Prerequisiti:
- Nozioni elementari di aritmetica e geometria.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *usare il linguaggio degli insiemi e della logica*
- *definire e descrivere a parole le operazioni con gli insiemi: inclusione, intersezione, unione, complementare*
- *esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà*
- *comprendere quando l'indeterminativo "un" è usato nel senso di "ogni" e quando nel senso di "almeno un"*
- *riconoscere e usare locuzioni logiche come "se ... allora", "per ogni", "esiste almeno un"*
- *costruire la negazione di una proposizione, sia semplice sia composta*
- *distinguere fra i vari tipi di implicazione (diretta, contronominale, inversa, contraria)*
- *individuare ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema*
- *operare correttamente con le implicazioni, distinguendo una condizione necessaria da una sufficiente*

Logica: prime nozioni

Unità 9

AVVERTENZA. In realtà le Indicazioni Nazionali (Licei) e le Linee Guida (Tecnici e Professionali) non prevedono specificamente lo studio della Logica nel 1° biennio. Anzi le Indicazioni Nazionali non lo prevedono proprio, neanche in seguito; mentre le Linee Guida lo prevedono nel 2° biennio.
Noi abbiamo preferito ugualmente inserire questo contenuto tra quelli del 1° biennio. Valuterà il docente cosa sia più opportuno fare.
In ogni caso, l'insegnante non commetta il grave errore metodologico di sviluppare questa unità in maniera a se stante e una volta per tutte o di concepirla, addirittura, come premessa a tutta l'attività matematica. Egli deve, al contrario, avere l'accortezza di ritornarvi sopra, a varie riprese, ogni volta che ciò può essere utile, collegandola ad altri argomenti che via via si presentano nello sviluppo del programma: geometria, aritmetica, probabilità, equazioni, eccetera.

9.1 INSIEMI

9.1.1 Ci è capitato, nella trattazione delle unità precedenti, di parlare di insiemi e di loro elementi. L'abbiamo fatto confidando nelle conoscenze che, su questo argomento, hai acquisito nel 1° ciclo d'istruzione.
È giunto il momento di tentare una riorganizzazione di queste conoscenze, che avrai modo di utilizzare a fondo nel seguito degli studi.
Incominciamo col dire che il termine ***insieme*** è sinonimo di raggruppamento, collezione, aggregato.
Ora, però, all'atto pratico, più che il concetto di insieme quello che conta è di disporre di un qualche criterio che permetta di individuare un ben determinato insieme. In altri termini, di stabilire se un dato oggetto (concretamente esistente o solo pensato) si trova nell'insieme o, come più propriamente si dice, se è ***elemento*** dell'insieme oppure se non lo è.
Per esempio, "i numeri naturali compresi fra 2 incluso e 6 escluso" costituiscono un insieme. Infatti, per un qualunque oggetto siamo in grado di precisare se è o no elemento dell'insieme. In particolare: 3 è un elemento dell'insieme; 8 non lo è.
Invece "i miei amici" non formano un insieme, poiché non è del tutto chiaro cosa debba intendersi col termine "amico".
Di solito, quando ci si vuole riferire ad un insieme generico, si usano le lettere maiuscole A, B, C, ...
Se un certo oggetto x è o non è elemento di un dato insieme A si scrive rispettivamente:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A},\quad \mathbf{x} \notin \mathbf{A}$$

e si legge, nell'ordine: «x appartiene ad A», «x non appartiene ad A». O anche, se le circostanze lo richiedono: «x appartenente ad A», «x non appartenente ad A».
Per esempio, se l'insieme considerato è l'insieme D(24) dei divisori di 24, risulta:

$$2 \in \mathrm{D}(24),\quad 5 \notin \mathrm{D}(24)\,.$$

A volte è utile fornire una rappresentazione grafica di un insieme. Uno dei modi più efficaci è costituito dai cosiddetti **diagrammi di Eulero-Venn** [1]. Si tratta di racchiudere con una linea chiusa e senza nodi gli elementi che formano l'insieme.
In figura 1 è rappresentato l'insieme A formato dai numeri 1, 2, 3, 4, 6, 12, 5. Vi è evidenziato che i primi sei numeri formano l'insieme D(12) dei divisori di 12, mentre $5 \notin \mathrm{D}(12)$.

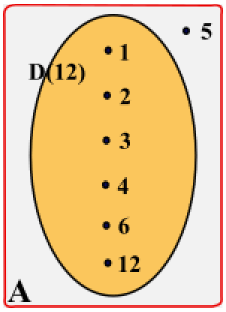

FIG. 1

9.1.2 Per indicare un insieme si usa racchiudere tra parentesi graffe i suoi elementi, separati l'uno dall'altro da una virgola: si dice che l'insieme è rappresentato per ***elencazione***.
Oppure, se possibile, si evidenzia la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme: si dice che

[1] **Euler**, Leonhard, matematico svizzero, 1707-1783; **Venn**, John, logico inglese, 1834-1927.

l'insieme è rappresentato per ***caratteristica***.

In generale, se P rappresenta la proprietà caratteristica degli elementi di un certo insieme, l'insieme stesso si indica con una delle scritture seguenti:

$$\{x \mid P(x)\}\ ,\quad \{x\colon P(x)\}\ ,\quad \{x;\ P(x)\}\ .$$

In ogni caso si legge: «l'insieme degli elementi x che godono della proprietà P».

Per esempio, con riferimento all'*insieme dei numeri naturali compresi fra 2 e 6 inclusi*, si hanno le seguenti rappresentazioni rispettivamente per elencazione e per caratteristica:

$$\{2, 3, 4, 5, 6\},\qquad \{x \mid x\in\mathbb{N},\ 2\le x\le 6\}.$$

9.1.3 Anche se la cosa può sembrare strana, tra gli insiemi è annoverato quello che non ha elementi. È detto **insieme vuoto** ed è indicato col simbolo:

$$\emptyset.$$

La decisione di prendere in considerazione anche quest'insieme è motivata, tra le altre cose, dal fatto che è possibile esprimere delle proprietà che non sono godute da alcun oggetto. Per esempio, la seguente scrittura:

$$\{x \mid x \neq x\}$$

rappresenta «l'insieme degli oggetti che sono diversi da se stessi». È un insieme senza elementi, poiché evidentemente non esiste alcun oggetto che sia diverso da se stesso.

9.1.4 Ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi.

1. Quali delle seguenti espressioni definiscono un insieme? Quali no?
   a) Gli alunni turbolenti della mia classe. b) I professori giovani della mia scuola.
   c) Gli alunni maschi della mia scuola. d) I giocatori bravi della Fiorentina.
   e) I numeri naturali dispari divisibili per 2. f) I numeri naturali minori di 0.
   g) I numeri piccoli. h) I numeri grandi.
   i) Le città italiane con più di 500000 abitanti. l) Le province italiane con meno di 50 comuni.
   m) I ciclisti campioni del mondo su strada.
2. Esprimi a parole il significato delle scritture seguenti: $\{a\}$, $\{a,\{a\}\}$.
3. Scrivi per elencazione gli insiemi seguenti:
   a) {x | x è una vocale della parola INSIEME}.
   b) {a | a è una Provincia della Regione Marche}.
   c) {z | z è una città italiana bagnata dal Mar Rosso}.
   d) {b | b è un numero naturale tale che $1<b<3$}.
   e) {y | y è un numero naturale minore di 50 e divisibile per 7}.
   f) {x | x è un numero naturale minore di 40 e divisibile per almeno uno dei numeri 2 e 3}.
   g) {x | x è un numero naturale minore di 40 e divisibile per 2 o per 3 ma non per entrambi}.
4. Scrivi per caratteristica i seguenti insiemi:
   a) {Pesaro, Ancona, Macerata, Fermo, Ascoli Piceno}. b) {Sicilia, Sardegna}.
   c) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. d) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

9.2 PROPOSIZIONI

9.2.1 Affermazioni come $3\in D(12)$ e $5\in D(12)$, dove $D(12)$ indica l'insieme dei divisori di 12, hanno una particolarità: di ciascuna di esse si può dire se è *vera* o se è *falsa*. Nel caso specifico la prima è vera, la seconda è falsa.

Altrettanto si può dire di affermazioni come queste:

1) Roma è più popolosa di Palermo (vera);
2) $3 + 2 \neq 5$ (falsa);
3) $5 > 2$ (vera);
4) 3 è un numero primo (vera);
5) 3 è un numero pari (falsa).
6) Ogni triangolo è rettangolo (falsa)

I due attributi "**vero**" e "**falso**", usati nel modo suddetto, si dicono **valori di verità**.
Invece delle seguenti frasi:

1) Ancona è una città popolosa,
2) 7 è un numero piccolo,
3) il professore di matematica è bravo,
4) Roma è una bella città,

non ha senso dire che sono vere o che sono false, poiché non è definito esattamente cosa significhi "popolosa" o "piccolo" o "bravo" o "bella". Ad esse perciò non compete alcun *valore di verità*.
Vogliamo soffermarci brevemente sulle frasi "Roma è più popolosa di Palermo" e "Ancona è una città popolosa". Pur figurando in maniera decisiva in entrambe l'attributo "*popolosa*", della prima frase ha senso dire se è vera o falsa, mentre della seconda questo non ha senso. In realtà, della prima si capisce bene cosa voglia affermare, della seconda invece questo non è altrettanto chiaro. In effetti, quando si deve definire "popolosa" una città? Quando ha almeno 50.000 abitanti o quando non ne ha meno di 500.000 o in qualche altro caso? Ecco, sta tutta qui la differenza: nel primo caso, pur non sapendo esattamente quando bisogna definire "popolosa" una città, è chiaro comunque che "Roma è più popolosa di Palermo"; nel secondo caso, se non si sa esattamente cosa significhi "popolosa", non è chiaro neppure cosa voglia dire che "Ancona è una città popolosa".

Ogni frase, avente senso compiuto, alla quale si può attribuire uno ed uno solo dei *valori di verità* VERO o FALSO, si definisce **proposizione** (o **enunciato**).

Ti invitiamo a stabilire quali delle seguenti frasi sono proposizioni e quali no e perché:

1) Il mio professore di matematica è giovane.
2) Il numero 1.732.842.451 è un numero composto.
3) Attualmente vivono sulla Terra più uomini che donne.
4) Oggi è una bella giornata.
5) Nell'ultima estrazione è uscito il 45 sulla Ruota di Roma.

9.2.2 Una proposizione enuncia, dunque, il fatto che un certo individuo (chiamato ***soggetto***) gode di una certa ***proprietà*** o che due o più individui (detti ancora ***soggetti***) sono legati da una certa ***relazione***.
Nelle proposizioni che fin qui abbiamo preso in esame i soggetti sono precisati: per esempio, nella proposizione "$5>2$" sono i numeri 5 e 2.
Proposizioni siffatte si dicono anche **proposizioni a soggetto costante** (o **proposizioni chiuse**).
Ma consideriamo adesso la seguente frase:

$$x \text{ è maggiore di } 2 \,,$$

dove x rappresenta un soggetto non precisato.
Evidentemente non ha alcun senso chiedersi se essa è vera o se è falsa, almeno fino a quando ad x non venga attribuita un'identità precisa.
In effetti, se x è «il numero 1» la frase diventa una proposizione falsa, se x è «il numero 3» diventa una proposizione vera, se x è «la Torre di Pisa» la frase non è una proposizione.

Ogni frase con soggetto non determinato, che acquista la caratteristica di proposizione chiusa non appena al soggetto impreciasato (o eventualmente ai soggetti) si sostituisce un ente ben preciso scelto in un conveniente insieme, si chiama **proposizione aperta** (o **predicato**).

Il soggetto non precisato di una proposizione aperta si dice ***indeterminata*** (o ***variabile***).
Si chiama invece ***insieme di base*** o anche ***universo*** (o ***ambito***) ***di discorso*** di una proposizione aperta l'insieme delle costanti che, sostituite alla variabile, fanno diventare la proposizione aperta una proposizione chiusa (non importa se vera o falsa).

Assunto come insieme di base l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, in ognuna delle seguenti proposizioni aperte sostituisci alla variabile almeno una costante (se esiste) che la faccia diventare una proposizione vera ed almeno una costante (se esiste) che la faccia diventare una proposizione falsa:

a) x è un numero primo.
b) x è un divisore di 4.
c) x è multiplo di 0.
d) 0 è un divisore di x.
e) $x+2=5$.
f) $x+2>3$.
g) $0\cdot x=1$.
h) $0\cdot x=0$.

