Prerequisiti:

- Conoscenza delle proprietà delle figure piane.
- Possedere nozioni di geometria solida (rette e piani nello spazio, diedri, angoloidi).

L'unità è rivolta al 2° biennio del Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze applicate. È rivolta anche agli studenti del Liceo Artistico, che però ne affronteranno lo studio nel 5° anno. È opzionale per gli altri Licei, che eventualmente ne affronteranno lo studio nel 5° anno.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire un prisma retto e un prisma regolare e dimostrarne le caratteristiche*
- *definire una piramide retta e una piramide regolare e dimostrarne le caratteristiche*
- *descrivere le principali proprietà dei poliedri e dei solidi di rotazione*
- *dimostrare che esistono al più 5 poliedri regolari*
- *enunciare e utilizzare la formula di Eulero per i poliedri*

48.1 Cubo e parallelepipedo.
48.2 Prisma.
48.3 Piramide. Tronco di piramide.
48.4 Poliedri. Poliedri regolari.
48.5 Solidi di rotazione.
48.6 Sfera e superficie sferica.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.
Letture.

Solidi geometrici: proprietà.

Unità 48

48.1 CUBO E PARALLELEPIPEDO

48.1.1 Riprendiamo in esame una figura alla quale ormai dovresti essere abituato: il cubo (Fig. 1).
Ricordiamo che i 6 quadrati uguali che lo delimitano sono le sue *facce*. I lati di questi quadrati sono gli *spigoli* del cubo. Sono in numero di 12 e, trattandosi di lati di quadrati uguali, sono essi stessi uguali. Due spigoli come A_1A_2 ed A_8A_7 – paralleli ma non appartenenti ad una stessa faccia – si dicono *opposti*. I vertici delle facce di un cubo sono i *vertici* del cubo. Sono in numero di 8 e si possono ripartire in 4 coppie, mettendo in ogni coppia due vertici non appartenenti alla stessa faccia (come, per esempio: A_1 ed A_7): i due vertici di una stessa coppia si dicono *vertici opposti*. Anche le 6 facce del cubo si possono ripartire in coppie: 3 per la precisione; basta mettere in ogni coppia due facce che non hanno vertici comuni (come, per esempio: $A_1A_2A_3A_4$ e $A_5A_6A_7A_8$): le due facce di una stessa coppia si dicono *facce opposte*.

Con riferimento al cubo di figura 1, ti invitiamo a individuare:
- le 3 coppie di facce opposte;
- le 4 coppie di vertici opposti.

I 12 spigoli del cubo si possono ripartire in 6 coppie di spigoli opposti. Quali sono queste 6 coppie?

Ogni segmento che unisce due vertici opposti di un cubo si chiama ***diagonale*** del cubo. In un cubo vi sono 4 diagonali. Con riferimento al cubo di figura 1, esse sono i segmenti A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6.

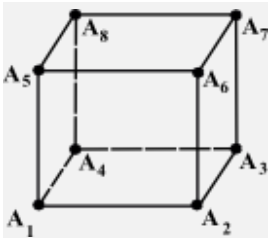

FIG. 1

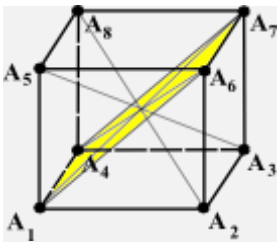

FIG. 2

♦ TEOREMA. Le diagonali di un cubo:
- passano tutte per uno stesso punto che biseca ciascuna di esse (si chiama ***centro*** del cubo);
- sono uguali.

DIMOSTRAZIONE. Soffermiamoci sulla prima parte, dimostrando anzitutto che A_1A_7 e A_4A_6 si bisecano (Fig. 2). A questo riguardo osserviamo che gli spigoli A_1A_4 e A_6A_7, in quanto uguali e paralleli ad A_2A_3, sono uguali e paralleli fra loro. Sono pertanto complanari e individuano un parallelogramma: $A_1A_4A_7A_6$. Siccome in ogni parallelogramma le diagonali si bisecano, possiamo concludere che si bisecano le diagonali A_1A_7 e A_4A_6. Detto allora O il loro punto comune e ragionando in maniera analoga sulle diagonali A_1A_7 e A_2A_8 e successivamente su A_1A_7 e A_3A_5, si può concludere che il punto O biseca pure A_2A_8 e A_3A_5.

