

Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le isometrie.
- Conoscere i teoremi di Pitagora e di Euclide.
- Avere consapevolezza delle proprietà della similitudine.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

## OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e dimostrare proprietà delle figure piane che risultino essere conseguenza delle similitudini*
- *risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini*
- *costruire sia con riga e compasso sia con strumenti informatici la sezione aurea di un segmento*
- *utilizzare la geometria piana per risolvere semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza*

**31.1 Teoremi di Euclide.**

**31.2 Teorema della bisettrice.**

**31.3 Teoremi delle corde, delle secanti e della tangente e secante.**

**31.4 La sezione aurea.**

**31.5 Raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo.**

**31.6 Problemi risolti.**

**Verifiche.**

Una breve sintesi per domande e risposte.

Letture.

**Applicazioni della  
similitudine**

**Unità 31**

## 31.1 TEOREMI DI EUCLIDE

**31.1.1** Come prima applicazione della similitudine, proponiamo la dimostrazione dei due teoremi di Euclide sul triangolo rettangolo già dimostrati in altro modo <sup>(1)</sup>.

- Consideriamo, allora, il triangolo ABC, rettangolo in A, e diciamo AH l'altezza relativa all'ipotenusa (Fig. 1). Si constata che ABC è simile al triangolo ABH per il 1° criterio di similitudine: i due triangoli, infatti, hanno due angoli ordinatamente congruenti. Precisamente:  $\widehat{BAC} \cong \widehat{AHB}$  perché retti e l'angolo in B in comune. Ne consegue che i lati omologhi dei due triangoli sono ordinatamente proporzionali. In particolare:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BH}.$$

Questo è un modo equivalente di scrivere la relazione  $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$ , che esprime il **primo teorema di Euclide**, che pertanto può essere enunciato anche in questa maniera:

**In ogni triangolo rettangolo, ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.**

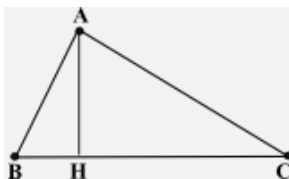


FIG. 1

- Con riferimento allo stesso triangolo ABC (Fig. 1), si osserva che i due triangoli AHB ed AHC sono simili giacché hanno due angoli ordinatamente congruenti. Precisamente:  $\widehat{AHB} \cong \widehat{AHC}$  perché angoli retti e  $\widehat{BAH} \cong \widehat{ACH}$  perché angoli complementari di  $\widehat{HAC}$ . Ne consegue che i lati omologhi dei due triangoli sono direttamente proporzionali. In particolare:

$$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HC}.$$

Questo è un modo equivalente di scrivere la relazione  $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ , che esprime il **secondo teorema di Euclide**, che pertanto può essere enunciato anche in questa maniera:

**In ogni triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.**

- Ti proponiamo adesso, per esercizio, di dimostrare le due seguenti proposizioni:
  - Se un'altezza di un triangolo divide internamente il lato opposto in due parti tra le quali l'altezza è media proporzionale allora il triangolo è rettangolo** (la proposizione inverte l'enunciato del 2° teorema di Euclide).
  - Se un lato di un triangolo è medio proporzionale tra un altro lato e la sua proiezione ortogonale su questo -ammesso che tale proiezione sia contenuta nel lato medesimo- allora il triangolo è rettangolo** (la proposizione inverte l'enunciato del 1° teorema di Euclide).
- Ti proponiamo inoltre di costruire, servendoti solamente di riga e compasso, la quantità  $\sqrt{ab}$ , essendo a, b due numeri reali positivi assegnati.

<sup>1</sup> Cfr.: Unità 8: Aree dei poligoni. Teoremi di Pitagora e di Euclide, N° 8.3.

### 31.2 TEOREMA DELLA BISETTRICE

**31.2.1** Questo teorema si compone di due parti: una riguarda la bisettrice degli angoli interni di un triangolo e l'altra la bisettrice degli angoli esterni. Cominciamo con la prima parte.

◆ **TEOREMA. La bisettrice di ogni angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai lati consecutivi.**

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC e tracciata la bisettrice AD dell'angolo in A (Fig. 2), ci proponiamo di dimostrare che:

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} .$$

A questo proposito conduciamo per C la parallela ad AD fino ad intersecare in E la retta AB.

Poiché:  $\widehat{DAC} \cong \widehat{ACE}$  e  $\widehat{BAD} \cong \widehat{AEC}$  e poiché  $\widehat{BAD} \cong \widehat{DAC}$  allora:  $\widehat{ACE} \cong \widehat{AEC}$ . Per cui il triangolo AEC è isoscele sulla base EC e per questo risulta  $AE=AC$ .

Ora, in virtù del teorema di Talete, riferito al fascio di rette parallele ad AD (e ad EC) tagliate dalle trasversali BE e BC, si ha  $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AE}$  ossia  $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$ . [c.v.d.]

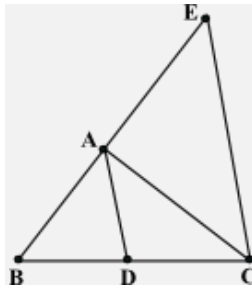


FIG. 2

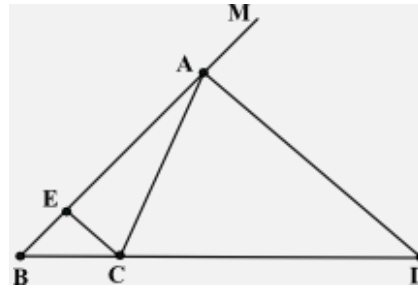


FIG. 3

**ESERCIZIO.** Dimostrare che, se la bisettrice di un angolo interno di un triangolo è anche mediana del lato opposto, allora il triangolo è isoscele.

**31.2.2** Passiamo adesso alla parte riguardante l'angolo esterno.

◆ **TEOREMA. Se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo interseca la retta del lato opposto, allora il punto intersezione determina con gli estremi di tale lato due segmenti direttamente proporzionali ai lati consecutivi.**

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC e tracciata la bisettrice del suo angolo esterno  $\widehat{CAM}$ , supponiamo che questa intersechi in D la retta BC (Fig. 3). Si dimostra che:

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} .$$

Basta ripetere la dimostrazione precedente. Ne lasciamo il compito a te.

Ti chiediamo inoltre: quand'è che la bisettrice di  $\widehat{CAM}$  non interseca la retta BC?

### 31.3 TEOREMI DELLE CORDE, DELLE SECANTI E DELLA TANGENTE E SECANTE

**31.3.1 TEOREMA DELLE CORDE.** Se due corde di una circonferenza si secano, il loro punto comune le divide in due parti tali che quelle di una corda formano gli estremi e quelle dell'altra i medi di una proporzione.

DIMOSTRAZIONE. Considerate le corde AB e CD di una circonferenza e posto che si sechino in P (Fig. 4), i due triangoli APC e BPD risultano simili per avere:  $\widehat{APC} \cong \widehat{BPD}$  e  $\widehat{CAP} \cong \widehat{BDP}$ : i loro lati omologhi

sono quindi in proporzione. In particolare:  $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$ .

[c.v.d.]

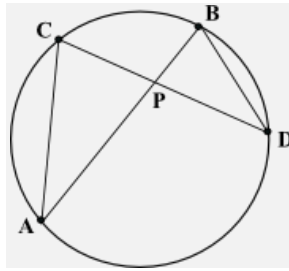


FIG. 4

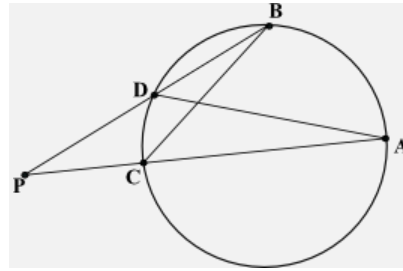


FIG. 5

**31.3.2 TEOREMA DELLE SECANTI.** Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due secanti, un'intera secante e la sua parte esterna formano gli estremi di una proporzione i cui medi sono l'altra secante e la sua parte esterna.