9.2.3 Consideriamo le seguenti frasi:

«per ogni x appartenente all'insieme $\mathbb{N}$, x è un numero primo»,
«per qualche x appartenente all'insieme $\mathbb{N}$, x è un numero primo».

Esse possono essere enunciate anche così:

«tutti i numeri naturali sono numeri primi»,
«almeno un numero naturale è un numero primo».

È evidente che si tratta di due proposizioni: falsa la prima e vera la seconda.
L'esempio fa capire che da una proposizione aperta, come «x è un numero primo», si può ottenere una proposizione chiusa non solo sostituendo alla variabile x delle costanti opportune, ma anche facendo precedere la proposizione aperta da una delle due espressioni verbali:

per ogni, **per qualche,**

seguita dalla variabile. Queste due espressioni verbali si dicono **quantificatori**.
Più esattamente:

- l'espressione ***per ogni*** (o altre simili, come ***per tutti***, ***qualunque sia***) si dice **quantificatore universale**;
- l'espressione ***per qualche*** (o altre simili, come ***esiste almeno un***) si chiama **quantificatore esistenziale**.

Essi si indicano nell'ordine con i simboli seguenti:

$$\forall \qquad \exists$$

Considerata, pertanto, una generica proposizione aperta P(x) – si legge: «pi di x» – si hanno le due proposizioni seguenti:

$$\forall x,\ P(x)\ , \quad \exists x,\ P(x)\ .$$

È sottinteso che x può essere scelto nell'insieme di base della forma proposizionale P(x).
Le due proposizioni suddette vengono qualche volta chiamate **proposizioni quantificate**.
Più esattamente, la prima è detta **proposizione universale**, la seconda **proposizione esistenziale**.

Ammesso ora che U sia l'insieme di base della proposizione aperta P(x):

1) la proposizione $\forall$x: P(x) è vera se P(x) diventa una proposizione vera ogni volta che ad x si sostituisce una costante di U, ed è falsa se P(x) diventa una proposizione falsa anche per una sola costante presa in U;
2) la proposizione $\exists$x: P(x) è vera se P(x) diventa una proposizione vera anche per una sola costante scelta in U, ed è falsa se P(x) è falsa per ogni costante presa in U.

Alcuni esercizi da risolvere.

1. Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni quantificate e ad esprimere con parole il loro significato, supponendo che l'insieme di base sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:
$$\forall x : x>0. \quad \exists x : 2x=1. \quad \forall x, \exists y : x<y. \quad \exists y, \forall x : x>y.$$
2. Considerate le seguenti proposizioni aperte, il cui insieme di base è indicato a fianco di ciascuna di esse, determinare, se possibile, almeno un valore che, attribuito alla variabile, fa acquistare alla proposizione aperta la caratteristica di proposizione vera ed almeno un valore che le fa acquistare la caratteristica di proposizione falsa:
$$2x > 1,\ x \in \mathbb{N}. \qquad 3x > 0,\ x \in \mathbb{N}. \qquad x^2 < 0,\ x \in \mathbb{Z}.$$
$$x^2 > x,\ x \in \mathbb{Z}. \qquad \frac{1}{x} < 1,\ x \in \mathbb{Q}^+. \qquad x < x,\ x \in \mathbb{Q}.$$
3. Nelle seguenti proposizioni l'articolo indeterminativo UN è usato, con scarso rigore, talvolta nel senso di OGNI, talaltra in quello di ALMENO UN. Chiarisci caso per caso.
   - UN numero pari è divisibile per 2.
   - UN triangolo isoscele ha due angoli uguali.
   - UN elemento dell'insieme {1, a, b} è un numero.
   - UN cittadino romano è italiano.
   - UN cittadino italiano è romano.
   - UN quadrato è un parallelogramma.
   - UN parallelogramma è un rombo.
   - UN treno parte alle ore 14.
   - UN vigile mi ha fatto la multa.
   - UN italiano ha inventato la pila elettrica.
4. Di ognuna delle seguenti proposizioni dire se è vera o falsa, fornendo ampia giustificazione:
   [a] $\forall x\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N} : x - y = 4.$ [b] $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N} : x - y = 4.$
   [c] $\exists x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N} : x - y = 4.$ [d] $\exists x\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N} : x - y = 4.$
5. Si consideri la seguente proprietà P(x): "x verifica $x+1<1$".
   a) È vero che $\forall x\in\mathbb{N}$: P(x) è falsa? b) È vero che $\exists x\in\mathbb{Z}$: P(x) è vera?

9.2.4 L'idea di usare i quantificatori è da attribuire al logico e matematico tedesco Gottlob Frege (1848-1925), ma l'introduzione dei simboli $\forall$ e $\exists$ è dovuta allo statunitense Charles Sanders Peirce (1839-1914) e all'italiano Giuseppe Peano (1858-1932).
Bisogna segnalare che a volte, per indicare l'espressione "esiste uno ed un solo $x\in A$", dove A è un dato insieme, si usa il simbolo $\exists! x\in A$.
Come si capisce facilmente, se $\exists! x\in A$ allora certamente $\exists x\in A$, ma non viceversa.

9.3 SOTTOINSIEMI. INSIEME DELLE PARTI

9.3.1 Consideriamo l'insieme dei divisori di 12 e quello dei divisori di 24:
$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$
Come si vede, ogni divisore di 12 lo è anche di 24, cioè ogni elemento di D(12) è anche elemento di D(24). Questo fatto si esprime dicendo che D(12) è un *sottoinsieme* di D(24) (Fig. 2).
Invece non è vero che D(12) è un sottoinsieme di D(18): infatti $4\in D(12)$, ma $4\notin D(18)$ (Fig. 3).
In generale:

Un insieme A si dice **sottoinsieme** (o **parte**) di un insieme B se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Si scrive:

$$\mathbf{A \subseteq B}$$

e si legge: «A è incluso in B».

Ciò si può anche rappresentare graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn (Fig. 4): gli elementi di A e B non sono indicati, perché A e B sono insiemi generici e si conviene che ogni punto interno alla linea chiusa relativa ad A (o a B) rappresenti un elemento di A (o di B).

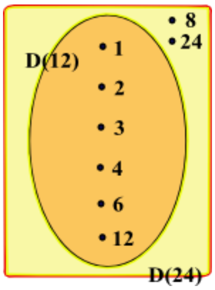

FIG. 2

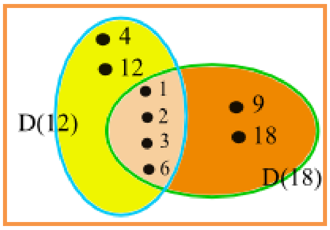

FIG. 3

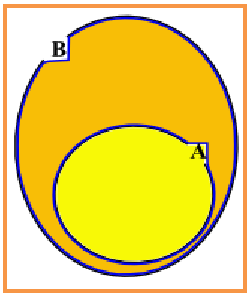

FIG. 4

Siccome, evidentemente, è vero che ogni elemento di un qualsiasi insieme A è elemento di A, è lecito affermare che:

per ogni insieme A, $\mathbf{A \subseteq A}$.

Dunque: **Ogni insieme è sottoinsieme di se stesso**.

Se adesso riflettiamo bene, la proposizione:

«ogni elemento di A è anche elemento di B»

ha lo stesso significato di quest'altra:

«non esiste un elemento che appartiene ad A e non appartiene a B».

Ora, qualunque sia l'insieme A, è certamente vero che:

«non esiste un elemento che appartiene all'insieme vuoto e non appartiene ad A»,

semplicemente perché l'insieme vuoto non ha elementi. Perciò:

per ogni insieme A, $\boldsymbol{\emptyset \subseteq A}$.

Dunque: **L'insieme vuoto è sottoinsieme di un qualunque insieme**.

9.3.2 Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B ed inoltre ogni elemento di B è anche elemento di A – ossia, in altri termini, se A⊆B e B⊆A – allora A e B sono lo stesso insieme. Si scrive:

$$\mathbf{A = B}$$

e si legge: «A è uguale a B».

9.3.3 Quando si vuole sottolineare che un insieme A è sottoinsieme di un insieme B, escludendo però che A sia lo stesso insieme B, si dice che A è un ***sottoinsieme proprio*** di B e si scrive:

$$\mathbf{A \subset B}\,,$$

che si legge: «A è *incluso strettamente* in B».

Questo significa, naturalmente, che ogni elemento di A è anche elemento di B, ma esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A.

Per esempio:

$$\{1, 2\} \subset \mathbb{N}\,; \quad D(12) \subset D(24)\,.$$

Evidentemente, se $A \subset B$ allora $A \subseteq B$, ma se $A \subseteq B$ non necessariamente $A \subset B$.
Può essere utile, a volte, esprimere simbolicamente i seguenti fatti: «l'insieme A non è incluso nell'insieme B», «l'insieme A include (strettamente) l'insieme B»; si usano nell'ordine le seguenti scritture simboliche:

$$\mathbf{A \not\subset B}, \quad \mathbf{A \supset B}.$$

9.3.4 Consideriamo tutti i possibili sottoinsiemi di un dato insieme A.
Per esempio, se $A=\{1,2,3\}$, essi sono i seguenti insiemi:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Questi insiemi si possono concepire come gli elementi di un nuovo insieme che si indica con la scrittura:

$$\mathbf{P(A)}\ .$$

e si chiama **insieme delle parti** (o **dei sottoinsiemi**) di A.
Dunque, in simboli:

$$\mathbf{P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}}\ .$$

Posto che l'insieme A abbia n elementi, è possibile controllare (ti invitiamo a farlo) i seguenti fatti:
- se n=0, P(A) ha 1 elemento;
- se n=1, P(A) ha 2 elementi;
- se n=2, P(A) ha 4 elementi;
- se n=3, P(A) ha 8 elementi;
- se n=4, P(A) ha 16 elementi.

Ora, si può notare che 1, 2, 4, 8, 16 sono modi diversi di scrivere $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$. Sembrerebbe che, per un generico n, P(A) abbia 2^n elementi. In effetti è così e la cosa potrebbe essere dimostrata, anche se noi al momento non lo facciamo. Lo faremo in una unità successiva [2]. Pertanto:

Se un insieme è costituito da n elementi, l'insieme delle sue parti ha 2^n elementi.

9.3.5 ESERCIZI.

1. L'insieme degli alunni ripetenti della tua classe è un sottoinsieme dell'insieme dei tuoi compagni di classe?
2. L'insieme {Po, Tevere, Tamigi} è un sottoinsieme dell'insieme {x | x è un fiume d'Italia}?
3. Dati tre insiemi qualsiasi A, B, C, giustifica mediante i diagrammi di Eulero-Venn che il fatto che A sia incluso strettamente in B ($A \subset B$) e che B non sia incluso strettamente in C ($A \not\subset C$) non implica necessariamente che A non è incluso strettamente in C ($A \not\subset C$). Fornisci qualche esempio concreto delle due situazioni seguenti:

$$A \subset B,\ B \not\subset C,\ A \subset C; \quad A \subset B,\ B \not\subset C,\ A \not\subset C.$$

9.4 CONNETTIVI LOGICI. OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

9.4.1 Nel linguaggio matematico, come nel linguaggio di tutti i giorni, quando si devono collegare due proposizioni, si fa uso di alcune particelle, dette **connettivi logici**.
Due di tali particelle sono le seguenti:

e , **o** .

Così per esempio:
(1) l'Italia confina con la Francia **e** (confina) con la Svizzera;
(2) per insegnare Matematica bisogna essere laureati in Matematica **o** (bisogna essere laureati) in

[2] Cfr.: Unità 39: Principio d'induzione, N° 39.1.3, Proprietà 3.

Fisica;
(3) il numero dei miei anni è pari **o** (il numero dei miei anni è) dispari.

- Nell'esempio (1) il connettivo "**e**" viene usato per esprimere che tutti e due i fatti – "l'Italia confina con la Francia", "l'Italia confina con la Svizzera" – si verificano.
  Questo connettivo è detto **congiunzione** e si indica con uno dei seguenti simboli:
  $$\wedge \qquad \&$$
  ciascuno dei quali si legge "**e**" oppure "**et**".
- Nell'esempio (2) il connettivo "**o**" è usato per esprimere che almeno uno dei due fatti si verifica ma non esclude che possano verificarsi entrambi.
  Quand'è usato con questo intendimento il connettivo "**o**" si chiama **disgiunzione inclusiva** e si indica con uno dei seguenti simboli:
  $$\vee \qquad \text{e/o}$$
  che si leggono rispettivamente: "**vel**" oppure "**e/o**".
- Nell'esempio (3) uno dei due fatti sicuramente si verifica mentre l'altro certamente non si verifica. In questa situazione il connettivo "**o**" si chiama **disgiunzione esclusiva** e a volte si legge (e anche si scrive) "**aut**".

