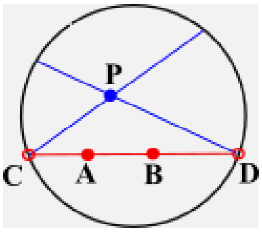


FIG. 11

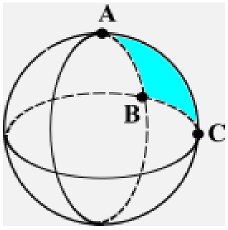


FIG. 12

- Il **modello di geometria ellittica** suggerito da Klein, ma sostanzialmente ideato da Riemann, è realizzato sulla superficie sferica. In questo modello (Fig. 12) precisamente:
  - il “piano” è per l’appunto la superficie sferica,
  - i “punti” sono i punti della superficie sferica (identificando con un sol punto due punti diametralmente opposti),
  - le “rette” sono le circonferenze massime e perciò sono limitate ed hanno lunghezza finita.

In questo modello valgono il I, il III e il IV postulato di Euclide, ma non esistono “rette parallele” poiché due “rette” distinte, comunque scelte, si intersecano. Per cui non vale il V postulato di Euclide. Inoltre in ogni triangolo la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto.

In realtà, Klein ideò un modello di geometria ellittica tutto suo. In questo modello (Fig. 13) il “piano” è rappresentato dai punti che non sono esterni ad una data circonferenza k (e quindi dai punti interni a k e da quelli situati su k), con la condizione che due punti diametralmente opposti si considerano un unico punto. Le “rette” sono le semiellissi il cui asse maggiore è un diametro di k.

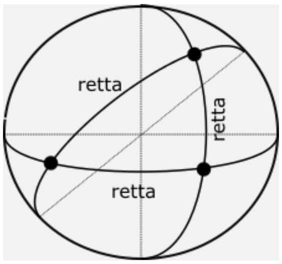


FIG. 13

Klein, con i suoi modelli euclidei di geometrie non euclidee, dimostrò un fatto fondamentale: se ci fossero contraddizioni logiche all'interno delle geometrie non euclidee, queste dovrebbero ritrovarsi già nella geometria euclidea; se non ce ne sono in questa, neppure in quelle ce ne sono.
Che si deve pensare dunque delle tre geometrie se tutte e tre sono contemporaneamente vere e pur tuttavia i risultati di una sono in contrasto con quelli delle altre?
Oggi questa domanda può far sorridere perché in qualche misura siamo abituati a distinguere fra "geometria intesa come studio dello spazio fisico" e "geometria concepita come pura teoria matematica". Ma verso la fine dell'Ottocento, quando questa distinzione non era neanche pensabile e l'unica geometria che aveva diritto di cittadinanza era quella capace di descrivere lo spazio che ci circonda, quella domanda costituiva un grosso interrogativo. Incominciava, tuttavia, a formarsi nella mente dei matematici l'idea di una reale possibilità di convivenza fra le tre geometrie.
Il matematico francese **Jules-Henri Poincaré** (1854-1912) – ideatore fra l'altro di modelli di geometria iperbolica – riguardo all'interrogativo se la geometria euclidea sia quella vera e, si sottintende, false le altre, affermò [24] che «*La domanda non ha alcun senso*. *Così come non lo ha la domanda se il sistema metrico sia vero e le antiche misure false; se le coordinate cartesiane siano vere e le coordinate polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra; può soltanto essere più comoda*».
Veniva insomma a cadere il dogma della verità assoluta della geometria euclidea. **Veniva a cadere la concezione che gli assiomi della geometria fossero evidenti di per sé perché fatti di intuizione**, legati alla nostra esperienza sensibile. Essi non sono verità inconfutabili. Incominciava a farsi strada una concezione nuova: **la verità degli assiomi è ammessa per convenzione**. Ricordiamo al riguardo un altro pensiero di Poincaré [25], già riportato all'inizio di questa unità: *«[Gli assiomi geometrici] sono convenzioni: fra tutte le convenzioni possibili, la nostra scelta è guidata da fatti sperimentali; ma resta libera ed è limitata unicamente dalla necessità di evitare qualsiasi contraddizione».*
Questa nuova concezione avrebbe comportato nuovi e seri problemi, compresa una ridefinizione del concetto di "verità": qualcosa in merito abbiamo fatto intravedere nello studio di questa stessa unità.

AVVERTENZA. Le caratteristiche di questa unità non richiedono altri esercizi di verifica, oltre a quelli proposti qua e là nello svolgimento dell'unità medesima. Per un'ulteriore verifica dell'apprendimento possono bastare quelli e la consueta "breve sintesi per domande e risposte".

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. Qual è la differenza sostanziale fra il concetto di assioma come lo intendeva Euclide e il concetto di assioma come lo si è inteso dopo la scoperta delle geometrie non euclidee?
2. Qual è la differenza fra concetto primitivo e definizione?
3. Cosa c'è di comune e di differente in un assioma e in un teorema?
4. È vero o è falso che "corollario" e "lemma" sono in sostanza dei teoremi?

[24] Cfr.: nota n. 2.
[25] Cfr.: nota n. 2.

5. Quando un sistema di assiomi si dice consistente?
6. Quando una proposizione si dice indecidibile (in un sistema di assiomi)?
7. Quando un sistema di assiomi si dice completo?
8. In cosa consiste il "metodo matematico" che spesso è chiamato in causa e anche utilizzato nelle scienze sperimentali?

RISPOSTE.