Per dimostrare la seconda parte del teorema è sufficiente osservare che il parallelogramma $A_1A_4A_7A_6$ è un rettangolo. In effetti, siccome A_1A_4 è perpendicolare al piano della faccia $A_4A_8A_7A_3$, è, di conseguenza, perpendicolare ad A_4A_7, che giace in questo piano. Poiché le diagonali di un rettangolo sono congruenti, concludiamo che $A_1A_7 \cong A_4A_6$.

Analogamente si ragiona per le altre diagonali del cubo.

48.1.2 I 12 spigoli di un cubo possono essere ripartiti in 3 classi, ciascuna formata da 4 spigoli paralleli tra loro. Se, in maniera del tutto arbitraria, allunghiamo o accorciamo di una stessa lunghezza i 4 spigoli di una delle 3 classi e di un'altra lunghezza quelli di una delle due classi rimanenti, otteniamo un solido geometrico delimitato da 6 rettangoli, due a due congruenti (Fig. 3): si chiama **parallelepipedo rettangolo**.
Un libro, un mattone, uno scatolone sono modelli materiali di parallelepipedi rettangoli.
Avendo ottenuto questo solido in seguito ad una modificazione del cubo, è legittimo presumere che alcune proprietà del cubo vengano a perdersi. D'altronde, potendosi considerare il cubo come un particolare parallelepipedo rettangolo (quello che si ottiene quando l'allungamento degli spigoli è nullo), è lecito aspettarsi che il nuovo solido conservi qualche proprietà del cubo.
In particolare si conserva la proprietà che le diagonali si bisecano e sono uguali.

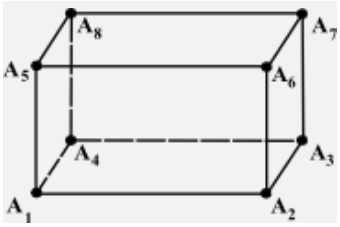

FIG. 3

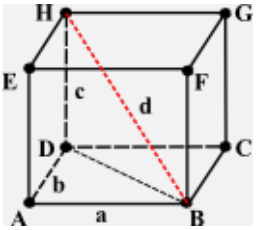

FIG. 4

48.1.3 La lunghezza delle diagonali di un cubo può essere espressa per mezzo delle sue dimensioni.
TEOREMA. Indicate con a, b, c le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo e con d la misura delle sue diagonali, si ha:

$$\mathbf{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il parallelepipedo rettangolo ABCDEFGH (Fig. 4).
In virtù del teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABD, risulta:
$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$, da cui segue: $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$.
Ancora per il teorema di Pitagora, ma applicato al triangolo rettangolo HDB, si ha:
$\overline{HB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{HD}^2$ e perciò: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. [c.v.d.]

Se il parallelepipedo è un cubo, indicata con s la misura dei suoi spigoli, dalla relazione precedente, dove $a=b=c=s$, segue subito: $d^2 = 3s^2$ e pertanto:

$$\mathbf{d = s\sqrt{3}}\,.$$

48.1.4 Ti proponiamo qualche esercizio.

a) Dimostra che, se un piano interseca quattro spigoli paralleli di un parallelepipedo (senza intersecare gli altri spigoli), la sezione del piano col parallelepipedo è un parallelogramma.

b) Dimostra che ogni retta passante per il centro di un parallelepipedo interseca la sua superficie in due punti simmetrici rispetto al centro medesimo.

c) Con riferimento al cubo di figura 4, trova le ampiezze degli angoli del triangolo HDB, espresse in gradi, primi e secondi. [**R**. 90°, 36°55'43", ...]

d) Considerato un cubo di spigolo s, calcola le lunghezze delle due parti in cui una sua diagonale è divisa

dalla perpendicolare ad essa condotta per un vertice che non le appartiene. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{s}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}s\sqrt{3}\right]$

e) Dimostra che in un cubo le proiezioni ortogonali di due vertici opposti su una diagonale che non li contiene dividono la diagonale medesima in tre parti congruenti.

f) Con riferimento al cubo di figura 4, siano M, N, P rispettivamente i punti medi degli spigoli AB, CG, EH. Dimostrare che il triangolo MNP è equilatero e calcolarne l'area sapendo che lo spigolo del cubo è lungo s. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{8}s^2\sqrt{3}\right]$

g) Le diagonali di tre facce disuguali di un parallelepipedo rettangolo hanno le seguenti misure, espresse in metri: 5, $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$. Quanto misura la diagonale del parallelepipedo? $\left[\mathbf{R.}\ 5\sqrt{2}\ \mathrm{m}\right]$

48.2 PRISMA

48.2.1 Il cubo e il parallelepipedo sono particolari solidi geometrici, detti *prismi*. Ci proponiamo di fornire il concetto generale di prisma.