9.4.2 L'aver precisato l'uso ed il significato dei connettivi "e" ed "o" permette di definire in maniera formale i risultati di alcune operazioni con gli insiemi.

- Dati due insiemi A e B, si dice **insieme intersezione** di A con B l'insieme $\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$, vale a dire l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B; si indica con la scrittura:
  $$A\cap B$$
  che si legge: «A intersecato con B». Dunque:
  $$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}.$$
  Per esempio, se $A=D(12)=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ e $B=D(18)=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, risulta (Fig. 5):
  $$A\cap B = \{1, 2, 3, 6\}\ .$$
  Se $A\cap B=\varnothing$, i due insiemi A e B non hanno elementi comuni: si dicono ***disgiunti***.
- Dati due insiemi A e B, si dice **insieme unione** di A con B l'insieme $\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$, vale a dire l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A oppure a B oppure ad entrambi; si indica con la scrittura:
  $$A\cup B$$
  che si legge: «A unito con B». Dunque:
  $$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}.$$
  Per esempio, se $A=D(10)=\{1, 2, 5, 10\}$ e $B=D(6)=\{1, 2, 3, 6\}$, risulta (Fig. 6):
  $$A\cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}\ .$$

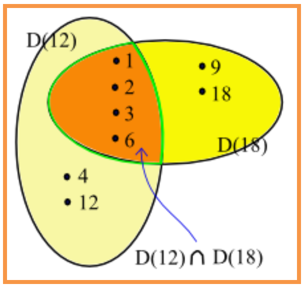

FIG. 5

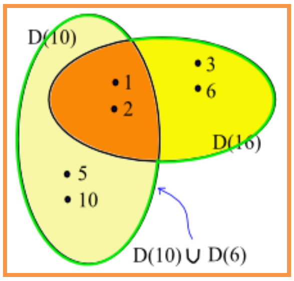

FIG. 6

- Dati due insiemi A e B, con $B\subseteq A$, si dice **insieme complementare** di B rispetto ad A l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B, cioè l'insieme $\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$; si indica con la scrittura:

$$\mathbf{A - B}$$

che si legge: «A meno B». Dunque l'insieme A–B è definito dalla seguente relazione (Fig. 7):

$$\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}\ .$$

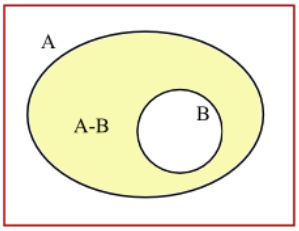

FIG. 7

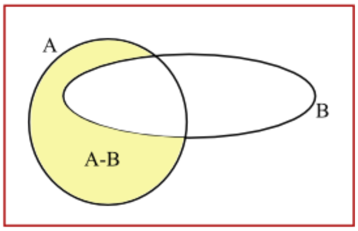

FIG. 8

Facciamo osservare che questa definizione non solo si adatta al caso in cui $B \subseteq A$, ma si può estendere ad ogni coppia di insiemi.
In generale l'insieme A–B si chiama **differenza** fra A e B (Fig. 8). Nel caso particolare in cui $B \subseteq A$, tale differenza è proprio l'insieme complementare di B rispetto ad A.
Per esempio, se $A=D(24)=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ e $B=D(6)=\{1, 2, 3, 6\}$, risulta:

$$A - B = \{4, 8, 12, 24\}.$$

In questo caso, siccome $B \subseteq A$, l'insieme A–B è l'insieme complementare di B rispetto ad A.
Se invece $A=D(16)=\{1, 2, 4, 8, 16\}$ e $B=D(20)=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, risulta:

$$A - B = \{8, 16\}.$$

9.4.3 Le operazioni con gli insiemi, segnatamente l'intersezione e l'unione, godono di alcune proprietà importanti.
Precisamente, comunque vengano presi gli insiemi, risulta:

- $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$, $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$;
- $\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$, $\mathbf{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$;
- $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$, $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

Di queste proprietà non forniamo una dimostrazione. Se vuoi, puoi farne una verifica in qualche caso particolare. Confrontando poi queste proprietà con altre analoghe della moltiplicazione e dell'addizione dei numeri, prova ad indicare quali denominazioni possano essere attribuite ad esse.

9.4.4 ESERCIZI.

1. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi, tenendo presente che D(a) rappresenta l'insieme dei divisori di un dato numero naturale a:
   $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 0<x<1\}$; $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 0 \le x \le 1\}$;
   $\{x \mid x \in D(12) \wedge x \in D(16)\}$; $\{x \mid x \in D(12) \wedge x \in D(24)\}$.
2. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi, tenendo presente che D(a) rappresenta l'insieme dei divisori di un dato numero naturale a:
   $\{x \mid x \in D(18) \vee x \in D(24)\}$; $\{x \mid x \in D(48) \vee x \in D(15)\}$;
   $\{x \mid x \in D(48) \text{ aut } x \in D(36)\}$; $\{x \mid x \in D(60) \text{ aut } x \in D(18)\}$.
3. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi, dove D(a) rappresenta l'insieme dei divisori di un dato numero

naturale a ed M(a) rappresenta l'insieme dei multipli di a:

$$\{x \mid x\in\mathbb{N} \wedge (0<x<4 \vee x\in D(10))\}; \qquad \{x \mid (x\in M(3) \wedge x\in D(24)) \vee x\in D(16)\};$$

$$\{x \mid (x\in M(4) \vee x\in M(6)) \wedge x\in D(24)\}.$$

4. Sono dati gli insiemi $A=\{x\in Q^+ \mid x^2<2\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Q}^+ \mid x^2>2\}$. Trova 4 elementi di A ed altrettanti di B. Determina quindi gli insiemi: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.
5. Dato l'insieme $M=\{1,2,3,4,5\}$, trova tre insiemi A, B, C, inclusi in M, tali che contemporaneamente risulti
$$A\cap B = \{1\}, \quad A\cap C = \{1,2\}, \quad A\cup B = \{1,2,3\}.$$
[**R**. $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,2\}$; oppure ... .]
6. Dato l'insieme $M=\{1,2,3,4\}$, trova due insiemi A, B inclusi in M e tali che si abbia contemporaneamente:
$$A\cup B = \{1,2,3\}, \quad A\cap B = \{1\}, \quad A - B = \{2,3\}.$$
7. Dati gli insiemi $A=\{a,b\}$, $B=\{x,y,z\}$, $C=\{x,y,t\}$, verifica che si ha:
$$A\cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)\,, \qquad A\cap (B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C).$$
8. Ripeti lo stesso esercizio precedente con i seguenti insiemi:
$$A=\{a,b,c,d\}, \quad B=\{a,c,e,f\}, \quad C=\{a,b,e,g\}.$$
9. Dati gli insiemi A, B, C, quali conclusioni si possono trarre dalle seguenti uguaglianze circa le relazioni d'inclusione che sussistono fra gli insiemi A, B, C?
a) $A\cap B=A,\ A\cap B\cap C=A.$ b) $A\cup B=A,\ A\cup B\cup C=A.$

9.5 L'IMPLICAZIONE E LA DOPPIA IMPLICAZIONE.

9.5.1 Consideriamo la seguente proposizione:

«Se Pierino è messinese allora (Pierino) è siciliano».

Essa è ottenuta dalle due proposizioni «Pierino è messinese», «Pierino è siciliano», collegandole col connettivo "**se ... allora**", che si chiama **implicazione**.

È interessante evidenziare alcuni fatti che la proposizione suddetta esprime.

Anzitutto il fatto "Pierino è messinese" *è condizione sufficiente* per concludere che "Pierino è siciliano", ma lo stesso fatto *non è condizione necessaria* per la medesima conclusione. Pierino, infatti, potrebbe essere siciliano senza essere messinese; per esempio potrebbe essere catanese.

D'altro canto, il fatto "Pierino è siciliano" *è condizione necessaria* perché possa risultare che "Pierino è messinese"; infatti se Pierino non fosse siciliano non potrebbe essere nemmeno messinese. Ma sapere che "Pierino è siciliano" *non è condizione sufficiente* per concludere che "Pierino è messinese".

Ebbene, tutte queste considerazioni, svolte sulla proposizione suddetta, si possono ripetere per tutte le proposizioni aventi la stessa struttura logica di quella, come le seguenti, per esempio:

- Se piove allora la strada è bagnata.
- Se p è un numero primo maggiore di 2 allora è un numero dispari.

In generale, una proposizione del tipo:

se A allora B

si scrive in simboli così:

$\mathbf{A \rightarrow B}$ o anche: $\mathbf{A \Rightarrow B}$

e si legge in ogni caso: «se A allora B» oppure «A implica B».

Come precisato sopra, questa proposizione esprime i seguenti due fatti:

A è **condizione sufficiente** per B ; B è **condizione necessaria** per A .

9.5.2 Può presentarsi il caso, invero piuttosto frequente, che un certo fatto A non solo sia sufficiente ma anche

necessario per il verificarsi di un altro fatto B.
Ciò avviene, per esempio, se A è il fatto "p è un numero pari" e B è il fatto "p è divisibile per 2". Infatti:

Se p è un numero pari allora p è divisibile per 2 e se p è divisibile per 2 allora p è un numero pari.

In questo caso e in tutti quelli analoghi si dice che:

A è **condizione necessaria e sufficiente** per B

e si scrive:

$$\mathbf{A \leftrightarrow B} \text{ o anche: } \mathbf{A \Leftrightarrow B}$$

leggendo in ogni caso: «A se e solo se B» oppure: «A coimplica B» o ancora: «A implica B e viceversa».
In altri termini, la scrittura $A \leftrightarrow B$ è un modo più sintetico di indicare quest'altra:

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \text{ .}$$

Per questo il connettivo "**se e solo se**" si chiama **doppia implicazione**.

9.5.3 ESERCIZI.

1. Tra le seguenti implicazioni ve ne sono di vere e di false. Individua le une e le altre, spiegando in maniera esauriente le scelte effettuate [3]:
   $\forall a,b \in \mathbb{N}:\ a+b=0 \to (a=0 \wedge b=0)$; $\forall a,b \in \mathbb{Z}:\ ab=0 \to (a=0 \wedge b=0)$;
   $\forall a,b \in \mathbb{N}:$ (ab è pari) $\to$ (a è pari e b è pari); $\forall a,b \in \mathbb{N}:$ (a+b è pari) $\to$ (a è pari e b è pari);
   $\forall a,b \in \mathbb{Z}:\ a+b>0 \to (a>0 \wedge b>0)$.
2. Spiega perché, essendo A, B due insiemi qualsiasi, risulta:
   $$(x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in A \cap B, \quad (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A \cup B,$$
3. Considera la seguente frase:
   «condizione necessaria affinché Maurizio segua la lezione di matematica è che sia sveglio».
   Esprimila sotto forma di implicazione, individuando le due proposizioni semplici che la compongono e, in particolare, quella che viene considerata come condizione necessaria.
   Analoga questione risolvi per le seguenti frasi:
   - «condizione necessaria affinché un numero sia multiplo di 6 è che sia multiplo di 3»;
   - «condizione necessaria affinché un ciclista vinca il Giro d'Italia è che vi partecipi».

   Nelle tre proposizioni considerate, le "condizioni necessarie" sono "condizioni sufficienti"?
4. Considera la seguente frase:
   «condizione sufficiente affinché un cittadino sia europeo è che sia italiano».
   Esprimila sotto forma di implicazione, individuando le due proposizioni semplici che la compongono e, in particolare, quella che viene considerata come condizione sufficiente.
   Analoga questione risolvi per le seguenti frasi:
   - «condizione sufficiente affinché un numero maggiore di 2 sia dispari è che sia primo»;
   - «condizione sufficiente affinché un numero sia pari è che sia multiplo di 4»;
   - «condizione sufficiente affinché un poligono sia un quadrilatero è che sia un rettangolo».

   Nelle quattro proposizioni considerate, le "condizioni sufficienti" sono "condizioni necessarie"?
5. Fornisci alcuni esempi di implicazione, evidenziando ogni volta la proposizione che è da considerarsi come "condizione necessaria" e quella che è da prendersi come "condizione sufficiente" e stabilendo se la condizione considerata è solo necessaria o solo sufficiente o, infine, se è necessaria e sufficiente.

[3] La scrittura $\forall a,b \in \mathbb{N}$, come altre simili, è un modo più sintetico di scrivere $\forall a \in \mathbb{N}$ e $\forall b \in \mathbb{N}$. La useremo spesso in futuro. Ugualmente per la scrittura $\exists a,b \in \mathbb{N}$ e simili.