DIMOSTRAZIONE <sup>(2)</sup>. Considerate le secanti PA e PB condotte dal punto P ad una data circonferenza (Fig. 5) e dette PC e PD le loro parti esterne, i due triangoli APD e BPC risultano simili per avere l'angolo  $\hat{P}$  in comune e  $\widehat{PAD} \cong \widehat{PBC}$ : i loro lati corrispondenti sono quindi in proporzione. In particolare:  $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PD} : \overline{PC}$ .

[c.v.d.]

**31.3.3 TEOREMA DELLA TANGENTE E DELLA SECANTE.** Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono una tangente ed una secante, la tangente è media proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna.

DIMOSTRAZIONE <sup>(3)</sup>. Considerate la tangente PA e la secante PB condotte per un punto P ad una data circonferenza (Fig. 6) e detta PC la parte esterna della secante, i due triangoli PAB e PAC risultano simili per avere l'angolo  $\hat{P}$  in comune ed  $\widehat{ABP} \cong \widehat{PAC}$  poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC: i loro lati corrispondenti sono perciò in proporzione. In particolare:  $\overline{PB} : \overline{PA} = \overline{PA} : \overline{PC}$ .

[c.v.d.]

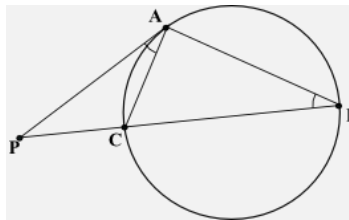


FIG. 6

### 31.4 LA SEZIONE AUREA.

**31.4.1** Si dice *sezione* (o *parte*) *aurea* di un segmento quella parte del segmento che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente.

Per esempio, considerato il segmento AB (Fig. 7), un suo punto C lo divide in due parti, di cui una, AC, è sezione aurea del segmento se risulta:

<sup>2</sup> È evidente che quando qui, come altrove, diciamo “intera secante” e “parte esterna” intendiamo riferirci a particolari segmenti e dal contesto si capirà di quali segmenti si tratta.

<sup>3</sup> Anche per la “tangente” vale quanto precisato nella nota precedente.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}.$$

Si dice pure che C divide AB in *media ed estrema ragione*.



FIG. 7

Proponiamo due procedimenti atti a determinare la sezione aurea di un segmento: uno sintetico (costruzione geometrica) ed uno analitico.

- Ai fini della costruzione geometrica della sezione aurea di un segmento AB (con i soli strumenti riga e compasso) tracciamo la circonferenza di centro O e diametro uguale ad AB, tangente in B alla retta del segmento (Fig. 8). La retta AO seca la circonferenza nei punti P e Q: il segmento AC, uguale ad AP, è la sezione aurea di AB. La dimostrazione di ciò è elementare. Infatti, in virtù del teorema della tangente e della secante, risulta  $\overline{AQ} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AP}$ , da cui segue:

$$(\overline{AQ} - \overline{AB}) : \overline{AB} = (\overline{AB} - \overline{AP}) : \overline{AP}.$$

Da qui, essendo evidentemente:

$$\overline{AQ} - \overline{AB} = \overline{AQ} - \overline{PQ} = \overline{AP} = \overline{AC}, \quad \overline{AB} - \overline{AP} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB},$$

segue:  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}$

[c.v.d.]

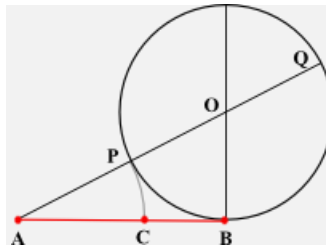


FIG. 8

- Ai fini della determinazione per via analitica della sezione aurea di un segmento, se L è la lunghezza del segmento ed x quella della sua parte aurea, si ha dunque:

$$L : x = x : (L - x),$$

da cui si ottiene la seguente equazione di 2° grado in x:

$$x^2 + Lx - L^2 = 0,$$

risolvendo <sup>(4)</sup> la quale ed accettando la sola radice positiva si trova:

$$x = \frac{L}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

**ESERCIZI.**

- 1) La parte aurea di un segmento è lunga a. Quant'è lungo il segmento?
- 2) Se il segmento AC è sezione aurea del segmento AB, allora la parte rimanente CB è a sua volta sezione aurea della sezione aurea AC del segmento dato. È vero o è falso?

**31.4.2** Connessi alla sezione aurea, due numeri hanno svolto e svolgono tuttora un ruolo importante. Uno è il rapporto fra la sezione aurea di un segmento ed il segmento medesimo, ossia il numero  $\alpha$  tale che:

<sup>4</sup> Bisogna sapere ovviamente come si risolve un'equazione di 2° grado.

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

Il secondo numero è il rapporto inverso, ovvero il rapporto fra un segmento e la sua sezione aurea, vale a dire il numero  $\varphi$ , chiamato **numero aureo** (o **rapporto aureo**)<sup>(5)</sup>, tale che:

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Accanto ai due numeri, ugualmente importante è una figura geometrica, il cosiddetto **rettangolo aureo**. Si definisce in questo modo un rettangolo il cui lato minore è sezione aurea del maggiore ovvero un rettangolo in cui il rapporto fra il lato maggiore ed il minore è il numero aureo  $\varphi$ .

**ESERCIZIO.** Calcola a quale condizione deve soddisfare la misura  $x$  della dimensione maggiore di un rettangolo aureo il cui perimetro non superi 40 cm. [R.  $0 < x \leq 10(\sqrt{5}-1)$  cm]

**31.4.3** Una delle più importanti proprietà geometriche, la cui scoperta è da molti attribuita ai Pitagorici, è costituita dal seguente teorema.

◆ **TEOREMA 1. Il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto.**

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione è piuttosto elementare. Basta riferirsi al triangolo isoscele OAB avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati del decagono (Fig. 9).

Si tratta, a questo punto, di constatare anzitutto che gli angoli interni del triangolo sono ampi rispettivamente:  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ . Dopo aver tracciato la bisettrice AC dell'angolo in A, si constata che anche il triangolo ABC ha gli angoli interni di ampiezza  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e perciò è simile al triangolo OAB. Ne discende che si ha:

$$\overline{OB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{CB}.$$

Il che è sufficiente per ritenere conclusa la dimostrazione.

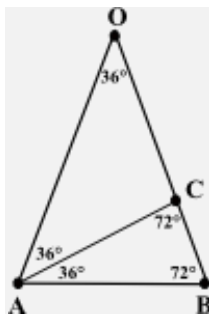


FIG. 9

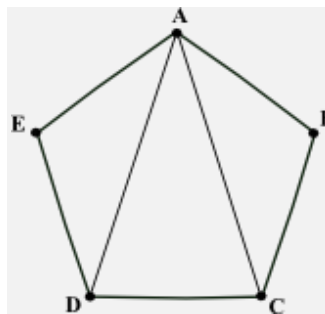


FIG. 10

• Ai Greci, quasi certamente ancora ai Pitagorici, è dovuta la costruzione del pentagono regolare inscritto in un cerchio, ovviamente con riga e compasso. La cosa è banale una volta che si sa costruire il decagono, ma i Greci ne proposero una costruzione diretta, con un procedimento che peraltro ricorda molto da vicino quello esposto sopra per il decagono (Euclide, *Elementi*, IV, 11).

Ma soprattutto i Pitagorici (**Ippaso** di Metaponto, secondo i più) scoprirono il seguente teorema.

◆ **TEOREMA 2. Il lato del pentagono regolare è la sezione aurea della diagonale.**

**DIMOSTRAZIONE.** Per la dimostrazione, condotta sulla base delle nostre conoscenze (in realtà non sap-

<sup>5</sup> Ci corre l'obbligo di precisare che alcuni autori chiamano "numero aureo" il rapporto fra la sezione aurea di un segmento e lo stesso segmento, vale a dire il numero che noi abbiamo indicato con  $\alpha$ .

priamo quale dimostrazione abbiano proposto i Pitagorici, anche se conosciamo quella di Euclide: *Elementi*, XIII, 8), riferiamoci al pentagono regolare ABCDE (Fig. 10). Una volta tracciate le sue diagonali AC e AD, uguali fra loro, basta constatare che l'angolo  $\widehat{CAD}$  è la terza parte dell'angolo  $\widehat{BAE}$ , la cui misura è  $108^\circ$ ; ragion per cui  $\widehat{CAD}=36^\circ$ . Ci riconduciamo così alla medesima dimostrazione del precedente teorema 1 e possiamo concludere che CD è sezione aurea di AC. [c.v.d.]