Siano assegnate nello spazio n rette parallele ($n \geq 3$): $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$, considerate nell'ordine scritto e tali che il piano di due qualunque rette consecutive: $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n, a_na_1$, lasci le altre rette in uno solo dei semispazi da esso individuati (Fig. 5 – dove n = 4). L'intersezione dei semispazi aventi come origini i piani suddetti e contenenti le altre rette è una figura solida nota come **prisma indefinito**.

Le n rette che lo determinano si dicono i suoi ***spigoli***; mentre le strisce aventi per lati due spigoli consecutivi si chiamano le ***facce*** del prisma indefinito.

Condotti due piani paralleli in senso stretto, α ed α', i quali sechino tutti gli spigoli di un prisma indefinito (Fig. 6), la parte di questo compresa fra i due piani si dice **prisma finito** (o semplicemente **prisma**) [1].

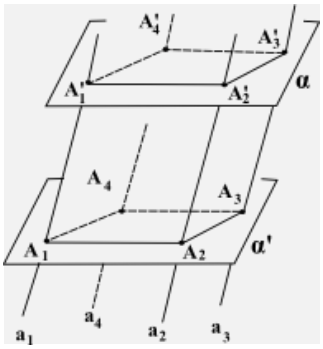

FIG. 5

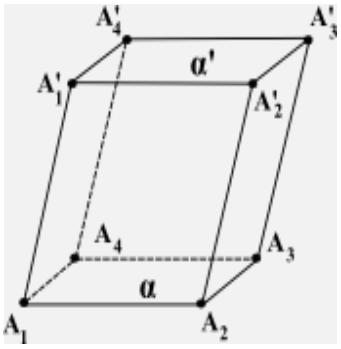

FIG. 6

I poligoni intersezioni di α ed α' col prisma indefinito sono congruenti, come si può dimostrare facilmente: essi si chiamano ***basi*** del prisma finito. La distanza dei loro piani si chiama ***altezza*** del prisma. I vertici dei poligoni si dicono ***vertici*** del prisma.

Le facce laterali di un prisma sono evidentemente dei parallelogrammi.

Un prisma prende il nome dai suoi poligoni di base. In particolare, se essi sono triangoli, quadrilateri, pentagoni, … , il prisma si dice rispettivamente *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, … .

[1] Anche adesso bisognerebbe distinguere tra **prisma convesso** e **prisma concavo**, ma noi ci occupiamo solamente dei prismi del primo tipo.

48.2.2 Nell'insieme dei prismi hanno particolare rilevanza i cosiddetti *prismi retti*. Un prisma si dice ***retto*** se i piani delle sue basi sono perpendicolari agli spigoli laterali (Fig. 7). Un prisma non retto si dice anche ***obliquo*** (Fig. 8).

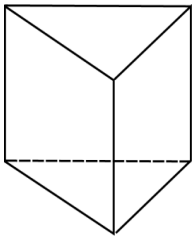

FIG. 7

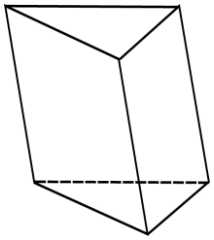

FIG. 8

La caratteristica fondamentale di un prisma retto è di avere come facce laterali dei rettangoli (il che si capisce facilmente).
Inoltre l'altezza di un prisma retto coincide con la lunghezza di un qualsiasi spigolo laterale.
Un prisma, che sia retto e che abbia per basi dei poligoni regolari, si dice ***regolare***.
Il parallelepipedo rettangolo è, in genere, un prisma retto ma non regolare. Infatti le sue basi sono perpendicolari agli spigoli ma di solito sono rettangoli, che non sono poligoni regolari. Se fossero quadrati allora il parallelepipedo sarebbe un prisma regolare.
Il cubo, che è un particolare parallelepipedo rettangolo, è evidentemente un prisma regolare.