9.6 LA NEGAZIONE

9.6.1 I connettivi $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (nell'ordine: **e, o, se... allora, se e solo se**) collegano sempre due proposizioni e per questo sono chiamati ***connettivi binari***.
Adesso ci vogliamo occupare di un'importante particella che opera, invece, su una sola proposizione: si tratta della particella **non**, detta **negazione**.
Essa è rappresentata da una sbarretta orizzontale oppure dal simbolo "~" sovrapposti alla proposizione su cui opera, o anche dal segno "**¬**" anteposto alla proposizione; di modo che, se A è la proposizione considerata, la **negazione** (o **opposta**) di A è una proposizione indicata in uno dei modi seguenti:

$$\overline{\mathbf{A}} \quad \tilde{\mathbf{A}} \quad \neg\mathbf{A}\,;$$

in ogni caso si legge: «non A».
Questa particella non è dunque un vero e proprio connettivo, poiché non collega due proposizioni, ma opera su una sola. Tuttavia, con una estensione di linguaggio, anche se con un brutto termine, si dice che è un ***connettivo unario***.
Il suo effetto è quello di cambiare il valore di verità della proposizione su cui opera; cosicché:

se la proposizione A è vera la $\overline{\mathbf{A}}$ è falsa; se la proposizione A è falsa la $\overline{\mathbf{A}}$ è vera.

9.6.2 Qualche volta è facile formulare l'opposta di una data proposizione, come nei seguenti casi (**f** sta per "falsa", **v** per "vera"):

Proposizione A	Valore di verità	Proposizione $\overline{A}$	Valore di verità
La neve è bianca	**v**	La neve non è bianca	**f**
Nel 2000 Firenze era la Capitale d'Italia	**f**	Nel 2000 Firenze non era la Capitale d'Italia	**v**
4 è un numero primo	**f**	4 non è un numero primo	**v**
2 è un divisore di 8	**v**	2 non è un divisore di 8	**f**
2 è maggiore di 3	**f**	2 non è maggiore di 3	**v**

Ma non sempre le cose sono così semplici.

Prima di continuare, prova a formulare, discutendone anche con i tuoi compagni, le negazioni delle seguenti proposizioni:

(1) Tutti i numeri naturali sono primi. (2) Qualche numero naturale è pari.

Per esempio, è possibile che:
a) la negazione della proposizione (1) sia la proposizione "tutti i numeri naturali non sono primi"?
b) la negazione della proposizione (2) sia la proposizione "qualche numero naturale non è pari"?
Ti convincono le risposte che hai dato?

Continuiamo nella lettura. Per ottenere la negazione di una proposizione A, dobbiamo tenere presente che se A è vera allora $\overline{A}$ deve essere falsa mentre se A è falsa allora deve risultare vera $\overline{A}$.
Ora, la proposizione (1) è una proposizione quantificata certamente falsa, poiché non è vero che tutti i numeri naturali sono primi. Allora la sua negazione non può essere la proposizione «tutti i numeri naturali non sono primi», che è ancora una proposizione falsa. Essa è invece la proposizione:

«qualche numero naturale è non primo»,

che per l'appunto è una proposizione vera.

Riguardo alla proposizione (2), che è una proposizione vera, la negazione non può essere la proposizione «qualche numero naturale non è pari», che è pur sempre una proposizione vera. La negazione è invece la proposizione:

«tutti i numeri naturali sono non pari»

che è come dire:

«tutti i numeri naturali sono dispari»

ed è evidentemente una proposizione falsa.
In generale:

3) la **negazione** della proposizione quantificata $\forall \mathbf{x} : \mathbf{P(x)}$, ossia la proposizione $\neg[\forall \mathbf{x} : \mathbf{P(x)}]$, è la proposizione quantificata $\exists \mathbf{x} : \neg \mathbf{P(x)}$.
4) la **negazione** della proposizione quantificata $\exists \mathbf{x} : \mathbf{P(x)}$, ossia la proposizione $\neg[\exists \mathbf{x} : \mathbf{P(x)}]$, è la proposizione quantificata $\forall \mathbf{x} : \neg \mathbf{P(x)}$.

Ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi:

1. Di ciascuna delle seguenti proposizioni forma l'opposta:
   a) Ogni atleta ha superato la prova.
   b) Nessun uomo commette errori.
   c) Piero studia tutti i giorni.
   d) Qualcuno non sta attento alla lezione.
2. Delle seguenti proposizioni forma le opposte e, ogni volta, stabilisci qual è la proposizione vera e quale quella falsa:
   a) Tutti i numeri naturali sono divisibili per 2.
   b) Qualche numero naturale non è razionale.
   c) Nessun rettangolo è un quadrato.
   d) Tutti i numeri divisibili per 4 sono divisibili per
   e) Qualche numero divisibile per 3 è divisibile per 2.
   f) Qualche triangolo isoscele ha due angoli congruenti.
3. Si consideri la seguente proposizione: "Ogni numero naturale è maggiore di qualche numero naturale". È vera o è falsa? Quale delle seguenti forme simboliche la rappresenta?
   [A] $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x > y$. [B] $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x > y$.
   [C] $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x > y$. [D] $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x > y$.
4. Si consideri la seguente proposizione: "Ogni numero naturale è il successivo di numero naturale". È vera o è falsa? Quale delle seguenti forme simboliche la rappresenta?
   [A] $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x = y + 1$. [B] $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1$.
   [C] $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x = y + 1$. [D] $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1$.
5. Posto che A sia un insieme di numeri reali ed a sia un numero reale, si considerino le seguenti proposizioni:
   $$\forall x \in A : x > a; \quad \exists x \in A : x \geq a.$$
   Esprimerle a parole e costruirne le negazioni.

9.6.3 Vi sono altre circostanze in cui non è agevole formulare la negazione di una proposizione.
Per esempio, ciò accade quando si ha a che fare con proposizioni composte, come le seguenti:
1) il numero naturale n è primo e dispari;
2) il numero dei miei anni è primo o dispari;
3) se penso allora esisto.

Traducendo in simboli, si tratta di proposizioni dei seguenti tipi:

$$A \wedge B\,,\quad A \vee B\,,\quad A \rightarrow B\,.$$

Prova da solo, o anche con la collaborazione dei tuoi compagni, a risolvere la questione, anche se, effettivamente, non è semplice. Noi ritorneremo sull'argomento nel paragrafo 9.7.5, ma prima dobbiamo occuparci di altre questioni.

9.7 TAVOLE DI VERITÀ. PROPOSIZIONI EQUIVALENTI

9.7.1 Nei paragrafi precedenti abbiamo usato i connettivi "*e*", "*o*", "*se ... allora*", "*se e solo se*" per collegare tra loro due proposizioni, tra i cui significati c'era qualche connessione. La logica, tuttavia, utilizza i connettivi in modo più generale:

Due proposizioni qualsiasi, vere o false, possono sempre essere unite da un connettivo per formare una nuova proposizione, che è detta **proposizione composta**.

Sono proposizioni composte, per esempio, le seguenti, che potrebbero essere ritenute senza senso nel linguaggio comune:

1) Paolo studia **e** 2 è un numero primo;
2) Paolo studia **o** 2 è un numero primo;
3) **se** Paolo studia **allora** 2 è un numero primo;
4) Paolo studia **se e solo se** 2 è un numero primo.

Per poter studiare le proposizioni da un punto di vista del tutto generale, indipendentemente dal loro significato (o, come si dice, dal loro **contenuto semantico**), la logica attribuisce ad ogni proposizione composta un valore di verità (*vero* o *falso*) che dipende solo ed esclusivamente dai valori di verità delle proposizioni collegate e dal connettivo usato (o, come si dice, dal loro **aspetto sintattico**).

9.7.2 La scelta dei valori di verità delle proposizioni composte è fatta, naturalmente, in modo coerente con quello che esse avrebbero nei casi particolari usati nel linguaggio comune, cioè nei casi in cui ci sia un nesso tra i significati delle proposizioni collegate.

I valori di verità delle proposizioni composte:

$$A \wedge B\,,\quad A \vee B\,,\quad A \rightarrow B\,,\quad A \leftrightarrow B\,,$$

vale a dire delle proposizioni, rispettivamente:

"A e B", "A vel B", "se A allora B", "A se e solo se B",

sono riportati nelle seguenti tabelle, che vengono dette **tabelle di verità** (o **tavole di verità**), dove chiaramente V sta per "vero" ed F per "falso":

A	B	**A∧B**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

TAB. 1

A	B	**A∨B**
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

TAB. 2

A	B	**A→B**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

TAB. 3

A	B	**A↔B**
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

TAB. 4

Detto a parole:

- **A∧B è vera ogni volta che A e B sono entrambe vere ed è falsa in ogni altro caso.**
- **A∨B è falsa ogni volta che A e B sono entrambe false ed è vera in ogni altro caso.**
- **A→B è falsa ogni volta che A è vera e B è falsa ed è vera in ogni altro caso.**
- **A↔B è vera ogni volta che A e B hanno lo stesso valore di verità ed è falsa ogni volta che non lo hanno.**

Le precedenti proposizioni composte sono chiamate nell'ordine:

- $A \wedge B$: **congiunzione** di A e B;
- $A \vee B$: **disgiunzione inclusiva** di A e B;
- $A \rightarrow B$: **condizionale** di *antecedente* A e *conseguente* B;
- $A \leftrightarrow B$: **bicondizionale** di A e B.

La scelta dei valori di verità di $A \wedge B$ e di $A \vee B$ non dovrebbe destare alcun dubbio, perché è evidente la loro coerenza col linguaggio comune.

I valori di verità attribuiti al condizionale $A \rightarrow B$ non dovrebbero suscitare perplessità quando A e B sono entrambe vere (nel qual caso $A \rightarrow B$ è vera) né quando A è vera e B è falsa (nel qual caso $A \rightarrow B$ è falsa), ma possono invece suscitarle quando A è falsa (nei quali casi $A \rightarrow B$ è vera qualunque sia il valore di verità di B): sembra in effetti strano che si possa considerare vera la proposizione $A \rightarrow B$ quando l'antecedente è falso. Si rifletta, tuttavia, su espressioni del tipo seguente:

se fossi onnipotente allora … ; se fossi miliardario allora … .

La premessa è considerata così clamorosamente falsa che chiunque è disposto ad accettare la verità della proposizione completa qualunque sia la conclusione, vera o falsa.

Cerchiamo adesso di fornire una giustificazione della tavola di verità del bicondizionale.

Abbiamo detto, chiudendo il paragrafo 9.5.2, che la proposizione $A \leftrightarrow B$ è un modo più sintetico di indicare $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$; deve perciò avere gli stessi valori di verità e questi si possono ricavare costruendo la tabella seguente (Tab. 5):

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

TAB. 5

Il confronto con la tabella 4 (che per comodità ripetiamo nell'ultima colonna della tabella 5) mostra che effettivamente i valori di verità sono gli stessi.

Le tabelle di verità furono introdotte, ancorché in una forma differente dalla nostra, dal logico tedesco **Gottlob Frege** (1848-1925) nell'opera nota col titolo *Ideografia*, pubblicata nell'anno 1879. La loro forma attuale compare nel 1921, nell'opera *Tractatus logico-philosophicus* di **Ludwig Wittgenstein** (1889-1951), uno dei massimi esponenti di filosofia del linguaggio. In realtà, contemporaneamente a Wittgenstein e indipendentemente da lui, anche il logico polacco **Emil L. Post** (1897-1954), cui va il merito di aver sistemato la logica proposizionale, utilizzava tabelle di verità come le nostre.

9.7.3 I valori di verità di una qualunque proposizione composta con i connettivi $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ed eventualmente con la negazione "non", possono essere ottenuti sulla base della negazione di una proposizione e delle tavole di verità di $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Sopra (Tab. 5) in effetti ne abbiamo visto un esempio. Un altro esempio si ha quando si ricercano i valori di verità della proposizione:

$$P = [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C).$$

Essi si ricavano costruendo la seguente tabella:

A	B	C	$A\to B$	$B\to C$	$(A\to B)\wedge(B\to C)$	$A\to C$	P
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

TAB. 6

Come si vede, la proposizione P è vera in ogni caso.
Quando, in una stessa proposizione composta, figurano più connettivi, per evitare uno smodato e fastidioso uso di parentesi, si conviene che i connettivi "$\to$" e "$\leftrightarrow$" separino più fortemente dei connettivi "$\wedge$" e "$\vee$".
Cosicché, per esempio, la precedente proposizione P può essere scritta più semplicemente in questo modo: $P=(A\to B)\wedge(B\to C)\to(A\to C)$.