- Ci sembra utile fornire l'enunciato di un interessante teorema, ancorché non legato al concetto di sezione aurea ma in stretta connessione con i poligoni regolari inscritti in un cerchio (Euclide, *Elementi*, XIII, 10). Si tratta di un teorema che va certamente al di là di ogni intuizione elementare.

◆ **TEOREMA 3. I lati del pentagono regolare, dell'esagono regolare e del decagono regolare inscritti in un cerchio sono nell'ordine l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo.**

Sulla base dei due teoremi precedenti è possibile determinare le lunghezze dei lati  $L_{10}$  del decagono regolare ed  $L_5$  del pentagono regolare inscritti in un cerchio di raggio assegnato  $r$ . Si ha per la precisione:

$$L_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1), \quad L_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Te ne proponiamo la dimostrazione. È un buon esercizio per verificare la tua abilità nel calcolo, in particolare in quello con i radicali quadratici.

### 31.5 RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AD UN TRIANGOLO

Il raggio  $R$  del cerchio circoscritto ad un triangolo di lati  $a, b, c$  ed area  $A$  è dato dalla formula seguente:

$$R = \frac{abc}{4A}.$$

Alla dimostrazione accenniamo soltanto, lasciando a te il compito di completarla, dopo aver disegnato la figura relativa. Considerato allora il cerchio circoscritto al triangolo ABC, si traccia il diametro AD del cerchio e l'altezza AH del triangolo. I due triangoli ACD e AHB sono simili perché ... . Quindi:  $\overline{AD} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ , da cui segue ... . E infine la formula cercata.

### 31.6 PROBLEMI RISOLTI

**31.6.1 PROBLEMA RISOLTO 1.** Il rapporto tra la base e l'altezza di un triangolo isoscele è  $8/3$  e il lato obliquo è lungo  $a$ . Determinare a quale distanza dal vertice del triangolo occorre condurre una retta parallela alla base in modo che il triangolo ed il trapezio ottenuti abbiano lo stesso perimetro.

RISOLUZIONE. Detto ABC il triangolo assegnato (Fig. 11), per i dati del problema si ha:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = a, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{8}{3}.$$

Poiché  $BC = 2 BH$ , si ha pure  $\overline{AH} = \frac{3}{8}\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{BH}$  e pertanto, applicando il teorema di Pitagora al triangolo

rettangolo AHB, si ottiene:  $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{\frac{9}{16}\overline{BH}^2 + \overline{BH}^2} = \frac{5}{4}\overline{BH}$ ; quindi:  $\frac{5}{4}\overline{BH} = a$ , da cui segue:

$$\overline{BH} = \frac{4}{5}a, \text{ e perciò: } \overline{AH} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{3}{5}a, \quad \overline{BC} = \frac{8}{5}a.$$

Chiamata ora DE una corda del triangolo ABC parallela a BC e indicato con K il punto in cui essa interseca AH, dobbiamo determinare AK in modo che sia:

$$2AD + DE = 2BD + DE + BC, \text{ cioè: } 2AD = 2(AB - AD) + BC, \text{ o anche: } 4AD = 2AB + BC, \text{ ossia:}$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{4}(2\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{4}\left(2a + \frac{8}{5}a\right) = \frac{9}{10}a.$$

D'altronde, per l'evidente similitudine dei triangoli ABH e ADK si ha:

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AH} : \overline{AK};$$

da cui segue:  $\overline{AK} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{9}{10}a \cdot \frac{3}{5}a}{a} = \frac{27}{50}a.$

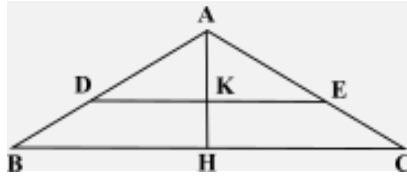


FIG. 11

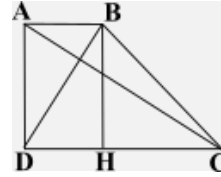


FIG. 12

**31.6.2** PROBLEMA RISOLTO 2. Un trapezio rettangolo ha le diagonali perpendicolari e la sua area e la sua altezza sono rispettivamente  $\frac{50}{3}a^2$  e  $4a$ , essendo  $a$  una lunghezza assegnata. Dopo aver mostrato che l'altezza del trapezio è media proporzionale tra le basi, calcolarne il perimetro.

RISOLUZIONE <sup>(6)</sup>. Considerato il trapezio rettangolo ABCD in cui le diagonali AC e BD sono perpendicolari (Fig. 12), i due triangoli rettangoli ABD e CDA risultano simili poiché hanno gli angoli  $\widehat{ADB}$  e  $\widehat{DCA}$  congruenti perché complementari dell'angolo  $\widehat{BDC}$ ; i loro lati omologhi sono perciò in proporzione. In particolare:

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{DC}.$$

Per i dati del problema si ha  $\overline{AD} = 4a$  e  $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{AD} = \frac{50}{3}a^2$ , da cui segue  $\overline{AB} + \overline{DC} = \frac{25}{3}a$ . Inoltre, per la proporzione precedente:  $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 16a^2$ . Si tratta perciò di risolvere il seguente sistema nelle incognite  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$ :

$$\begin{cases} \overline{AB} + \overline{DC} = \frac{25}{3}a \\ \overline{AB} \cdot \overline{DC} = 16a^2 \end{cases}$$

Si trova:

$$\overline{AB} = 3a, \quad \overline{DC} = \frac{16}{3}a.$$

Detta adesso H la proiezione ortogonale di B su DC e osservato che:  $\overline{BH} = \overline{AD} = 4a$ ,  $\overline{HC} = \overline{DC} - \overline{AB} = \frac{7}{3}a$ , applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHC si trova:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{16a^2 + \frac{49}{9}a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{193}.$$

Infine, detto P il perimetro del trapezio, si ottiene:

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 3a + \frac{a}{3}\sqrt{193} + \frac{16}{3}a + 4a = \frac{a}{3}(37 + \sqrt{193}).$$

**31.6.3** PROBLEMA RISOLTO 3. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, lungo  $2r$ , sia C il punto della semiretta di origine A passante per B tale che AC sia lungo  $3r$ . Condotta per C la secante s alla semicircon-

<sup>6</sup> Bisogna saper risolvere equazioni e sistemi di 2° grado.



ferenza in modo che su di essa venga intercettata la corda MN lunga r, calcolare l'area del quadrilatero convesso ABNM.

RISOLUZIONE <sup>(7)</sup>. Con riferimento alla figura 13, si ha evidentemente:

$$A(ABNM) = A(ACM) - A(BCN) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{MH} - \frac{1}{2} \overline{CN} \cdot \overline{BK}.$$

Per cui occorre conoscere le misure dei segmenti AC, MH, CN, BK.

In base ai dati del problema risulta:  $\overline{CM} - \overline{CN} = \overline{MN} = r$ ,  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = r$ .

Per il teorema delle secanti si ha:  $\overline{CA} \cdot \overline{CM} = \overline{CN} \cdot \overline{CB}$  da cui:  $\overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 3r^2$ .

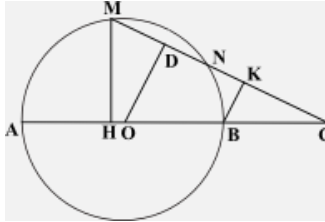


FIG. 13

Risolvendo allora il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{CM} - \overline{CN} = r \\ \overline{CM} \cdot \overline{CN} = 3r^2 \end{cases}$$

si trova:  $\overline{CN} = \frac{r}{2}(\sqrt{13} - 1)$ ,  $\overline{CM} = \frac{r}{2}(\sqrt{13} + 1)$ .