48.2.3 Ti proponiamo di risolvere i seguenti esercizi.

a) Dopo aver controllato che un prisma, avente n spigoli laterali, ha 3n angoli diedri, dimostra che la somma delle ampiezze di questi diedri è uguale ad n–1 angoli giri.

b) Considerato un prisma retto, dimostra che ogni faccia laterale è minore:
- della somma delle altre facce laterali;
- della metà dell'area laterale.

48.3 PIRAMIDE. TRONCO DI PIRAMIDE

48.3.1 Un altro tipo di solido geometrico è la **piramide**. Per definirla, consideriamo un angoloide (convesso) Y e un piano α che ne intersechi tutti gli spigoli ma non nel vertice V (Fig. 9). Chiamato Σ il semispazio di origine α contenente V, la figura solida $\Sigma \cap Y$ si dice **piramide**.
Il poligono avente per vertici i punti intersezione di α con gli spigoli dell'angoloide (in figura esso è il quadrilatero ABCD) si dice ***base*** della piramide. Il vertice V dell'angoloide si dice ***vertice della piramide***, mentre i vertici del poligono sezione si dicono ***vertici di base***.
Una piramide, di vertice V e base ABCD, può essere indicata con la scrittura (V,ABCD).
Il segmento VH, condotto perpendicolarmente dal vertice V al piano della base, si chiama ***altezza*** della piramide. Il punto H è il ***piede dell'altezza***.
I triangoli intersezione di Σ con le facce dell'angoloide (in figura essi sono i triangoli VAB, VBC, VCD, VDA) si dicono ***facce laterali*** della piramide.
I lati della base di una piramide si dicono anche ***spigoli di base***. Quelli delle facce laterali, che non siano però spigoli di base, si chiamano ***spigoli laterali***.
Come il prisma, anche la piramide prende il nome dal suo poligono di base. In particolare, se esso è un

triangolo, un quadrilatero, un pentagono, … , la piramide si dice rispettivamente *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, … .
Una piramide triangolare, dunque, oltre ad avere dei triangoli quali facce laterali, ha un triangolo anche per base. Una piramide siffatta si chiama pure ***tetraedro*** [2].

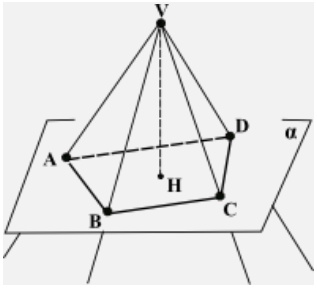

FIG. 9

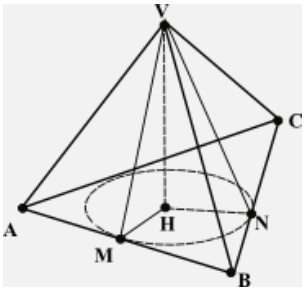

FIG. 10

48.3.2 Nell'insieme delle piramidi hanno particolare interesse le cosiddette *piramidi rette*. Una piramide si dice ***retta*** se la sua base è circoscrivibile ad un cerchio ed il piede della sua altezza coincide col centro del cerchio. Una piramide non retta si dice anche ***obliqua***.

♦ TEOREMA. In ogni piramide retta le altezze delle facce laterali, relative agli spigoli di base, sono congruenti.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo anzitutto che l'altezza di una qualunque faccia laterale, relativa allo spigolo di base, è il segmento congiungente il vertice della piramide col punto di contatto di detto spigolo con il cerchio inscritto nella base della piramide (Fig. 10).
A questo riguardo, chiamato M il punto di contatto dello spigolo AB col cerchio inscritto nella base della piramide, è sufficiente osservare che se dal piede H della perpendicolare VH al piano della base si conduce la perpendicolare HM alla retta AB, questa (in virtù del teorema delle tre perpendicolari) risulta perpendicolare al piano dei punti V, H, M e pertanto risulta perpendicolare ad ogni retta di questo piano passante per M; in particolare risulta perpendicolare alla retta VM. Quindi VM è perpendicolare ad AB.
Parimenti VN è perpendicolare a BC, dove N è il punto di contatto dello spigolo BC col solito cerchio. E così pure per gli altri spigoli.
Prese adesso due qualsiasi di tali altezze, mettiamo VM e VN, risulta quasi evidente che sono uguali, in quanto ipotenuse dei due triangoli rettangoli VHM e VHN, chiaramente uguali. [c.v.d.]