9.7.4 Consideriamo ora le tre proposizioni composte:

$$A \to B\,,\qquad \overline{B} \to \overline{A}\,,\qquad \overline{A}\vee B\,.$$

Si può constatare che le loro tavole di verità (Tab. 7) coincidono.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \to B$	$\overline{B} \to \overline{A}$	$\overline{A}\vee B$
V	V	F	F	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**	**V**

TAB. 7

Si dice che le tre proposizioni $A \to B$, $\overline{B} \to \overline{A}$, $\overline{A}\vee B$ sono "equivalenti". In generale:

Due proposizioni composte si dicono **equivalenti** se sono costituite dalle medesime proposizioni componenti ed hanno le stesse tavole di verità.

Per indicare che una certa proposizione P è equivalente ad un'altra proposizione Q si scrive:

$$\mathbf{P \equiv Q}$$

e si legge: «P è equivalente a Q».
In particolare, allora:

$$A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A},\qquad A \to B \equiv \overline{A}\vee B.$$

Tra le principali equivalenze elenchiamo le seguenti, la cui dimostrazione lasciamo a te:

- <u>regola della doppia negazione</u>:

$$\overline{\overline{A}} \equiv A;$$

- <u>proprietà di idempotenza</u>:

$$A\wedge A \equiv A\,,\qquad A\vee A \equiv A\,;$$

- <u>proprietà commutative</u>:

$$A\wedge B \equiv B\wedge A\,,\qquad A\vee B \equiv B\vee A\,;$$

- proprietà associative:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)\,, \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)\,;$$

- proprietà distributive (di $\wedge$ rispetto a $\vee$ e di $\vee$ rispetto a $\wedge$):

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\,, \qquad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (B \vee C)\,;$$

- leggi di De Morgan [4]:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}\,, \quad \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}\,.$$

9.7.5 Ritorniamo ora sull'interrogativo che avevamo lasciato in sospeso in chiusura del paragrafo 9.6.3, a proposito delle negazioni delle seguenti proposizioni:

$$A \wedge B\,, \ A \vee B\,, \ A \to B\,.$$

Ci auguriamo che né tu né alcuno dei tuoi compagni abbiate pensato che la negazione della proposizione $A \wedge B$ ("A e B") fosse la proposizione $\overline{A} \wedge \overline{B}$ ("né A né B"). Se così fosse, ogni volta che $A \wedge B$ è vera, $\overline{A} \wedge \overline{B}$ dovrebbe risultare falsa ed ogni volta che $A \wedge B$ è falsa, $\overline{A} \wedge \overline{B}$ dovrebbe risultare vera. Ma le tavole di verità delle due proposizioni (Tab. 8) mostrano che non è così.

Tuttavia la stessa tavola di $\wedge$ ci suggerisce che la negazione di $A \wedge B$ deve essere una proposizione falsa quando A e B sono entrambe vere e una proposizione vera in ogni altro caso. Ora questo accade esattamente per la proposizione $\overline{A} \vee \overline{B}$ (come sappiamo del resto dalle leggi di De Morgan) ma accade anche per la proposizione $A \to \overline{B}$; come mostra la tabella 9.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V

TAB. 8

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$A \to \overline{B}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

TAB. 9

Dunque:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}\,,$$

ma anche:

$$\overline{A \wedge B} \equiv A \to \overline{B}\,.$$

In particolare, considerata la proposizione: «*il numero naturale* n *è primo e dispari*»
la sua negazione è la proposizione: «*il numero naturale* n *non è primo o non è dispari*»,
equivalente a quest'altra: «*se il numero naturale* n *è primo allora non è dispari*».
Ricorrendo ancora alle tavole di verità si può giustificare che:

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}\,, \quad \overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}\,.$$

La prima di queste equivalenze del resto è una delle leggi di De Morgan.

Cosicché:

- la negazione della proposizione: «*il numero dei miei anni è primo o dispari*»
  è la proposizione: «*il numero dei miei anni non è primo e non è dispari*»;
- la negazione della proposizione: «*se penso allora esisto*»
  è la proposizione: «*penso e non esisto*».

[4] **De Morgan**, Augustus, matematico e logico inglese, 1806-1871.

9.7.6 Nel linguaggio comune capita che si formulino proposizioni che sono equivalenti oppure che lo sembrano senza però esserlo. Per poterlo decidere con certezza occorre tradurle in simboli, utilizzando i connettivi logici, e costruire le relative tavole di verità, oppure cercare di trasformare l'una nell'altra per mezzo delle equivalenze principali già citate.

In uno dei due modi si può dimostrare, per esempio, che le due proposizioni seguenti:

«studia o sarai bocciato» e «se non studi allora sarai bocciato»

sono equivalenti. Puoi farlo da te.
Considera, ancora, le due seguenti proposizioni:

1) «partecipano al concorso tutti coloro che conoscono il francese o l'inglese»;
2) «chi non partecipa al concorso non conosce il francese e non conosce l'inglese».

Prova a stabilire se sono equivalenti o no.

9.7.7 ESERCIZI.

1. Forma le tavole di verità delle seguenti proposizioni:
   a) $(A\wedge B)\rightarrow\overline{A}$, $\quad A\wedge(B\rightarrow\overline{A})$.
   b) $(\overline{A}\rightarrow B)\wedge A$, $\quad (A\wedge B)\rightarrow(A\vee B)$.
   c) $[(A\rightarrow B)\wedge A]\rightarrow B$, $\quad (A\vee B)\rightarrow(A\wedge B)$.
   d) $[(A\rightarrow B)\wedge\neg B]\rightarrow\neg A$, $\quad (A\vee B)\leftrightarrow(\overline{A}\wedge\overline{B})$.
   e) $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\overline{A}\rightarrow\overline{B})$, $\quad (A\rightarrow B)\leftrightarrow(\overline{A}\rightarrow\overline{B})$.
   f) $A\rightarrow(B\vee C)$, $\quad [(A\leftrightarrow B)\wedge C]\rightarrow C$.
2. Osservando che l'impiego dei connettivi nel linguaggio naturale può indurre a ritenere semplici proposizioni che invece sono composte, scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni, precisando le proposizioni componenti, e forma le relative tabelle di verità:
   a) Il numero 2 è pari e primo. [**R.** $A\wedge B$]
   b) Paolo e Maria hanno apprezzato il mio regalo.
   c) Gli alunni devono presentarsi agli esami forniti dei libri necessari e di un documento di riconoscimento oppure accompagnati da un professore della scuola. [**R.** $[A\wedge(B\vee C)]\rightarrow D$]
   d) Solitamente, dopo la partita, sono soddisfatto se la mia squadra ha vinto o quantomeno se non ha subito reti. [**R.** $(A\vee\overline{B})\rightarrow C$]
   e) Mario far una gita all'estero, fra i 20 e i 30 anni, ogni anno in cui la sua età è espressa da un numero pari o da un numero primo. [**R.** $[(A\wedge B)\wedge(C\vee D)]\rightarrow E$]
   f) Per aver diritto all'assistenza occorre essere donne o non aver compiuto 18 anni. [**R.** $(A\vee\overline{B})\rightarrow C$]
   g) Si può formare una classe se e solo se il numero degli alunni è compreso fra 25 e 30. [**R.** $A\leftrightarrow(B\wedge C)$]
   h) Se studiando impari e imparando sarai promosso allora se studi sarai promosso. [**R.** $[(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)]\rightarrow(A\rightarrow C)$]

NOTA BENE. Abbiamo detto che un enunciato è una frase di senso compiuto della quale si possa affermare senza equivoci che è vera o che è falsa. In realtà esistono enunciati che, apparentemente sensati, portano invece a contraddizioni, Valga per tutti il seguente esempio.
Sia l'enunciato:

A: «Questo enunciato è falso».

Analizziamolo.

Se l'enunciato A fosse vero allora sarebbe vero che "l'enunciato A è falso". E se fosse falso allora sarebbe falso che "l'nunciato A è falso" e pertanto A sarebbe vero.
Insomma l'enunciato A sarebbe contemporaneamente vero e falso. E ciò non può essere.
È quello che i logici chiamano ***antinomia***.
In genere le teorie sono costruite in modo da evitare le antinomie, ma questo non sempre riesce, nel senso che le antinomie si ripresentano e non si riesce ad eliminarle.
Ora, un discorso più completo ed esauriente su questo argomento non è possibile al nostro livello di studi e fermiamo qui le nostre considerazioni. Aggiungiamo soltanto, giusto per capirci, che nella nostra trattazione eviteremo enunciati che, come quello dell'esempio, parlano di se stessi.

9.8 IL TEOREMA

9.8.1 Nello studio della geometria soprattutto, ma anche dell'aritmetica e del calcolo algebrico, ci siamo imbattuti in situazioni in cui partendo da una certa premessa I, supposta vera, segue una conclusione T.

Una situazione siffatta è espressa dall'implicazione I→T.

Abbiamo assunto come vere alcune di queste implicazioni: le abbiamo chiamate, a volte, *regole del gioco*. Altre volte le abbiamo chiamate *proprietà* o anche *teoremi* e le abbiamo dimostrate.

In generale, si definisce **teorema** un enunciato che, sulla base di premesse accettate come vere, si dimostra essere vero.

Di conseguenza l'implicazione I→T (con premessa I vera), che si dimostri essere vera, è un teorema.

La premessa I si chiama ***ipotesi***, la conclusione T ***tesi***.

Un esempio illustre di teorema è il "teorema di Pitagora": «In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti». Qual è l'ipotesi? Quale la tesi?

L'argomentazione in base alla quale viene dimostrato un teorema – cioè il fatto che dalla verità dell'ipotesi segue quella della tesi – è condotta attraverso una catena di deduzioni che formano il ***ragionamento deduttivo***.

Esso è di solito un **ragionamento diretto**, nel senso che, a partire dalla proposizione I e procedendo per passi, eventualmente mediante l'utilizzazione di altre proposizioni non esplicitamente espresse, ma della cui verità siamo certi (sono dette, a volte: ***ipotesi implicite***), si perviene alla dimostrazione di T.

A titolo di esempio, supponiamo di dover dimostrare il seguente teorema:

In ogni triangolo ciascun lato è minore del semiperimetro del triangolo.

Diciamo, intanto, che qui l'ipotesi sembra non esistere. In realtà, il teorema può mettersi nella forma seguente:

Se una figura geometrica è un triangolo allora ……..

E adesso l'ipotesi è chiara.

Oltre a questa ipotesi (esplicita), vengono sottintese altre proposizioni vere (ipotesi implicite) come questa, per esempio:

In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.

Orbene, prendendo le mosse proprio da questa proposizione e indicando con a, b, c le lunghezze dei lati del triangolo, si ha, per esempio:

$$a<b+c.$$

Sommando la lunghezza a ad entrambi i membri (operazione giustificata da un'altra ipotesi implicita: quale?), otteniamo:

$$a+a<a+b+c,$$

da cui segue:

$$2a<2p$$

dove p è il semiperimetro del triangolo, e infine (per un'ulteriore ipotesi implicita: quale?):

$$a<p.$$

Analogamente per gli altri due lati.

9.8.2 Prese due qualunque proposizioni A, B sappiamo che:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}.$$

Le due implicazioni $A \rightarrow B$ e $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ sono pertanto o entrambe vere o entrambe false.

Se, ora, la proposizione A→B esprime l'enunciato di un teorema (che, per comodità, chiamiamo ***teorema diretto***), anche la proposizione:

$$\overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$$

è un teorema: la diciamo ***teorema contronominale***.

Enuncia il contronominale del teorema di Pitagora. Qual è, adesso, l'ipotesi? Quale la tesi?

Assieme alle due suddette, è interessante considerare altre due proposizioni:

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \;\text{ e }\; \overline{\mathbf{A}} \rightarrow \overline{\mathbf{B}},$$

dette rispettivamente ***implicazione inversa*** e ***implicazione contraria*** di A→B.

Precisiamo subito che la verità dell'implicazione (diretta) A→B, mentre rende automatica la verità della contronominale $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$, non comporta invece necessariamente la verità delle implicazioni inversa e contraria.

Queste ultime due proposizioni possono pure essere vere (nel qual caso lo sono entrambe, poiché l'una è la contronominale dell'altra, e quindi sono anch'esse dei teoremi) ma possono risultare false (e anche adesso lo sono entrambe per lo stesso motivo, e quindi non sono dei teoremi).

La cosa è ben evidenziata dai seguenti esempi.