Indicato adesso con O il centro della semicirconferenza, detta D la sua proiezione ortogonale su MN e osservato che  $\overline{MD} = \overline{DN} = \frac{r}{2}$ , applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODN, si ottiene:

$$\overline{OD} = \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{DN}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Poiché i due triangoli rettangoli MHC e ODC sono simili per avere l'angolo di vertice C in comune, i loro lati omologhi sono in proporzione. In particolare  $\overline{MH} : \overline{OD} = \overline{CM} : \overline{OC}$ , da cui, essendo  $\overline{OC} = 2r$ , segue:

$$\overline{MH} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{CM}}{\overline{OC}} = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2}(\sqrt{13} + 1)}{2r} = \frac{r}{8}(\sqrt{39} + \sqrt{3}).$$

Parimenti risultano simili i due triangoli rettangoli BKC e ODC; perciò  $\overline{BK} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{OC}$ , da cui segue:

$$\overline{BK} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot r}{2r} = \frac{r}{4}\sqrt{3}.$$

Infine, a conti fatti:

$$A(ABNM) = \frac{r^2}{8}(\sqrt{39} + 2\sqrt{3}).$$

**31.6.4 PROBLEMA RISOLTO 4.** Due circonferenze, di centri H ed O, sono tangenti esternamente nel punto T. La circonferenza di centro H ha raggio r, quella di centro O ha raggio  $3r/2$ . Una retta s per T, formante un angolo di  $30^\circ$  con la retta OH, seca la circonferenza maggiore in A e la minore in R. Considerati il diametro AB della circonferenza maggiore ed il diametro RS della minore: 1) dimostrare che il quadrilatero ABRS è un trapezio; 2) di esso calcolare perimetro ed area.

<sup>7</sup> Vedi nota precedente.

RISOLUZIONE. La circonferenza maggiore può essere pensata come la trasformata della minore mediante l'omotetia di centro T e di caratteristica  $-3/2$  (Fig. 14). Questa omotetia associa il punto O al punto H e il punto A al punto R; di conseguenza associa la retta AO (cioè AB) alla retta RH (cioè RS) ed il punto B al punto S.

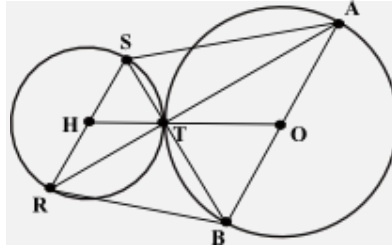


FIG. 14

Siccome un'omotetia trasforma una retta in una retta parallela, possiamo concludere che  $AB \parallel RS$  e, pertanto, che il quadrilatero ABRS è un trapezio di basi AB e RS. In tale trapezio si ha:  $\overline{AB} = 3r$ ,  $\overline{RS} = 2r$ .

Osserviamo, poi, che gli angoli  $\widehat{ATB}$  ed  $\widehat{RTS}$  sono retti, perciò sono pure retti gli angoli  $\widehat{ATS}$  e  $\widehat{BTR}$ . Ai fini del calcolo dell'area del trapezio, è sufficiente conoscere le lunghezze delle diagonali perpendicolari AR e BS. Intanto, in virtù dell'omotetia suddetta, risulta:

$$\overline{AT} = \frac{3}{2} \overline{TR}, \quad \overline{BT} = \frac{3}{2} \overline{TS}.$$

Calcoliamo allora TR e TS. Per questo consideriamo il triangolo HTS: esso è isoscele sulla base TS, con  $\widehat{HTS} = 60^\circ$ ; quindi è equilatero. Pertanto TS è lungo r. Di conseguenza, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo RTS, si trova:  $\overline{TR} = r\sqrt{3}$ . Dunque:  $\overline{AT} = \frac{3}{2}r\sqrt{3}$ ,  $\overline{BT} = \frac{3}{2}r$ . Cosicché:

$$\overline{AR} = \overline{AT} + \overline{TR} = \frac{3}{2}r\sqrt{3} + r\sqrt{3} = \frac{5}{2}r\sqrt{3}, \quad \overline{BS} = \overline{BT} + \overline{TS} = \frac{3}{2}r + r = \frac{5}{2}r.$$

In definitiva, l'area A del trapezio – pensato, l'abbiamo già detto, come quadrilatero con le diagonali perpendicolari – è:

$$A = \frac{1}{2} \overline{AR} \cdot \overline{BS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}r\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2}r = \frac{25}{8}r^2\sqrt{3}.$$

Per calcolare il perimetro del trapezio, bisogna conoscere le lunghezze dei suoi lati obliqui AS e BR. Questo si ottiene facilmente. Ne lasciamo il compito a te. Si trova:

$$\overline{AS} = \frac{r}{2}\sqrt{31}, \quad \overline{BR} = \frac{r}{2}\sqrt{21}.$$

In conclusione, il perimetro P del trapezio è: ...

## VERIFICHE <sup>(8)</sup>

### Problemi di dimostrazione (nn. 1-6)

- Siano c e c' due circonferenze secanti. Per un punto della retta dei loro punti comuni, preso esternamente alle due circonferenze, si conducano due segmenti, uno tangente a c ed uno tangente a c'. Si dimostri che tali segmenti sono congruenti.

<sup>8</sup> I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

2.  $\textcircled{R}$  In un triangolo rettangolo un cateto è lungo il doppio dell'altro. Condotta la bisettrice del maggiore dei due angoli acuti del triangolo, dimostrare, con un procedimento analitico, che il minore dei segmenti in cui detta bisettrice divide il cateto maggiore è sezione aurea del cateto minore. Provare inoltre a condurre anche una dimostrazione esclusivamente con considerazioni di geometria sintetica.
3. Sia ABCD un quadrilatero convesso tale che i triangoli DAC e DBC sono congruenti in modo che i loro vertici si corrispondano secondo la seguente tabella:  $\begin{bmatrix} D & A & C \\ C & B & D \end{bmatrix}$ . Indicata con E l'intersezione delle sue diagonali, dimostrare che:
- 1) i triangoli AED e BEC sono simili;
  - 2) lo sono pure i triangoli AEB e DEC.
4. Considerato un trapezio isoscele, si tracci la congiungente i punti medi dei due lati obliqui e si prendano in esame i due trapezi isosceli in cui viene diviso il trapezio dato. Si può affermare che i trapezi ottenuti sono simili al trapezio dato?
5. Considerato un parallelogramma ABCD, si tracci una circonferenza che passi per A ed intersechi ulteriormente i segmenti AB, AC, AD rispettivamente nei punti B', C', D'. Giustificare che i due triangoli ABC e B'C'D' sono simili.
6. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A, si chiami P un punto del cateto AC ed M il punto medio di BC. Si conduca per M la perpendicolare alla retta PM e si supponga che il punto Q, in cui essa interseca la retta AB, sia interno al cateto AB. Dopo aver dimostrato che il quadrilatero APMQ è inscritto in un cerchio, dimostrare che il triangolo MPQ è simile al triangolo ABC.  
[R. La costruzione chiave per la dimostrazione della similitudine dei due triangoli MPQ ed ABC è quella della mediana MA del triangolo ABC. È poi importante constatare che il triangolo MAB è isoscele. Ne consegue che gli angoli  $\widehat{MPQ}$  ed  $\widehat{MBQ}$  sono congruenti giacché congruenti all'angolo  $\widehat{MAQ}$ ]

**Problemi di determinazione** <sup>(9)</sup>:

7. I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 3a e 4a, essendo a una lunghezza assegnata. Calcolare le lunghezze delle due parti in cui la bisettrice dell'angolo retto divide l'ipotenusa.  
[R.  $\frac{15}{7}a, \frac{20}{7}a$ ]
8. La base propriamente detta di un triangolo isoscele e l'altezza relativa ad essa misurano rispettivamente 66 cm e 44 cm. Determinare:
- a) l'altezza del triangolo relativa ad uno dei lati uguali;
  - b) le due parti in cui la bisettrice di uno degli angoli alla base divide il lato opposto.
- [R. 52,8 cm; 25 cm, 30 cm]
9. Il segmento che unisce i punti medi dei lati maggiori di un rettangolo divide il rettangolo medesimo in due rettangoli simili ad esso. Sapendo che il perimetro del rettangolo dato è 2p, essendo p una lunghezza assegnata, calcolare la sua area.  
[R.  $p^2(3\sqrt{2}-4)$ ]
10. Una corda di un cerchio, lunga 10a, essendo a una lunghezza assegnata, ne interseca un'altra divi-