La misura dell'altezza, relativa allo spigolo di base, di una qualunque faccia laterale di una piramide retta che, come assicura il teorema precedente, è invariante al variare della faccia, si chiama ***apotema*** della piramide.
Una piramide, che sia retta e che abbia per base un poligono regolare, si dice ***piramide regolare***.
Si può facilmente giustificare – ma ne lasciamo il compito a te – che:

Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli uguali.

48.3.3 Ti proponiamo qualche esercizio.
a) Considerato il tetraedro ABCD e detti M, N, P, Q i punti medi rispettivamente degli spigoli CA, CB,

[2] Attenzione a non confondere un "tetraedro" che è una piramide con un "angoloide tetraedro" che è per l'appunto un angoloide.

DB, DA, dimostra che quei punti sono vertici di un parallelogramma.

b) Studia le sezioni piane di un tetraedro, dopo aver stabilito preliminarmente che esse possono essere punti, segmenti, triangoli, quadrilateri.

c) In un tetraedro, due spigoli non aventi vertici comuni si dicono opposti. Dimostra che i segmenti che uniscono i punti medi delle tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro s'incontrano in un punto, che li divide a metà.

d) Considerato un generico triangolo OLM, rettangolo in O, si conduca il segmento ON perpendicolare al piano del triangolo. Si ottiene un tetraedro. Indicata con S l'area della faccia LMN e con A, B, C le aree delle altre tre facce, dimostrare che si ha: $S^2=A^2+B^2+C^2$.

[**R.** Basta far ricorso al teorema delle tre perpendicolari e ad un po' di algebra]

e) Considerata una piramide quadrangolare regolare, condurre un piano che intersechi tutti i suoi spigoli laterali ma senza che passi per il vertice della piramide e senza essere parallelo alla base, essendo però parallelo ad uno degli spigoli di base. Dimostra che la sezione del piano con la piramide è un trapezio isoscele.

f) Una piramide ha per base il triangolo ABC, rettangolo in C, e per altezza il segmento BV. Sapendo che $\cos V\hat{A}C=3/5$ e $\cos B\hat{A}C=4/5$, calcolare i coseni degli angoli che gli spigoli VA e VC formano con il piano della base ABC. [**R.** $3/4$, ...]

48.3.4 Considerata una piramide – mettiamo (V,ABCD) – sia A'B'C'D' una sezione di essa, ottenuta intersecandola con un piano parallelo alla base (Fig. 11). Il piano secante divide la piramide in due parti: una, quella contenente V, è ancora una piramide; l'altra si chiama **tronco di piramide**.

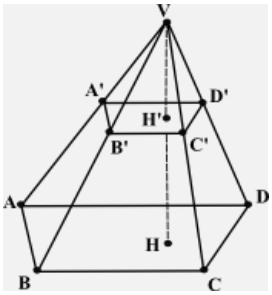

FIG. 11

Il poligono di base della piramide data e quello sezione si dicono ***basi*** del tronco; la distanza fra i loro piani ne è l'***altezza***. Le facce laterali di un tronco sono chiaramente dei trapezi. Un tronco di piramide ottenuto da una piramide retta si dice ***retto***.

Si dimostra facilmente, con riferimento alla piramide dalla quale il tronco è stato ottenuto, che le facce laterali di un tronco di piramide retto hanno altezze uguali. La misura di una di esse si chiama ***apotema*** del tronco. Un tronco di piramide ottenuto da una piramide regolare si dice ***regolare***.

Quali sono allora le caratteristiche di un tronco di piramide regolare?

48.4 POLIEDRI. POLIEDRI REGOLARI

48.4.1 Esaminando le figure solide studiate fin qui – piramidi, tronchi di piramidi, prismi – si può notare una proprietà comune a tutte: si tratta di figure limitate da poligoni. Queste figure si chiamano genericamente *poliedri*. Precisamente:

Si dice **poliedro** una parte finita di spazio limitata da poligoni tali che due qualsiasi di essi non

siano complanari, ogni loro lato sia comune a due e soltanto due di essi e il piano di ciascuno di essi lasci da una stessa parte tutti gli altri.