♦ ESEMPIO 1:

- $A \rightarrow B$: se un numero è divisibile per 2 allora è pari (*vera*);
- $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$: se un numero non è pari allora non è divisibile per 2 (*vera*);
- $B \rightarrow A$: se un numero è pari allora è divisibile per 2 (*vera*);
- $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$: se un numero non è divisibile per 2 allora non è pari (*vera*).

♦ ESEMPIO 2:

- $A \rightarrow B$: se un numero è divisibile per 4 allora è divisibile per 2 (*vera*);
- $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$: se un numero non è divisibile per 2 allora non è divisibile per 4 (*vera*);
- $B \rightarrow A$: se un numero è divisibile per 2 allora divisibile per 4 (*falsa* - per esempio 6 è divisibile per 2 ma non per 4);
- $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$: se un numero non è divisibile per 4 allora non è divisibile per 2 (*falsa* - per esempio 6 non è divisibile per 4 eppure è divisibile per 2).

ESERCIZI.

1. Enuncia le proposizioni inversa e contraria della proposizione che esprime il teorema di Pitagora. Si ottengono dei teoremi o no?
2. Considerata la seguente proposizione: «Se un quadrilatero è un quadrato allora è equilatero». Si tratta di un teorema? Qual è l'ipotesi? Quale la tesi? Enuncia la proposizione contronominale. Enuncia inoltre le

proposizioni inversa e contraria e di' se si tratta di teoremi.

9.8.3 Quando dell'implicazione che esprime l'enunciato di un teorema (diretto) vale anche l'implicazione inversa, e di conseguenza anche la contraria, nel senso che anche queste due proposizioni sono implicazioni vere, e perciò sono teoremi, allora si chiamano più esattamente ***teorema inverso*** e ***teorema contrario***.

In questo caso, posto che $A \rightarrow B$ indichi il teorema diretto e perciò $B \rightarrow A$ indica il teorema inverso, è ovviamente vera la proposizione:

$$A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A.$$

Come noto, si dice che A è ***condizione necessaria e sufficiente*** per B.

In particolare, riprendendo il primo dei due esempi precedenti:

il fatto "un numero è divisibile per 2"
è condizione necessaria e sufficiente
per concludere che "il numero è pari".

Se invece vale il teorema diretto $A \rightarrow B$ ma non l'inverso $B \rightarrow A$, si dice che A è ***condizione sufficiente*** (*ma non necessaria*) per B oppure che B è ***condizione necessaria*** (*ma non sufficiente*) per A.

Con riferimento al secondo dei due esempi considerati sopra:

- il fatto "un numero è divisibile per 4" è condizione sufficiente (ma non necessaria) per concludere che "il numero è divisibile per 2";
- il fatto "un numero è divisibile per 2" è condizione necessaria (ma non sufficiente) perché risulti che "il numero è divisibile per 4".

Di' se, nel teorema di Pitagora, l'ipotesi riguardo alla tesi è:

- condizione sufficiente ma non necessaria;
- condizione necessaria ma non sufficiente;
- condizione necessaria e sufficiente.

9.8.4 ESERCIZI.

1. Enuncia le proposizioni contronominale, inversa e contraria della seguente proposizione e di ognuna di esse di' se si tratta di un teorema o no:
   «se gli angoli opposti di un quadrilatero sono congruenti
   allora il quadrilatero è un parallelogramma».
2. Spiega perché il fatto che due punti A e B hanno uguale distanza da una retta r è condizione necessaria ma non sufficiente per concludere che la retta AB è parallela alla retta r.
3. Dopo aver messo ciascuna delle seguenti proposizioni sotto forma di implicazione (se ... allora), formula dell'implicazione ottenuta la contronominale, l'inversa e la contraria e, di ognuna delle quattro proposizioni correlate, stabilisci il rispettivo valore di verità:
   - Piero è italiano se è europeo.
   - Un numero naturale è pari se il suo successivo è dispari.
   - Il quadrato di un numero naturale pari è pari.
   - Un quadrato è un quadrilatero con i quattro lati congruenti.
   - Un triangolo ha due angoli congruenti se ha due lati congruenti.
   - Un quadrilatero con le diagonali perpendicolari è un rombo.
   - Se due numeri naturali sono primi tra loro anche i loro successivi sono primi fra loro.
   - Se due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti, sono parallele.

4. Enuncia le proposizioni contronominale, inversa e contraria della seguente proposizione e di ognuna di esse di’ se si tratta di un teorema o no:
   «se un quadrilatero è un quadrato allora i suoi lati opposti sono congruenti».
5. Il fatto «un numero è pari e primo» è condizione necessaria e sufficiente per concludere che «il numero è 2». È vero o falso?
6. Il fatto «ha due lati opposti paralleli» è condizione solo necessaria, solo sufficiente o è necessaria e sufficiente per concludere che «un quadrilatero convesso è un parallelogramma»?

9.8.5 A volte, la dimostrazione di un teorema non può essere condotta mediante un ragionamento diretto. In altri termini, dalla verità dell’ipotesi I non può desumersi direttamente quella della tesi T.
Si tenta, allora, un *ragionamento indiretto*.
Un ragionamento indiretto si sviluppa nel modo seguente:

Si ammette che sia vera la negazione della tesi, cioè si ammette che sia vera la proposizione $\overline{\mathrm{T}}$.
Sulla base di questa ammissione (e di eventuali altre ipotesi implicite) si sviluppa il ragionamento deduttivo fino a giungere alla dimostrazione della verità della negazione $\overline{\mathrm{I}}$ dell’ipotesi (a volte, della negazione di una delle ipotesi implicite), cioè alla dimostrazione della falsità di I.
Ora, però, se c’è una cosa di cui siamo sicuri, questa è la verità dell’ipotesi I. Avere dimostrato, invece, che I è falsa significa che dovrebbe essere vera la congiunzione $\mathrm{I} \wedge \overline{\mathrm{I}}$. Ma questa proposizione è sicuramente falsa, perciò da qualche parte il ragionamento precedente è in difetto, fa acqua.
Esaminandolo con attenzione, ci si rende conto che l’unico punto di crisi è costituito dall’avere ammesso la verità della proposizione $\overline{\mathrm{T}}$. Dobbiamo concludere che ciò non può essere, per cui $\overline{\mathrm{T}}$ è falsa e, di conseguenza, è vera T. Così termina il ragionamento indiretto.

Questo metodo di dimostrazione, che si conclude per l’appunto con la constatazione di una contraddizione che non può evidentemente sussistere, si chiama **ragionamento per assurdo**.

9.8.6 Ci siamo già serviti, in passato, del ragionamento per assurdo. In particolare lo abbiamo fatto per dimostrare i seguenti teoremi:
Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono incommensurabili.
Non esiste alcuna frazione generatrice che generi un numero decimale periodico con periodo 9.
Prova a ripetere le dimostrazioni dei teoremi suddetti.
Il ragionamento per assurdo va seguito anche nella dimostrazione delle seguenti proprietà dei numeri naturali:
Ogni numero primo maggiore di 2 è dispari.
Se il quadrato di un numero è pari o dispari, anche il numero è rispettivamente pari o dispari.
Prova a fare queste dimostrazioni.
Avremo altre occasioni, in futuro, per ricorrere a questo tipo di ragionamento. Avvertiamo, inoltre, che lo studio di questo paragrafo 9.8 – che ti può creare qualche legittima preoccupazione per la difficoltà dei concetti che esprime – sarà riproposto nel prosieguo degli studi, per un consolidamento e un approfondimento (5).

[5] Cfr.: Unità 88: Forme e figure di ragionamento.

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. ® Un insieme di persone è così assortito: 15 sono tifosi di calcio, 12 di basket e 5 di entrambi gli sport. Quante persone costituiscono l'insieme?
   Come pensi di procedere? Parlane con i tuoi compagni e, se occorre, fatti aiutare dal professore.
   Dopo che hai capito come si procede, prova a risolvere questi altri problemi:
2. Una classe di 23 alunni ha questa specialità: 8 alunni amano lo studio della matematica, 10 quello della lingua straniera e 3 amano studiare entrambe le discipline.
   Non v'è dubbio che ad alcuni alunni della classe non piace studiare né matematica né lingua straniera. Quanti sono questi alunni?
3. In un'urna vi sono palline di vetro e palline di plastica, che possono essere bianche o nere. Precisamente: 11 palline sono di vetro, 16 sono nere, 10 bianche. Si sa per che 6 palline di plastica sono bianche.
   Quante palline vi sono nell'urna, quante sono quelle di plastica e quante sono quelle nere di vetro?
4. In un insieme formato da 20 numeri naturali, 10 sono divisibili per 2, 6 sono divisibili per 3 e 3 sono divisibili per 6. Stabilire se nell'insieme vi sono numeri non divisibili né per 2 né per 3 ed eventualmente quanti ve ne sono.
5. Sia A un insieme di numeri razionali. Se esiste in A un numero M tale che $M \geq x$, $\forall x \in A$, allora M si definisce **massimo** dell'insieme A. Se esiste in A un numero m tale che $m \leq x$, $\forall x \in A$, allora m si definisce **minimo** dell'insieme A. Dimostrare le seguenti proposizioni:
   a) L'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$ ammette massimo ma non minimo.
   b) L'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq -1\}$ ammette minimo ma non massimo.
   c) L'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 2\}$ non ammette massimo né minimo.
   d) L'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ ammette sia massimo che minimo.

VERIFICHE [6]

1. Fra i seguenti insiemi, quali è possibile scrivere per elencazione?
   {x | x è un numero naturale tale che $x<10^{10}$}.
   {x | x è un numero naturale divisore di 3862948}.
   {x | x è un numero naturale divisibile per 0}.
   {x | x è un numero naturale multiplo di 10}.
   {x | x è un numero razionale compreso fra 0 ed 1}.
2. Di ciascuno dei seguenti insiemi elenca i primi 10 termini:
   $$\{x \mid x=2n+1,\ n\in\mathbb{N}\};\ \{x \mid x=3n,\ n\in\mathbb{N}\};\ \{x \mid x=2n,\ n\in\mathbb{N}\};$$
   $$\{x \mid x=4n+1,\ n\in\mathbb{N}\};\ \{x \mid x=n^2,\ n\in\mathbb{N}\};\ \{x \mid x=n^3,\ n\in\mathbb{N}\}.$$
3. Spiega se l'insieme A ammette massimo e/o minimo sapendo che:
   1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$. 2) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$. 3) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 2\}$. 4) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$.
4. Com'è noto, una proposizione universale - $\forall x, P(x)$ - è vera se e solo se la forma proposizionale P(x) acquista la caratteristica di proposizione vera per tutti gli x scelti nell'insieme di base, nessuno escluso.

---

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

In conformità a questo fatto stabilire perché le seguenti proposizioni sono tutte false:

$$\forall x\in\mathbb{N} : 3x>2x; \quad \forall x\in\mathbb{N} : x^2>x; \quad \forall x\in\mathbb{N} : x^2>0.$$

5. Come noto, una proposizione esistenziale - $\exists x:P(x)$ - è vera se e solo se la forma proposizionale P(x) acquista la caratteristica di proposizione vera per almeno un x scelto nell'insieme di base, anche uno soltanto. In conformità a questo fatto stabilisci perché le seguenti proposizioni sono tutte vere:

$$\exists x\in\mathbb{N} : x+2<3; \quad \exists x\in\mathbb{N} : x^3=x; \quad \exists x\in\mathbb{N} : x^2=2x.$$

6. Tra i seguenti enunciati ve ne sono di veri e di falsi. Individuare gli uni e gli altri e fornire ampia spiegazione delle risposte.

[a] $\exists x\in\mathbb{Z}, \forall y\in\mathbb{Z} : x+y=4$.
[b] $\forall x\in\mathbb{Z}, \exists y\in\mathbb{Z} : x>y$.
[c] $\forall x\in\mathbb{Z}, \exists y\in\mathbb{Z} : x=2y$.
[d] $\exists x\in\mathbb{Z}, \exists y\in\mathbb{Z} : x=2y$.
[e] $\forall x\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N} : x<x^n$.
[f] $\exists x\in\mathbb{Q}, \exists n\in\mathbb{N} : x>x^n$.
[g] $\forall x,y\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N} : x>y\rightarrow x^n>y^n$.