<sup>9</sup> **NOTA BENE.** Qualche problema ha come risolvente un'equazione di 2° grado o un'equazione in cui l'incognita figura sotto il segno di radice quadrata. In tal caso ci sono due possibilità: a) l'argomento è già stato studiato e la risoluzione del problema non presenta difficoltà; b) l'argomento non è stato ancora studiato e perciò la risoluzione deve essere provvisoriamente accantonata.

dendola in due parti di lunghezze  $2a$  e  $12a$ . Calcolare le lunghezze delle due parti in cui resta divisa la prima corda dal punto intersezione. [R. 4a, 6a]

11. Da un punto  $P$  esterno ad un cerchio di centro  $O$  si conducono una tangente  $PT$  ed una secante  $PA$ , lunghe rispettivamente  $4$  cm e  $8$  cm. La parte esterna della secante è il segmento  $PB$ . Calcolarne la lunghezza di  $AB$ . Successivamente, posto che il raggio del cerchio misuri  $5$  cm e il punto  $A$  sia situato dalla parte opposta di  $T$  rispetto alla parallela a  $PT$  condotta per  $O$ , calcolare l'area del quadrilatero convesso  $PBOT$ . [R. 6 cm;  $14$  cm<sup>2</sup>]
12. Considerata una circonferenza  $c$  di centro  $O$  e raggio  $r$ , sia  $t$  la tangente ad essa in un suo punto  $T$ . Detto  $P$  un punto di  $c$  la cui distanza da  $t$  sia  $3r/2$ , si chiami  $R$  l'intersezione delle rette  $PO$  e  $t$ . Si calcoli il perimetro e l'area del triangolo  $PTR$ . [R.  $r(3+2\sqrt{3})$ ,  $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$ ]
13. Il perimetro del triangolo rettangolo  $ABC$  ed il cateto  $AB$  sono lunghi rispettivamente  $12a$  e  $3a$ , essendo a una lunghezza assegnata. Detti  $M$  ed  $N$  due punti rispettivamente del cateto  $AB$  e del cateto  $AC$  tali che  $AM$  ed  $AN$  siano due lati consecutivi di un quadrato inscritto nel triangolo, calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero  $MBCN$ . [R.  $\frac{12}{7}a(5+\sqrt{2})$ ,  $\frac{222}{49}a^2$ ]
14. L'ipotenusa e l'altezza ad essa relativa di un triangolo rettangolo sono lunghe rispettivamente  $a$ ,  $b$ . Dimostrare che il quadrato inscritto nel triangolo in modo che un suo lato sia contenuto nell'ipotenusa ha lato lungo  $c$  tale che:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Dimostrare che la medesima relazione vale se  $a$ ,  $b$  sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo e  $c$  è la lunghezza del lato del quadrato inscritto in esso in modo che un suo angolo coincida con l'angolo retto del triangolo.

15. Nel trapezio  $ABCD$  il lato  $AD$  e la diagonale  $AC$ , fra loro perpendicolari, sono direttamente proporzionali ai numeri  $3$  e  $4$ . Sapendo che il perimetro e l'altezza del trapezio misurano rispettivamente  $128$  cm e  $24$  cm, calcolare le misure della base minore  $AB$  e del lato obliquo  $BC$  del trapezio, sapendo che  $AB > 5$  cm. Calcolare inoltre le misure dei segmenti in cui si dividono reciprocamente le sue diagonali. [R.  $\overline{AB} = 22$  cm,  $\overline{BC} = 26$  cm; ...]
16. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura  $12$  m. Una corda del triangolo, parallela all'ipotenusa, lo divide in due poligoni equivalenti. Dire se i dati assegnati sono sufficienti o no per risolvere la seguente questione:  
 1) Calcolare le due parti in cui l'altezza relativa all'ipotenusa è divisa dalla corda.  
 2) Calcolare la lunghezza della corda.
17. Il lato obliquo di un trapezio rettangolo è lungo  $a$  e l'angolo che esso forma con la base maggiore misura  $60^\circ$ . Determinare le lunghezze delle basi del trapezio sapendo che il triangolo avente per vertici gli estremi della base maggiore e il punto intersezione delle rette dei lati non paralleli ha perimetro  $2a(3+\sqrt{3})$ . Calcolare inoltre le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio resta diviso dalle sue diagonali. [R.  $3a/2$ ,  $2a$ ; ...]
18. Il perimetro del triangolo rettangolo  $ABC$  è  $24a$  e il cateto  $AB$  è lungo  $6a$ , essendo a una lunghezza assegnata. Detto  $P$  il punto dell'ipotenusa  $BC$  tale che  $PC$  sia lungo  $4a$ , condurre per  $P$  la perpendicolare a  $BC$  fino ad intersecare in  $Q$  la retta  $AB$ . Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero  $AQCP$ . [R.  $\frac{8}{5}a(5+4\sqrt{5})$ ,  $\frac{128}{5}a^2$ ]
19. Nel trapezio  $ABCD$  il lato obliquo  $AD$ , lungo  $5a$ , essendo a una lunghezza assegnata, è perpendicolare alla diagonale  $AC$ , lunga  $20a/3$ . Calcolare l'area e il perimetro del trapezio. Inoltre, condotta

per A la perpendicolare alla retta BD fino ad intersecare la retta DC in E, calcolare la lunghezza del segmento AE. [R.  $\frac{82}{3}a^2, \frac{68}{3}a; \dots$ ]

20. I lati obliqui di un trapezio circoscritto ad un semicerchio sono lunghi 10 h e 17 h e il perimetro del trapezio è 60 h, essendo h una lunghezza assegnata. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero convesso avente per vertici i punti di contatto del semicerchio con i lati obliqui del trapezio, il centro del semicerchio e il punto intersezione dei prolungamenti dei suddetti lati obliqui. [R.  $\frac{208}{7}h, \frac{384}{7}h^2$ ]
21. L'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC è lunga a. Condotta per C la parallela t ad AB, si dica M la proiezione ortogonale di B su t ed N l'intersezione di t con la parallela a BC condotta per A. Si calcoli il perimetro del triangolo ABC sapendo che il quadrilatero convesso ABMN è equivalente ad un rettangolo avente per dimensioni  $\frac{a}{2}\sqrt{5}$  ed una lunghezza uguale a quella di AB. [R.  $\frac{a}{3}(5+\sqrt{5})$ ]
22. Il cateto AC del triangolo ABC, rettangolo in A, è lungo h. Detto D il punto dell'ipotenusa tale che  $\widehat{CAD}=30^\circ$ , si sa che  $AD=DB$ . Trovare i lati incogniti del triangolo. Calcolare inoltre il perimetro di un secondo triangolo di area  $h^2\sqrt{3}$ , sapendo che è simile al primo. [R.  $\frac{h}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}h\sqrt{3}; h(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$ ]
23. Un trapezio rettangolo ha le diagonali perpendicolari e le sue basi sono lunghe 2b e 8b, essendo b una lunghezza assegnata. Dopo aver dimostrato che il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del trapezio è un rettangolo, calcolarne area e perimetro. [R.  $10b^2, 6b\sqrt{5}$ ]
24. La somma dei lati obliqui di un trapezio circoscrivibile ad un cerchio è 189a, essendo a una lunghezza assegnata, e le proiezioni ortogonali di tali lati sulla base maggiore del trapezio sono 42a e 105a. Considerato il triangolo avente per vertici gli estremi della base minore e l'intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui del trapezio, calcolarne perimetro ed area. [R. 48 a, 84 a<sup>2</sup>]
25. Considerata una semicirconferenza di diametro AB lungo 2r, essendo r una lunghezza assegnata, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto P e si conduca per esso la tangente alla semicirconferenza, indicando con C il punto di contatto e con H la proiezione di C su AB. Sapendo che  $4 CH=3 HP$ , si calcoli perimetro ed area del triangolo PCH. [R.  $\frac{16}{5}r, \frac{32}{75}r^2$ ]
26. Considerata una circonferenza di diametro AB lungo 2r e centro O, sia C un punto della retta tangente ad essa in B tale che  $AC\sqrt{13}=5 OC$ . Determinare sulla semicirconferenza che si trova nel semipiano di origine AB e non contenente C, un punto D in modo che il quadrilatero ACBD sia un trapezio e di esso calcolare l'area. Inoltre, detto E l'ulteriore punto in cui la retta AC interseca la circonferenza, calcolare le aree delle due parti in cui il trapezio suddetto è diviso dalla retta ED. [R.  $\overline{AD}=\frac{6}{5}r, A(ACBD)=\frac{123}{50}r^2; \dots$ ]
27. La base maggiore AB e l'altezza AD del trapezio rettangolo ABCD sono lunghe  $a\sqrt{2}$  ed a rispettivamente; inoltre la base minore è congruente al lato obliquo. Detto E il punto in cui si intersecano le rette dei lati non paralleli del trapezio, calcolare il perimetro del triangolo EDC. [R.  $3a(\sqrt{2}+1)$ ]
28. ® Nel triangolo rettangolo ABC i cateti AB e AC sono lunghi rispettivamente 12 b e 16 b, dove b è una lunghezza assegnata. Indicato con P il punto del cateto AC tale che AP è lungo 5 b e chiamato M il punto medio dell'ipotenusa, sia Q l'intersezione del cateto AB con la perpendicolare a PM condotta per M.
- 1) Provare che il quadrilatero APMQ è inscritto in una circonferenza c.
  - 2) Detto N l'ulteriore punto in cui c interseca BC, calcolare l'area del pentagono APNMQ.
  - 3) Calcolare infine l'area del pentagono trasformato di quello suddetto nell'omotetia di centro A e di caratteristica  $-1/2$ .