I poligoni che delimitano un poliedro si dicono le sue ***facce***; la loro unione è la ***superficie totale*** (o semplicemente ***superficie***) del poliedro.
I vertici e i lati delle facce si dicono rispettivamente ***vertici*** e ***spigoli*** del poliedro.
Ogni angoloide avente per vertice un vertice del poliedro e per spigoli le semirette contenenti gli spigoli del poliedro concorrenti in quel vertice si dice ***angoloide*** del poliedro. È evidente che un poliedro ha tanti angoloidi quanti sono i suoi vertici.
Qual è il minimo numero di facce necessario per avere un poliedro?
Un poliedro prende il nome dal numero delle sue facce. In particolare, un poliedro di quattro, cinque, sei, … , facce si dice rispettivamente *tetraedro*, *pentaedro*, *esaedro*, … .

Correttamente si dovrebbe parlare di **poliedro convesso** per distinguere dal **poliedro concavo** in cui esiste almeno una faccia il cui piano non lascia da una medesima parte le altre facce. Non ci occuperemo di tali figure, per cui quando parleremo di poliedro lo faremo con riferimento al poliedro convesso. Questo deve esser tenuto ben presente per evitare di commettere gravi errori. Diamo, ad ogni buon conto, come esempio, una rappresentazione di poliedri concavi e precisamente rappresentiamo due prismi concavi (Fig. 12) ed una piramide concava (Fig. 13).

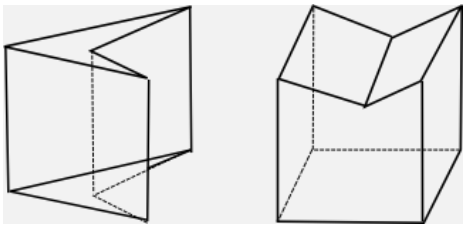

FIG. 12

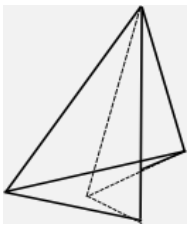

FIG. 13

48.4.2 Vale la seguente proprietà, attribuita ad Eulero [(3)].

♦ **RELAZIONE DI EULERO**. Indicati con f, v, s rispettivamente il numero delle facce di un poliedro, quello dei suoi vertici e quello dei suoi spigoli, vale la seguente relazione:

$$\mathbf{f + v = s + 2\ .}$$

DIMOSTRAZIONE. Premettiamo che del poliedro non interessano le misure dei suoi elementi ma solo le loro posizioni reciproche. Considerato allora un generico poliedro (ad esempio il parallelepipedo ABCDEFGH – Fig.14a – ma il discorso non perde di generalità), supponiamo di eliminare una sua faccia (ad esempio ABCD) e di schiacciarlo in modo da distenderlo in un piano (Fig.14b) adattando, se occorre, le lunghezze dei suoi spigoli. In questa maniera il numero f delle sue facce è diminuito di 1, ma il numero v dei suoi vertici e quello s dei suoi spigoli sono rimasti invariati. Ragion per cui il numero f+v−s si è così ridotto di una unità.
Se adesso nella figura "appiattita" eliminiamo un vertice interno (ad esempio H – Fig.14c), vengono contemporaneamente eliminati gli n spigoli che concorrono in esso (nel caso specifico: HD, HE, HF) e le n facce che hanno quel vertice in comune (nel caso specifico: HDAE, HEFG, HDCG), ma compare nello stesso tempo una faccia che prima non c'era (nel caso specifico: AEFGCD). Pertanto, il numero f+v−s, in seguito alla soppressione di un vertice interno, diventa: (f−n+1)+(v−1)−(s−n), vale a dire

[3] **Euler**, Leonhard; matematico svizzero, 1707-1783.

f+v−s, e quindi rimane invariato.

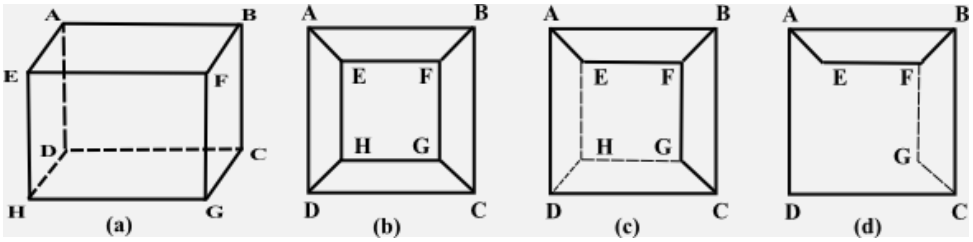

FIG. 14

Lo stesso accade con la soppressione di un altro vertice interno (ad esempio G – Fig.14d) e via via con l'eliminazione di tutti i vertici interni.