7. Esamina le situazioni indicate nella figura sottostante (Fig. 9) e stabilisci quale di esse si adatta a rappresentare gli insiemi A e B appresso indicati:

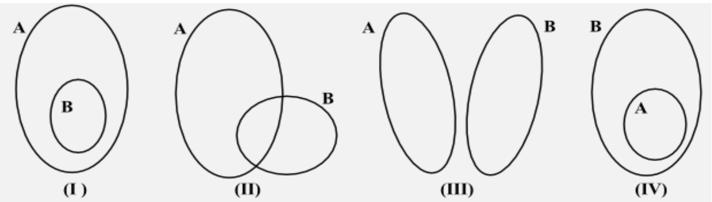

FIG. 9

a) A = insieme dei numeri naturali; B = insieme dei numeri naturali pari.
b) A = insieme dei numeri pari; B = insieme dei numeri dispari .
c) A = insieme dei multipli di 4; B = insieme dei multipli di 3.
d) A = insieme dei divisori di 64; B = insieme dei divisori di 37.
e) A = insieme dei numeri del tipo 4n, dove $n\in\mathbb{N}$; B = insieme dei numeri naturali.

8. Rappresenta, per mezzo dei diagrammi di Eulero-Venn, gli insiemi A, B, C tali che, posto A uguale all'insieme dei numeri naturali, sia:

1) $B=\{x \mid x=2n, n\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x \mid x=2n+1, n\in\mathbb{N}\}$.
2) $B=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x \mid x \text{ è un divisore di } 60\}$.
3) $B=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x \mid x=2n, n\in\mathbb{N}\}$.

9. Una sola delle seguenti proposizioni è vera. Individuala.

a) Se A={1} allora P(A)=A.
b) Se A={1} allora P(A)={A}.
c) L'insieme delle parti dell'insieme vuoto è vuoto.
d) Esiste un insieme tale che l'insieme delle sue parti ha un solo elemento.
e) Esiste un insieme che ha un numero di elementi uguale a quello dell'insieme delle sue parti.

10. Dati gli insiemi A = {a,b,c} e B = {a,c,d,e}, trova:

$$A\cap B, \quad A\cup B, \quad A-B, \quad B-A$$

e rappresenta ciascuna situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

11. Considerato l'insieme M dei mesi dell'anno e detti A l'insieme dei mesi di 30 giorni e B quello dei mesi il cui nome contiene la lettera R, trova:

$$A\cap B, \quad A\cup B, \quad A-B, \quad B-A$$

e rappresenta ciascuna situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

12. Esamina ciascuno dei seguenti diagrammi di Eulero-Venn ed evidenzia, ombreggiandola, la regione che identifica l'insieme definito in corrispondenza di ciascun diagramma:

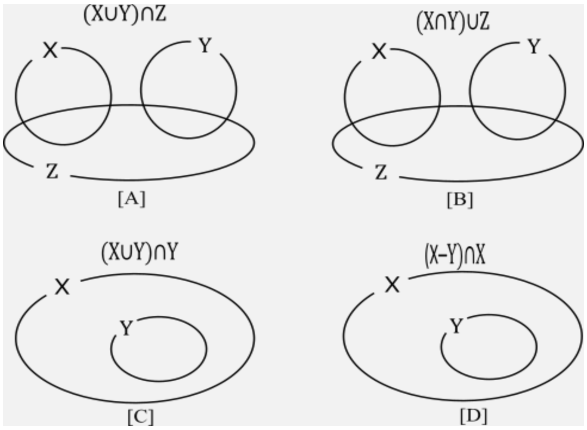

FIG. 10

13. Giustifica che, se A e B sono insiemi tali che $A \subseteq B$, allora:

$$A \cap B = A\,,\quad A \cup B = B\,.$$

14. Posto che A e B siano insiemi tali che $B \subseteq A$, determina:

$$A \cup (A - B)\,;\quad B \cup (A - B)\,;\quad A \cap (A - B)\,;\quad B \cap (A - B)\,.$$

Esamina anche il caso in cui B non è incluso in A: si trovano ancora gli stessi risultati?

[**R**. Sì, tranne per uno dei 4 casi]

15. Stabilire quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali false, tenendo presente che A è un insieme qualsiasi:

$$A \cap A = \varnothing\,;\quad A \cup A = \varnothing\,;\quad A \cap A = A\,;\quad A \cup A = A\,.$$

Dire se esiste qualche particolare insieme A per il quale le quattro uguaglianze sono tutte vere.

16. Se A e B sono due qualsiasi insiemi disgiunti, inclusi nello stesso insieme C, giustificare che si ha:

$$C - (A \cup B) = (C - A) - B\,.$$

L'uguaglianza vale anche se A, B, C sono insiemi qualsiasi? [**R**. ... ; Sì]

17. Dati tre insiemi qualsiasi A, B, C, dire se è vero che:

$$(C \subseteq A \wedge C \subseteq B) \rightarrow C \subseteq A \cap B\,.$$

18. L'intersezione di tre insiemi è costituita da un solo elemento. Ammesso che ciascuno dei tre insiemi sia formato da due elementi, quanti elementi contiene l'unione dei tre insiemi?

[A] Esattamente 3. [B] Esattamente 4. [C] 3 oppure 4. [D] Né 3 né 4.

19. Dopo aver verificato le seguenti equivalenze:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B},\quad \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B},\quad \overline{A \rightarrow B} \equiv A \wedge \overline{B},$$

dove A e B sono proposizioni qualsiasi, enunciare a parole le opposte delle seguenti proposizioni:

$$A \wedge B\,,\quad A \vee B\,,\quad A \rightarrow B\,.$$

20. Mettere in forma simbolica le seguenti proposizioni (il connettivo "**o**" è usato in senso inclusivo ed A, B sono proposizioni assegnate) e, dopo aver costruito le rispettive tavole di verità, dire quali delle proposizioni considerate sono equivalenti:

P_1 : A ma non B. P_2 : Non solo A ma anche B.

P_3 : Non è vero che se A allora B. P_4 : Né A né B.

P_5 : Non è vero che o A o B. P_6 : Non è vero che non A o non B.

[**R.** P_1-P_3, P_2-P_6, P_4-P_5.]

21. Tradurre in forma simbolica le seguenti frasi:
a) Se introdotta nel punto o nel momento sbagliato la buona logica può essere il peggior nemico di un buon insegnamento.
b) Tutti desideriamo la verità ma ci troviamo invischiati in un mare di incertezze.
c) Una verità matematica non è semplice né complessa: semplicemente è.
d) Quando sono a letto in genere dormo, ma se non dormo costruisco castelli in aria.

22. Costruire una frase di senso compiuto che abbia come traduzione simbolica la seguente proposizione:
a) $(A \rightarrow B) \wedge (\overline{B} \rightarrow C)$. b) $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$, c) $A \rightarrow (\overline{B} \vee C)$.

23. ® In un'urna ci sono 10 palline, di cui 6 bianche e 4 nere. Determinare il minimo numero di palline che bisogna estrarre per avere la certezza che ne esistano almeno 2:
a) bianche; b) nere; c) dello stesso colore; d) di colore diverso.

24. ® L'onorevole Pinco Pallino, nel corso di un suo intervento in Parlamento, in un momento di foga oratoria fece questa affermazione imprudente: «Tutti coloro che si trovano in questa sala dicono solo bugie». Secondo te, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?
a) Tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo bugie.
b) Tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo la verità.
c) Qualcuno di coloro che si trovano nella sala dice solo bugie e qualcuno dice solo la verità.
d) Di nessuna delle tre affermazioni precedenti si può dire con certezza se sia vera o falsa.

25. PROBLEMA RISOLTO. Martin Gardner [7], in *Enigmi e Giochi Matematici*, propone questo problema, che sei invitato a risolvere: «Immaginate di avere tre scatole contenenti una due palline bianche, una due palline nere e la terza una pallina nera e una bianca. Le scatole hanno, per riconoscimento, sul coperchio, segnate le lettere BB, NN, BN, ma qualcuno, per errore, ha scambiato i coperchi in modo che ora nessuna scritta corrisponde più al contenuto. È consentito di estrarre una pallina alla volta da una qualunque scatola, senza però guardare nell'interno e in questo modo si deve determinare il contenuto delle tre scatole. Qual è il minimo numero di estrazioni indispensabile per riuscirvi?»
RISOLUZIONE. È sufficiente una sola estrazione dalla scatola BN.
Se, infatti, si estrae una pallina dall'urna che ha il contrassegno BN, delle due l'una: o la pallina estratta è bianca o è nera.
Se la pallina estratta è bianca, quella rimasta nell'urna deve essere pure bianca, dal momento che la scritta BN è errata. Quindi nella scatola BN ci sono due palline bianche. Ne consegue che nella scatola BB ci devono essere due palline nere e nella scatola NN una pallina bianca e una nera. Non è, infatti, possibile che le due palline di colore diverso siano nella scatola BB, dal momento che, in tal caso, le due palline nere sarebbero nella scatola NN, senza errore per questa scatola.
Analogo ragionamento si può fare se dalla scatola BN si estrae pallina nera. Si può concludere, infatti che in tale scatola ci sono due palline nere, e, di conseguenza, nella scatola NN due palline bianche e nella scatola BB una pallina bianca e una nera.

26. Fornire una rappresentazione grafica che evidenzi le relazioni d'inclusione tra i diversi tipi di quadrilateri. [Si ricorda che nella nostra impostazione un trapezio non è considerato un particolare parallelogramma]

27. ® In un concorso per il reclutamento dei docenti, tra i quesiti segnalati dal Ministero vi era anche il

[7] Martin Gardner, matematico statunitense, esperto di giochi matematici, 1914-2010.

seguente:
Se tutti i boiardi sono polemici e nessun campanaro è polemico, si può logicamente concludere che:
a) *Nessun campanaro è un boiardo* b) *Alcuni boiardi sono polemici*
c) *Alcuni boiardi sono campanari* d) *Tutti i campanari sono boiardi*
Il Ministero segnalava l'alternativa a) come unica risposta corretta.
Spiega in maniera esauriente perché la segnalazione del Ministero è errata.

28. ® Andrea, Cristiano e Leo sono i tre calciatori più pagati dalla squadra del Borgorosso F. C., ma non nella stessa misura. Si hanno le seguenti informazioni:
1) Quello, tra loro, che è pagato di meno è Andrea o Leo.
2) Però, o Cristiano è quello pagato di meno o Leo è quello pagato di più.
Qual è la graduatoria?

29. ® In un cassetto sono disposti alla rinfusa 20 calzini, dei quali 10 sono rossi, 6 sono neri e 4 sono blu. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna estrarre dal cassetto per avere la certezza che due di essi: a) siano dello stesso colore; b) siano di colore nero; c) non siano di colore rosso.

30. ® L'intersezione di tre insiemi, ciascuno formato da 5 elementi, è costituita da un solo elemento. Si indichi con MIN è il numero minimo di elementi che può contenere l'insieme unione dei tre insiemi e con MAX il massimo numero.
Delle seguenti alternative una sola è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] MIN=7, MAX=10. [B] MIN=8, MAX=10.
[C] MIN=7, MAX=13. [D] MIN=8, MAX=13.

31. ® Si prendano in esame le seguenti uguaglianze:
1) $\{x \mid x \text{ è } la\ cifra\ delle\ unità\ del\ numero\ a^{100}, a \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 5, 6\}$
2) $\{x \mid x \text{ è } la\ cifra\ delle\ unità\ del\ numero\ a^{102}, a \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.
Delle seguenti alternative una sola è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] La 1) è vera e la 2) è falsa. [B] La 1) è falsa e la 2) è vera.
[C] La 1) e la 2) sono entrambe vere. [D] La 1) e la 2) sono entrambe false.

32. In un sacchetto sono contenuti 4 bastoncini, tra i quali non ce ne sono due di uguale lunghezza. Si pone il problema di ordinarli dal più lungo al più corto, ma è possibile confrontarne solo 2 per volta. Spiegare perché sono necessari 5 confronti per essere certi di ottenere l'ordinamento suddetto.

33. Solamente una delle seguenti proposizioni è VERA. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo è che abbia le diagonali uguali.
[B] Condizione sufficiente affinché un quadrilatero NON abbia le diagonali uguali e che NON sia un rettangolo.
[C] Condizione necessaria affinché un quadrilatero sia un rettangolo è che abbia le diagonali uguali.
[D] Condizione necessaria affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali è che sia un rettangolo.

34. Si consideri la seguente proposizione:
P : «In ogni poligono convesso ci sono almeno due angoli acuti».
Siano inoltre le seguenti proposizioni:
P_1: «Non esiste alcun poligono convesso in cui non ci siano almeno due angoli acuti»;
P_2: «Non esiste alcun poligono convesso in cui non ci siano tre angoli acuti»;
P_3: «Esiste almeno un poligono convesso in cui ci sono due angoli acuti»;

P_4: «Esiste almeno un poligono convesso in cui non c'è un solo angolo acuto».