1. Per Euclide un assioma è una "verità evidente di per sé"; dopo la scoperta delle geometrie non euclidee questa concezione non ha avuto più senso e un assioma è stato inteso come una "convenzione" pura e semplice.
2. Un concetto (o ente o termine) primitivo è assunto senza definizione: le sue caratteristiche sono implicite negli assiomi. Una definizione crea un concetto nuovo.
3. Assioma e teorema sono proposizioni "vere" in una teoria. L'assioma è assunto come vero per ragioni di tipo diverso, ma comunque senza dimostrazione; il teorema è invece una proposizione dimostrata (cioè dedotta da altre proposizioni vere) e per questo vera.
4. È vero, anche se c'è qualche sfumatura che li distingue da un teorema vero e proprio. Infatti per corollario s'intende una proposizione la cui dimostrazione scaturisce in modo immediato da una proposizione già dimostrata o assunta per vera, mentre per lemma s'intende una proposizione che viene premessa ad un teorema vero e proprio per renderne più comprensibile la dimostrazione.
5. Un sistema di assiomi si dice consistente (o coerente o non contraddittorio) quando non accade che fra le proposizioni del sistema figurino una proposizione e la sua contraria.
6. Quando di essa non di può dedurre né che sia vera né che sia falsa.
7. Quando tra le proposizioni del sistema non figurano proposizioni indecidibili.
8. Il metodo matematico è sostanzialmente il metodo ipotetico-deduttivo. Vale a dire un metodo in cui si assumono dei termini primitivi, un sistema di assiomi che li caratterizza e in cui ogni altro ente è definito e ogni altra proposizione è dimostrata. Nelle scienze sperimentali, di norma gli assiomi non sono altro che i principi o regole che sono state scoperte sperimentalmente, per l'appunto.

LETTURA

Tratta da Jules-Henri Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, Milano, Bompiani, 2003, pagg. 83-87.

Sulla natura degli assiomi della geometria.

Per la maggior parte i matematici considerano la geometria di Lobačevskij una semplice curiosità logica. Tuttavia, vi è stato chi si è spinto oltre. Dal momento che sono possibili più geometrie, è certo che sia la nostra quella vera? L'esperienza pare insegnarci che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti; ma il motivo di ciò è che noi lavoriamo unicamente con triangoli troppo piccoli; da Lobačevskij in poi la differenza è proporzionale all'area del triangolo: non potrebbe diventare sensibile qualora lavorassimo con triangoli più grandi o qualora le nostre misurazioni diventassero più precise? Se così fosse, la geometria euclidea non sarebbe altro che una geometria provvisoria.

Per discutere tale opinione dobbiamo anzitutto chiederci quale sia la natura degli assiomi geometrici.

Sono giudizi sintetici *a priori*, come voleva Kant?

Allora, si imporrebbero a noi con una forza tale che non ne potremmo concepire la proposizione contraria, né su di questa costruire un edificio teorico. Non vi sarebbero geometrie non euclidee.

Per convincersene, si consideri un genuino giudizio sintetico *a priori*, [come] per esempio...:

Se un teorema è vero per il numero 1 *e se si è dimostrato che è vero per* n + 1 *a condizione che lo sia per* n*, allora sarà vero per tutti i numeri interi positivi.*

Si cerchi poi di sottrarvisi e di fondare con la negazione di tale proposizione una falsa aritmetica analoga alla geometria non euclidea – non vi si riuscirà; anzi, si sarà di primo acchito tentati di considerare questi giudizi [come] analitici.

[...]

Dobbiamo perciò concludere che gli assiomi della geometria siano verità sperimentali? Ma non si sperimenta su rette o circonferenze ideali; lo si può fare unicamente su oggetti materiali. Su che cosa verterebbero, dunque, le esperienze che servissero da fondamento alla geometria? La risposta è facile.

In precedenza abbiamo visto che costantemente ragioniamo come se le figure geometriche si comportassero alla maniera dei solidi. La geometria, dunque, prenderebbe in prestito dall'esperienza le proprietà di questi corpi.

[…]

Ma una difficoltà sussiste, ed è insormontabile. Se la geometria fosse una scienza sperimentale, non sarebbe una scienza esatta, ma sarebbe sottoposta a continua revisione. Che dico? Sarebbe fin d'ora <u>convinta d'essere in errore</u> [meglio detto: <u>riconosciuta errata</u>, *N.d.A.*] dal momento che sappiamo che non esiste solido rigorosamente invariabile.

Gli assiomi non sono dunque né giudizi sintetici a priori *né fatti sperimentali*.

Sono *convenzioni*: fra tutte le convenzioni possibili, la nostra scelta è *guidata* da fatti sperimentali; ma resta *libera* ed è limitata unicamente dalla necessità di evitare qualsiasi contraddizione. È così che i postulati possono rimanere *rigorosamente* veri anche se le leggi sperimentali che hanno determinato la loro adozione non sono che approssimative.

In altri termini, gli *assiomi della geometria* (non parlo di quelli dell'aritmetica) *non sono altro che semplici definizioni camuffate*.

Che cosa pensare allora della domanda: La geometria euclidea è vera?

Essa non ha alcun senso.

Così come non lo ha la domanda se il sistema metrico sia vero e le antiche misure false; se le coordinate cartesiane siano vere e le coordinate polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra; può soltanto essere più *comoda*.

Ora la geometria euclidea è e resterà la più comoda:

1° Perché è la più semplice; e non lo è soltanto per le nostre abitudini intellettuali o per non so quale intuizione diretta che avremmo dello spazio euclideo; è la più semplice in sé, proprio come un polinomio di primo grado è più semplice di uno di secondo grado; [e come] le formule della trigonometria sferica sono più complicate di quelle della trigonometria rettilinea, e apparirebbero ancora tali agli occhi di un analista che ne ignorasse il significato geometrico.

2° Perché si accorda piuttosto bene con le proprietà dei solidi naturali, corpi questi che tocchiamo con le nostre membra e che vediamo con i nostri occhi e coi quali costruiamo i nostri strumenti di misura.