$$\left[ \mathbf{R.} 1) \dots; 2) A(\text{APNMQ}) = \frac{1527}{25} b^2; 3) \dots \right]$$

29. Calcolare il perimetro e l'area di un decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio  $r$ . Calcolare inoltre l'area di un decagono regolare di lato lungo  $L$ .

$$\left[ \mathbf{R.} 5r(\sqrt{5}-1), \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \frac{5}{2}L^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} \right]$$

30. Calcolare il perimetro e l'area di un pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio  $r$ . Calcolare inoltre l'area di un pentagono regolare di lato lungo  $L$ .

$$\left[ \mathbf{R.} \frac{5}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \frac{L^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \right]$$

31. Un televisore di 17 pollici ha la forma di un rettangolo aureo. Trovare le misure dei suoi lati, approssimate al millimetro.

[Ricorda che: a) 1 pollice = 2,54 cm; b) dire che un televisore è di "17 pollici" significa che la diagonale del suo schermo è lunga 17 pollici. **R.** 36,7 cm; 22,7 cm]

32. Un trapezio rettangolo ha l'altezza uguale a  $24a$  e l'area uguale a  $984a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza data; inoltre il suo lato obliquo è perpendicolare alla diagonale minore ed è maggiore di essa. Un altro trapezio, simile al primo, ha il perimetro uguale a  $17a$ . Calcolare l'area di questo secondo trapezio.

$$\left[ \mathbf{R.} 123 a^2/8 \right]$$

33. Una corda di un triangolo, parallela ad un lato, divide il triangolo in due poligoni equivalenti. Calcolare il rapporto tra il maggiore ed il minore dei due segmenti in cui è divisa, da quella corda, l'altezza del triangolo perpendicolare ad essa.

$$\left[ \mathbf{R.} \sqrt{2}+1 \right]$$

34. In un cerchio di centro  $O$  e raggio  $r$  sono assegnate due corde,  $AB$  lunga  $6r/5$  e  $CD$  lunga  $3r/5$ , in modo che i loro prolungamenti s'intersechino nel punto  $E$  tale che il segmento  $DE$  sia lungo  $r$ , essendo  $B$  e  $D$  gli estremi rispettivamente di  $AB$  e  $CD$  più vicini ad  $E$ . Le due corde sono situate da parti opposte rispetto alla retta  $EO$ . Detto  $M$  il punto medio della corda  $AB$ , calcolare il perimetro e l'area del triangolo  $EOM$ .

$$\left[ \mathbf{R.} \frac{r}{5}(11+\sqrt{65}), \frac{14}{25}r^2 \right]$$

35. Da un punto  $P$  esterno ad un cerchio si conducono una tangente  $PT$  ed una secante  $PA$ : la tangente è lunga 12 cm e la secante interseca il cerchio secondo una corda  $AB$  lunga 6 cm. Calcolare la lunghezza della parte esterna della secante.

$$\left[ \mathbf{R.} 3(\sqrt{17}-1) \text{ cm} \right]$$

36. Considerata una circonferenza  $K$  di centro  $O$  e raggio  $r$ , per un punto  $A$ , distante  $5r/2$  da  $O$ , si conduca una secante che la intersechi nei punti  $B, C$  tali che  $BC$  sia il lato di un triangolo equilatero inscritto in  $K$ . Si calcolino le aree dei due triangoli  $AOB$  ed  $AOC$ .

$$\left[ \mathbf{R.} \frac{r^2}{8}(2\sqrt{6}\pm\sqrt{3}) \right]$$

37. Il cateto  $OB$  e l'altezza  $OH$  relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo  $AOB$  sono lunghi rispettivamente  $4a$  e  $\frac{12}{5}a$ . Determinare sull'ipotenusa  $AB$  un punto  $P$  in modo che, detti  $M$  ed  $N$  i punti in cui la perpendicolare ad  $AB$  condotta per esso interseca rispettivamente il cateto  $OA$  e il prolungamento del cateto  $OB$ , la somma dei triangoli  $APM$  ed  $MON$  abbia area uguale a  $\frac{54}{41}a^2$ .

$$\left[ \mathbf{R.} \overline{AP} = \frac{45}{41}a \right]$$

38. I cateti  $OA$  ed  $OB$  del triangolo rettangolo  $AOB$  sono lunghi rispettivamente  $4a$  e  $3a$ , essendo  $a$  una lunghezza assegnata. Condotta per  $O$  la parallela ad  $AB$ , determinare un punto  $P$  interno al segmento  $OA$ , tale che, detta  $Q$  l'intersezione della parallela suddetta con la retta  $BP$ , sia uguale a  $3/4$  il rapporto tra l'area del triangolo  $BOQ$  e quella del triangolo  $ABP$ .

$$\left[ \mathbf{R.} \overline{OP} = \frac{4}{3}a \right]$$

39. Il cateto  $AC$  e l'ipotenusa  $BC$  del triangolo rettangolo  $ABC$  sono lunghi rispettivamente  $a\sqrt{3}$  e  $3a$ , essendo  $a$  una lunghezza assegnata. Sulla semicirconferenza di diametro  $BC$ , costruita da parte op-

posta del triangolo, determinare un punto P in modo che, detta M l'intersezione di AP con BC, il rettangolo di dimensioni uguali alle lunghezze dei segmenti AM e PM abbia area uguale a  $\frac{9}{32}\sqrt{2}$  di quella del triangolo ABC.

$$[\text{R. 2 sol.: } \overline{BM}_1 = \frac{3}{4}a, \overline{BM}_2 = \frac{9}{4}a]$$

40. La base e l'altezza di un triangolo isoscele sono lunghe rispettivamente  $3a$  ed  $a$ . Inscrivere nel triangolo un rettangolo con un lato sulla base del triangolo, in modo che la sua area sia  $\frac{5}{12}a^2$  e calcolarne il perimetro. [R 2 sol.:  $16a/3, 8a/3$ ]
41. In un triangolo rettangolo il cateto AB è lungo il doppio del cateto AC. Si prenda sull'ipotenusa BC il punto D tale che  $CD = CA$ . Sapendo che la bisettrice CE del triangolo è lunga  $a\sqrt{5 - \sqrt{5}}$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata, calcolare la lunghezza del segmento BD. Dopo aver verificato che BD è sezione aurea di AB, fornire una dimostrazione sintetica di questo fatto.
42. In un dato rettangolo si ritagliano 4 quadranti di cerchio aventi i centri nei vertici del rettangolo e raggi uguali di lunghezza 1 m. La parte rimanente di uno dei lati minori del rettangolo è sezione aurea della parte rimanente di uno dei lati maggiori. Calcolare l'area del rettangolo sapendo che il suo perimetro è  $2(\sqrt{5}+1)$  m. [R.  $4(\sqrt{5}+1)$  m<sup>2</sup>]
43. I cateti AB e AC del triangolo rettangolo ABC misurano rispettivamente 3 m e 4 m. Siano inoltre: D il punto in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il lato BC, K il circocentro del triangolo ed I il suo incentro. Ed ancora, siano R ed r i raggi dei cerchi rispettivamente circoscritto e inscritto nel triangolo.
- Calcolare le misure dei raggi R ed r e della bisettrice AD.
  - Verificare che risulta:  $\overline{IK}^2 = R(R - 2r)$ .
  - In realtà, questa relazione da verificare vale per ogni triangolo. Dimostrarlo nel caso di un triangolo isoscele.