Indipendentemente dal loro valore di verità:

a) La proposizione P è equivalente ad una ed una soltanto delle proposizioni P_1, P_2, P_3, P_4: individuare qual è questa proposizione.

b) Formulare la proposizione opposta della proposizione P.

35. Si consideri la seguente proposizione:

P : «A nessun calciatore risultano sgradite tutte le squadre di calcio di serie A».

Siano inoltre le seguenti proposizioni:

P_1: «Esiste almeno un calciatore al quale risultano gradite tutte le squadre di calcio di serie A»;

P_2: «Esiste almeno un calciatore al quale risulta gradita almeno una squadra di calcio di serie A»;

P_3: «Esiste almeno una squadra di calcio di serie A gradita a tutti i calciatori»;

P_4: «Tutte le squadre di calcio di serie A risultano gradite ad almeno un calciatore».

Indipendentemente dal loro valore di verità:

a) La proposizione P è equivalente ad una ed una soltanto delle proposizioni P_1, P_2, P_3, P_4: individuare qual è questa proposizione.

b) Formulare la proposizione opposta della proposizione P.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È corretto affermare che $a \subset \{a,b,c\}$?

2. È vero che l'espressione "gli uomini di altezza superiore ai 4 metri" non definisce alcun insieme?

3. Considerato l'insieme $A=\{1,2\}$ e indicato con P(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A, è corretto scrivere $\{1\} \subset P(A)$?

4. Considerato l'insieme $A=\{0\}$ e indicato con P(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A, è corretto affermare che $\{0\} \cap P(A) = \emptyset$?

5. Fornisci una rappresentazione grafica che evidenzi le relazioni d'inclusione tra gli insiemi numerici $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

6. Posto che $\mathbb{Q}_0^+$ indichi l'insieme dei numeri razionali positivi ed $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali, stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:

$$\forall x \in \mathbb{Q}_0^+ - \{1\},\ \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\} : x < x^n.$$

7. È vero che la negazione della proposizione "il numero reale x è positivo" è la proposizione "il numero reale x è negativo"?

8. È vero che la negazione della proposizione "piove e prendo l'ombrello" è la proposizione "non piove e non prendo l'ombrello"?

9. È vero che la negazione della proposizione "se piove allora prendo l'ombrello" è la proposizione "piove e non prendo l'ombrello"?

10. Si sa che l'implicazione $A \rightarrow B$ è falsa. Cosa si può dire del valore di verità dell'implicazione inversa $B \rightarrow A$?

11. Si sa che l'implicazione $A \rightarrow B$ è vera. Cosa si può dire del valore di verità dell'implicazione inversa $B \rightarrow A$? Cosa del valore di verità dell'implicazione contronominale $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$?

12. È vero che la negazione della proposizione "tutti gli uomini sono mortali" è la proposizione "nessun uomo è mortale"?

13. È vero che la negazione della proposizione "piove almeno un giorno nel mese di agosto" è la proposizione "non piove almeno un giorno nel mese di agosto"?

14. Si consideri il seguente ragionamento: "Poiché tutti gli uomini sono mortali, io, che sono un uomo, sono certamente mortale". Qual è l'ipotesi? Quale la tesi?

RISPOSTE.

1. No. a è un elemento dell'insieme $\{a,b,c\}$ per cui bisogna scrivere $a\in\{a,b,c\}$. È invece corretto scrivere $\{a\}\subset\{a,b,c\}$.

2. No. Definisce l'insieme vuoto.

3. No. Infatti 1, che è elemento dell'insieme $\{1\}$, non è elemento dell'insieme P(A), i cui elementi sono: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$. È invece corretto scrivere $\{1\}\in P(A)$.

4. Sì. Infatti gli insiemi $\{0\}$ e P(A) non hanno elementi comuni dal momento che il primo insieme ha il solo elemento 0 e il secondo insieme ha come elementi gli insiemi $\varnothing$ e $\{0\}$ e nessuno di essi evidentemente è 0.

5. La relazione richiesta è la seguente: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Una possibile rappresentazione grafica che la evidenzi è quella della figura sottostante (Fig. 11).

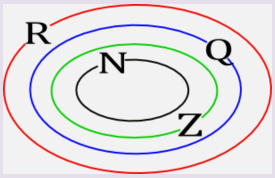

FIG. 11

6. È falsa. Essa, infatti, è soddisfatta solo se $x>1$, mentre non è soddisfatta per $0<x<1$.

7. No. La negazione è la proposizione "il numero reale x è non positivo", vale a dire "il numero reale x è negativo o nullo".

8. No. La negazione è la proposizione "non piove o non prendo l'ombrello". In generale: la negazione della proposizione $A\wedge B$ è la proposizione $\overline{A}\vee\overline{B}$.

9. Sì. In generale: la negazione della proposizione $A\rightarrow B$ è $A\wedge\overline{B}$.

10. Che è certamente vera. Infatti in un solo caso l'implicazione $A\rightarrow B$ è falsa: quando A è vera e B è falsa ed in tal caso la proposizione $B\rightarrow A$ è vera.

11. Della proposizione inversa non si può dire nulla: può essere vera e può essere falsa. Infatti la proposizione $A\rightarrow B$ è vera sia quando A e B sono o entrambe vere o entrambe false (in questi casi anche $B\rightarrow A$ è vera), sia quando A è falsa e B è vera (nel qual caso $B\rightarrow A$ è falsa).
Della proposizione contronominale, invece, si può dire che è certamente vera. Infatti le due proposizioni sono equivalenti avendo la stessa tabella di verità.

12. No. La negazione è "qualche uomo non è mortale".

13. No. La negazione è "non piove in alcun giorno nel mese di agosto".

14. L'ipotesi è costituita dalla congiunzione delle due proposizioni "tutti gli uomini sono mortali" e "io sono un uomo"; la tesi dalla proposizione "io sono mortale".

LETTURA

IL SIG. LOGICUS AD UN “BIVIO”

Ragazzi – esordì il Professore, dopo aver sistemato le sue cose sulla cattedra – oggi voglio raccontarvi un’antica storiella, strana ma interessante ed istruttiva.
Il signor Logicus stava percorrendo tranquillo la strada che l’avrebbe dovuto guidare al castello del Principe. All’improvviso la strada si biforca e a ciascuna delle due diramazioni, S’ ed S”, sta di guardia una sentinella. Un cartello, posto in mezzo alla via, avverte minaccioso:

Una delle due strade porta al castello del Principe, l’altra porta alla morte. Per sapere qual è la strada giusta potete fare una sola domanda ad una sola delle due sentinelle. Però, state attenti: una di esse dice sempre il VERO, l'altra dice sempre il FALSO.

Alla lettura del cartello, Logicus ha un attimo di smarrimento, ma subito si riprende, fa la domanda giusta e, ottenuta la risposta, soddisfatto e giulivo continua per la strada del castello.
Qualcuno di voi saprebbe dirmi quale domanda ha posto Logicus?
[Sconcerto fra gli studenti, che si fanno piccoli nella speranza di evitare di essere chiamati direttamente in causa].

Prof - Badate che non pretendo che subito mi diate la risposta corretta. Mi aspetto però che qualcuno tenti una risposta. Non vi preoccupate se sbagliate. Quello che vogliamo fare è solo una discussione.
[Ancora tentennamenti. Ma poi qualcuno incomincia a sciogliersi].
Claudia - Prof, io credo che la domanda, rivolta ad una delle due sentinelle, non può essere questa: «Quale strada conduce al castello del Principe?», perché qualunque sia la risposta non mi posso fidare.
Prof - Dici bene, Claudia, così sappiamo quale domanda non fare. Ma sapreste dirmi qual è invece la domanda giusta?
Milena - Forse potrebbe essere questa, rivolta alla sentinella messa a guardia della strada S”: «Se proseguo per la strada S’ vado al castello del Principe?» e poi fare il contrario di quello che risponde. Cioè se risponde «sì» proseguo per la strada S”, se risponde «no» proseguo per la strada S’.
Prof - Bene, abbiamo un punto di partenza per la discussione. Chi vuole intervenire su Milena?
Franca - Non mi pare che la domanda di Milena funzioni. Infatti, siccome non sappiamo se la sentinella che risponde è quella che dice il vero o quella che dice il falso, la sua risposta non ci chiarisce nulla.
Prof - Spiega in maniera più convincente.
Franca - Ammettiamo che la sentinella S”, alla domanda di Milena, risponda «sì». Se quella sentinella dice il vero, la strada S’ è quella giusta, ma se dice il falso, la strada giusta è l’altra e la strada S’ porta alla morte.
Prof - Vi convince l’obiezione di Franca?
Coro - Sìììì.
Prof - Dunque la domanda, così come l’ha formulata Milena, non funziona. Altri tentativi?
Giulio - Forse la domanda giusta potrebbe essere questa, rivolta alla sentinella che sta a guardia della strada S’: «La strada S” è quella sbagliata?» e fare il contrario di ciò che risponde.
Prof - Siete d’accordo con Giulio?
Franca - No, vale la stessa obiezione di prima.
Prof - Credo che siate tutti d’accordo con Franca. Vi voglio aiutare con qualche suggerimento. Fino a questo momento avete formulato domande che coinvolgono una sola sentinella. Perché non provate con qualche domanda che le coinvolge entrambe?
Milena - Ma Prof, è proprio quello che io ho cercato di fare: coinvolgere le due sentinelle.

Prof - No, Milena. Tu hai coinvolto in realtà non le due sentinelle ma le due strade. Così come ha fatto Giulio. Capite perché devono essere coinvolte entrambe le sentinelle?
[Nessuno risponde]
Prof - Non è difficile. Vi do un indizio. Se la risposta è in qualche modo la congiunzione di due proposizioni, una formulata da una sentinella ed una formulata dall'altra, com'è questa congiunzione?
Roberto - Un momento, Prof, lei ha detto che il cartello indica che si può fare una sola domanda. Com'è che adesso diventano due?
Prof - Hai ragione a sottolineare questo aspetto. Ma in realtà quello che io voglio dire è di riuscire a formulare una domanda che richieda una risposta che "assomigli" alla congiunzione di due risposte. Ritorno comunque alla domanda che or ora vi ho fatto: com'è la congiunzione delle risposte, vera o falsa?
Roberto - È falsa poiché è la congiunzione di una proposizione vera e di una falsa.
Prof - Bravo Roberto. Allora, qual è questa domanda che coinvolge le due sentinelle?
[Calma piatta per qualche secondo.]
Marco - Prof, forse è il caso che ce la suggerisca lei questa benedetta domanda, altrimenti facciamo notte.
Prof - Vedo che vi arrendete facilmente. In ogni caso, mi auguro che la discussione che abbiamo fatto sia servita a qualcosa.
Ecco, dunque, la domanda giusta, rivolta indifferentemente all'una o all'altra delle due sentinelle: «Se chiedo all'altra sentinella di dirmi se questa strada è quella che porta al castello del Principe, cosa mi risponde, che è quella giusta o quella sbagliata?» e, qualunque sia la risposta, fare il contrario perché quella risposta è falsa.
Milena - Non capisco perché.
Prof - Qualcuno sa spiegare adesso perché quella domanda è la domanda giusta, facendo anche vedere che la risposta è come se fosse la congiunzione di due proposizioni, una vera e l'altra falsa?
Marco - Ci provo io.
Prof - Avanti.
Marco - Ammettiamo che la domanda sia rivolta alla sentinella posta a guardia della strada X (così ci comprendo sia S' sia S").
Prof - Mi piace questa cosa. Prosegui.
Marco - Ammettiamo inoltre che la sentinella interpellata dia la seguente risposta: «L'altra sentinella ti risponderà che la strada X è quella giusta». Se la sentinella interpellata dice il vero, l'altra sentinella dice il falso, quindi la risposta data è falsa poiché è come se fosse la congiunzione della proposizione vera P': "la mia risposta è vera" e della proposizione falsa P": "la strada X è quella giusta". Se, d'altronde, la sentinella interpellata dice il falso, la risposta è comunque falsa, poiché è la congiunzione della proposizione falsa P': "la mia risposta è vera" e della proposizione vera P": "la strada X è quella giusta". In ogni caso la verità è la seguente: "Non è vero che la strada X è quella giusta", perciò la strada giusta è l'altra. Analogamente se la risposta della sentinella interpellata fosse: «L'altra sentinella ti risponderà che la strada X è quella sbagliata». Adesso si concluderebbe che "non è vero che la strada X è quella sbagliata", perciò è proprio la strada giusta.
Prof – Bravo Marco. Spero che adesso sia chiaro a tutti. Ma, se così non fosse, siete pregati di riflettere da soli sulle parole di Marco.