$$[\text{R. a) } \frac{5}{2} \text{ m, } 1 \text{ m, } \frac{15}{7} \text{ m; b) } IK = \frac{5}{4} \text{ m; c) ...}]$$

### UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

#### DOMANDE.

- Quale significato bisogna attribuire al fatto che il segmento AB è medio proporzionale fra i segmenti CD ed EF?
- Nel triangolo ABC il lato BC è diviso dall'altezza relativa ad esso, lunga 5 cm, in due parti lunghe 3 cm e 4 cm. È possibile che il triangolo sia rettangolo?
- I lati CA e CB del triangolo ABC misurano rispettivamente 15 cm e 20 cm. È possibile che sul lato AB ci sia un punto P che, a partire da A, lo divida internamente in due parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, in modo che la retta CP bisechi l'angolo  $\widehat{ACB}$ ?
- Qual è l'enunciato del teorema cosiddetto della tangente e della secante?
- Cosa s'intende per parte aurea di un segmento?
- Cos'è il numero aureo? È maggiore o minore di 1?
- Quale relazione sussiste fra il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio e il raggio del cerchio?
- Cos'è un rettangolo aureo?

9. Il segmento che congiunge i punti medi dei lati maggiori di un rettangolo divide il rettangolo medesimo in due rettangoli uguali fra loro e simili al rettangolo dato. Qual è il rapporto fra la dimensione maggiore e la dimensione minore di uno qualsiasi dei tre rettangoli?

**RISPOSTE.**

1. Significa semplicemente che vale la proporzione  $\overline{CD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{EF}$ .
2. No. Infatti il prodotto delle misure delle due parti in cui l'altezza divide il lato BC è diverso dal quadrato dell'altezza stessa. Per cui il triangolo non può essere rettangolo in A. D'altronde, cosa che si trova agevolmente, BC è il lato maggiore, per cui non può essere rettangolo in alcun altro vertice.
3. A troppe condizioni deve sottostare il punto P, rese incompatibili dal teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo: o le due parti AP e PB sono direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, ma senza che la retta CP sia bisettrice dell'angolo  $\widehat{ACB}$ ; oppure questa retta è bisettrice di quell'angolo, ma senza che quelle due parti siano direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, dal momento che, proprio in virtù del teorema della bisettrice, devono essere direttamente proporzionali ai numeri 15 e 20, che è come dire ai numeri 3 e 4.
4. Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono una tangente ed una secante, la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.
5. È la parte del segmento che risulta essere media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente.
6. È il rapporto fra un segmento e la sua parte aurea. Evidentemente è maggiore di 1.
7. Il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la parte aurea del raggio.
8. È un rettangolo in cui il lato minore è parte aurea del maggiore.
9. Trattandosi di rettangoli simili il rapporto richiesto è lo stesso per qualunque dei tre rettangoli. Se ora indichiamo con a la dimensione maggiore e con b quella minore del rettangolo assegnato, tenendo presente che le dimensioni dei due rettangoli che si ottengono in seguito alla sua suddivisione sono b ed  $a/2$ , deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$a:b=b:\frac{a}{2}$$

da cui segue:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2}.$$

**LETTURA****SEZIONE AUREA E NUMERO AUREO.**

1. Il matematico e astronomo tedesco **Johannes Kepler** (1571-1630), famoso per aver enunciato le tre leggi sui moti dei pianeti, ebbe a fare la seguente suggestiva affermazione: «*La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la "sezione aurea" di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello*».

Ad onor del vero Kepler non usò il termine "sezione aurea" ma "divisione di un segmento in media ed estrema ragione". In effetti, la denominazione di "**sezione aurea**" è abbastanza recente e comunque posteriore a Kepler. Compare infatti per la prima volta nel 1826 in una nota di un'opera del matematico tedesco



**Martin Ohm** (1792-1872)<sup>(10)</sup>, anche se nella nota stessa egli dichiara che il termine non è stato coniato da lui.

Il concetto però e ciò che ne discende risalgono ai Pitagorici e trovano collocazione negli *Elementi* di **Euclide**, il quale risolse il problema della divisione di un segmento in media ed estrema ragione con due procedimenti, uno basato sulla teoria dell'equivalenza (*Elementi*, II, 11) ed uno sulla teoria delle proporzioni (*Elementi*, VI, 30).

Anche il termine “numero aureo” compare nell'opera di Ohm, ma il simbolo  $\phi$  ( $\phi$ , scritto in maiuscolo:  $\Phi$ ) è stato introdotto<sup>(11)</sup> solo agli inizi del XX secolo, sembra in onore dello scultore greco Fidia, che si sarebbe servito del rapporto aureo nella progettazione delle sue opere ed in particolare del Partenone di Atene. In effetti, in tale opera, risalente al IV sec. a.C., la facciata del tempio ed il pavimento sono rettangoli in cui il rapporto fra il lato maggiore e quello minore è, con buona approssimazione, il numero aureo.

Nel XV sec. la denominazione più usata per questo numero, in particolare da **Luca Pacioli**, fu quella di “**divina proporzione**”, poiché si credette di individuare qualcosa di veramente divino nel rapporto fra un segmento e la sua sezione aurea. In effetti, nel 1496 Luca Pacioli compose un'opera dal titolo *De divina proportione*, pubblicata nel 1509, con una sessantina di illustrazioni di Leonardo da Vinci, di cui Pacioli era amico.

La sezione aurea ed il numero aureo compaiono, oltre che in geometria, nell'arte, nella natura e nella vita di tutti i giorni in misura piuttosto frequente e, comunque, più spesso di quanto si possa immaginare. Oltre al citato Partenone, ci limitiamo ad alcuni esempi.

- Nella pittura rinascimentale vi sono molte opere d'arte in cui il numero aureo è presente. Fra esse alcune opere di Leonardo da Vinci (1452-1519) ed in particolare: *l'Uomo di Vitruvio* (Venezia, Gallerie dell'Accademia. Compare su una faccia della moneta italiana di 1 euro), la *Gioconda* (Parigi, Museo del Louvre) e *l'Ultima Cena* (Milano, Santa Maria delle Grazie). E poi la *Venere* di Sandro Botticelli (vero nome: Alessandro di Mariano Filipepi, 1445-1510), allocata a Firenze nella Galleria degli Uffizi.
- Oggigiorno – a riprova del fatto che la sezione aurea ispira un senso estetico non indifferente – esistono numerosi oggetti che hanno, con buona approssimazione, la forma di un rettangolo aureo, come, per esempio: le carte di credito, le tessere sanitarie, le tessere telefoniche<sup>(12)</sup>, la maggior parte dei biglietti da visita e dei manifesti pubblicitari, molte cartoline illustrate.
- Il rapporto aureo è presente anche nelle arti moderne. Ne è un esempio l'opera di **Salvador Dalì** (1904-1989), *Il Sacramento dell'Ultima Cena*, dipinta dentro un rettangolo aureo e conservata a Washington (National Gallery of Art). In effetti le dimensioni del quadro sono 268 cm e 167 cm e, come si può calcolare, il loro rapporto è all'incirca 1,605; pressoché uguale al numero aureo.
- È evidente, sulla base della definizione di rettangolo aureo e di una nota proprietà della sezione aurea (quale?), che se un rettangolo aureo viene diviso in due parti, di cui una è il quadrato costruito sul lato minore, la parte rimanente è ancora un rettangolo aureo.

Suddividendo allora un rettangolo aureo in un quadrato e in un rettangolo aureo e ripetendo la costruzione per il nuovo rettangolo aureo e per quelli che ne conseguono successivamente, si ottiene una figura interessante (Fig. 15).

L'aspetto interessante, in realtà, non è esattamente la figura, ma il fatto che, se si tracciano opportuni archi

<sup>10</sup> Il fratello, **Georg Simon Ohm** (1787-1854), è noto per le famose leggi sulla resistenza elettrica.

<sup>11</sup> L'inglese **Theodore Andrea Cook** (1867-1928), critico d'arte, attribuisce la paternità del simbolo ad un matematico americano di nome **Mark Barr**.

<sup>12</sup> Nelle carte di credito e nelle tessere sanitarie e telefoniche il rapporto fra la dimensione maggiore e la minore è circa 1,590. Molto prossimo al numero aureo.

circolari nei vari quadrati che man mano si ottengono, ne scaturisce una particolare curva chiamata “*spirale logaritmica*” (Fig. 16).

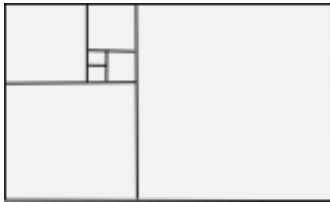


FIG. 15

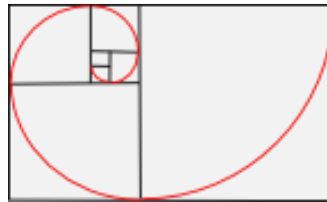


FIG. 16



FIG. 17

Ebbene in natura esiste un mollusco cefalopode dei mari tropicali, il Nautilo, oggi quasi estinto, la cui conchiglia ricorda in sezione proprio la spirale logaritmica (Fig. 17).

Ricordano la spirale logaritmica anche certe scale a chiocciola, osservate verticalmente dal basso o dall’alto.

- Ti proponiamo un paio di esercizi.
- a) Si dispongono due rettangoli aurei uguali, uno con il lato più lungo in orizzontale e uno con tale lato in verticale, in modo che le loro basi formino due segmenti adiacenti e rispetto ad esse i due rettangoli siano nello stesso semipiano (Fig. 18). Dimostrare che i vertici A, B, C sono allineati.
- b) È dato il rettangolo aureo ABCD (Fig. 19). Condotta per il vertice C la perpendicolare CE alla diagonale BD, dimostrare che il rettangolo BCFE è un rettangolo aureo.

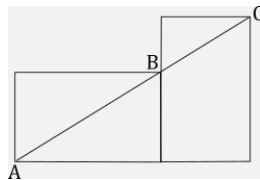


FIG. 18

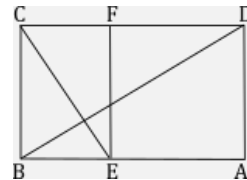


FIG. 19

2. Riprendiamo il pentagono regolare con tutte le sue diagonali. Si evidenzia in esso un particolare quadrilatero: il rombo ABEC (Fig. 20). Esso può essere concepito come l’unione di due particolari figure geometriche basate sulla sezione aurea: il quadrilatero concavo BECD ed il quadrilatero convesso ABDC. Le ampiezze degli angoli di questi due quadrilateri sono facili da calcolare. Se poi indichiamo con L la lunghezza del lato del pentagono, risulta evidentemente:

$$\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CA} = L, \quad \overline{BD} = \overline{ED} = \overline{CD} = \frac{L}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

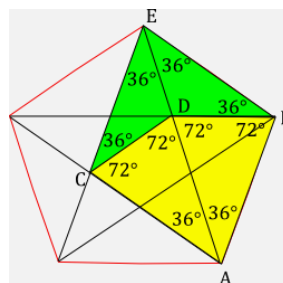


FIG. 20

Ma l’aspetto più interessante delle due figure geometriche che compongono il rombo ABEC è stato scoperto nel 1974 dallo scienziato britannico Roger Penrose (n. 1931). Egli dimostrò che con le due figure suddet-

te, il quadrilatero concavo ABEC (Fig. 21a) chiamato *freccia* e il quadrilatero convesso ABDC (Fig. 21b) chiamato *aquilone*, è possibile ottenere tassellature differenti da quella, banale, che si avrebbe unendo le due figure in modo da formare il rombo.

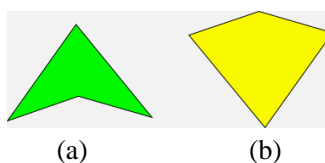


FIG. 21

Un esempio di tali tassellature è visualizzato nella figura sottostante (Fig. 22).

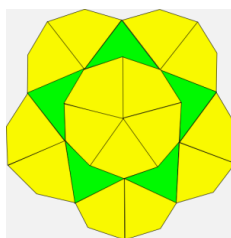


FIG. 22

La lettura di questo paragrafo ci dà l'opportunità di riprendere il discorso sulle tassellature per alcune brevi considerazioni d'ordine generale.

Abbiamo accennato a suo tempo, benché fugacemente <sup>(13)</sup>, alla possibilità di ricoprire un piano (pavimento, parete, ...) con piastrelle uguali aventi forme particolari, senza che ci siano spazi vuoti o sovrapposizioni.

Ogni piastrella, in gergo matematico, è chiamata *tessera*.

Ricordiamo che una tassellatura con tessere aventi la forma di poligoni regolari (uguali) può avvenire solo se i poligoni sono triangoli o quadrati o esagoni.

Quando, come per esempio nei casi appena elencati, la tassellatura avviene utilizzando una sola tessera, che si ripete quante volte è necessario, si ottiene quello che i matematici chiamano *mosaico periodico*.

Quando invece la tassellatura avviene utilizzando tessere di forma diversa, come per esempio le tessere di Penrose, quello che si ottiene si chiama *mosaico non periodico*.

In tutti i mosaici non periodici c'entra in qualche modo la sezione aurea.

Chi ne avesse voglia di farlo, può approfondire questa questione utilizzando i molti materiali esistenti sia in forma cartacea sia pubblicati in rete.

**3.** Concludiamo quest'elenco, peraltro incompleto, delle curiosità riguardanti la sezione aurea, con un problema segnalato da Martin Gardner <sup>(14)</sup>, matematico statunitense, 1914-2010.

**PROBLEMA.** Si considera la cosiddetta croce di Lorena a due bracci (Fig. 23): è formata da 13 quadratini unitari. Tracciare per il punto A una retta che la divida in due parti equivalenti.

<sup>13</sup> Cfr.: Unità 7: Geometria: dal metodo intuitivo al metodo razionale, N° 7.10.9, Laboratorio di matematica, 2.

<sup>14</sup> Cfr.: Martin Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, trad. Mario Carlà, Milano, Edizioni BUR Supersaggi, 1997, pag. 232 e segg.

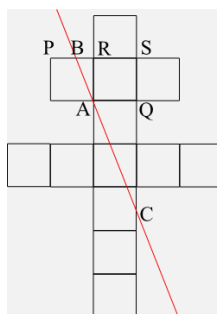


FIG. 23

RISOLUZIONE. Poniamo  $BR=x$  e  $CQ=y$ . Dalla similitudine dei triangoli  $ABR$  e  $ACQ$  segue  $BR:AQ=AR:CQ$ , ossia  $x:1=1:y$ , che è come dire  $xy=1$ .

Prendiamo adesso in esame il triangolo  $BCS$ : delle due parti in cui la retta  $BA$  divide la croce ed esterne a tale triangolo, ci sono 4 quadratini interi da una parte e 4 quadratini interi dall'altra. Questo implica che la retta  $BA$  attraversa 5 dei 13 quadratini che compongono la croce. E siccome la retta  $BA$  biseca la croce medesima, biseca anche questi 5 quadratini. Pertanto l'area del triangolo  $BCS$  è  $5/2$ . Ossia:  $BS \cdot CS=5$ , o anche:  $(x+1)(y+1)=5$ .

Una volta risolto il sistema delle due equazioni:  $xy=1$ ,  $(x+1)(y+1)=5$ , si trova  $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  e pertanto:

$$PB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Come dire che  $B$  divide il lato  $PR$  in media ed estrema ragione.

La determinazione della retta  $BA$  è così compiuta.