Insomma, sopprimendo tutti i vertici interni la figura che rimane ha lo stesso numero f+v-s dell'originario poliedro "appiattito". Ma questa figura è adesso un poligono di m lati (nel caso specifico: il quadrilatero ABCD) e perciò per esso risulta: f=1, v=m, s=m. Di conseguenza: f+v−s=1. D'altro canto, per l'originario poliedro "appiattito" il numero f+v−s è ridotto di una unità rispetto al poliedro assegnato. Per tale poliedro è dunque: f+v−s=2. Da qui segue immediatamente la relazione di Eulero.

Ti proponiamo alcuni esercizi in cui puoi utilizzare, se vuoi, la relazione di Eulero e, in ogni caso, puoi verificarla.

1) Ammesso che una piramide abbia n vertici, qual è il numero delle sue facce? Quale il numero dei suoi spigoli?
2) Ammesso che un prisma abbia n vertici, qual è il numero delle sue facce? Quale il numero dei suoi spigoli?
3) Se una piramide e un prisma hanno lo stesso numero di vertici, quale relazione sussiste fra i numeri delle loro facce? Quale relazione fra i numeri dei loro spigoli?

48.4.3 Un poliedro, le cui facce siano poligoni regolari uguali ed i cui angoloidi siano uguali, si dice ***poliedro regolare***.

♦ TEOREMA. **Esistono al più cinque poliedri regolari.**

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è basata, oltre che sulla definizione di poliedro, su due teoremi studiati precedentemente: uno di geometria piana e l'altro di geometria solida.

Dal primo desumiamo che ogni faccia di ciascun angoloide di un poliedro regolare, in quanto angolo interno di un poligono regolare di n lati, ha ampiezza uguale a $\frac{n-2}{n}180°$.

Dal secondo ricaviamo che la somma delle facce di ogni angoloide del poliedro ha ampiezza minore di 360°. Pertanto:

- se n=3, siccome $\frac{n-2}{n}180°=60°$, il numero F delle facce che concorrono in uno stesso vertice del poliedro è al più 5; non più di 5 in quanto, in tal caso: F×60°≥360°. Quindi f=3 oppure f=4 oppure f=5;
- se n=4, siccome $\frac{n-2}{n}180°=90°$, il numero delle facce che concorrono in uno stesso vertice del poliedro è solo ed esclusivamente F=3; non più di 3 in quanto, in tal caso: F×60°≥360°;
- se n=5, siccome $\frac{n-2}{n}180°=108°$, il numero delle facce che concorrono in uno stesso vertice del po-

liedro è solo ed esclusivamente F=3; non più di 3 in quanto, in tal caso: $F\times 60°>360°$

- se $n\geq 6$, siccome $\frac{n-2}{n}180°\geq 120°$, non esiste alcun poliedro con facce siffatte in quanto la somma di tre di esse, che concorrano in uno stesso vertice, non è inferiore a 360°.

In conclusione esistono al più:

- 3 poliedri regolari le cui facce sono triangoli equilateri,
- 1 poliedro regolare le cui facce sono quadrati,
- 1 poliedro regolare le cui facce sono pentagoni regolari.

In tutto, 5 poliedri regolari al più. [c.v.d.]

Si può poi dimostrare che quelli suddetti sono i poliedri regolari di fatto esistenti. Noi non lo facciamo e ci limitiamo soltanto a descriverli.

- I tre poliedri regolari limitati da triangoli sono:
  - il **tetraedro** regolare, che ha 4 facce tali che in ogni vertice ne concorrono 3; esso ha 4 vertici e 6 spigoli (Fig. 15);
  - l'**ottaedro** regolare, che ha 8 facce tali che in ogni vertice ne concorrono 4; esso ha 6 vertici e 12 spigoli (Fig. 16);
  - l'**icosaedro** regolare, che ha 20 facce tali che in ogni vertice ne concorrono 5; esso ha 12 vertici e 30 spigoli (Fig. 17).
- Il poliedro regolare limitato da quadrati è l'**esaedro** regolare (o **cubo**), che, come già sai, ha 6 facce (tali che in ogni suo vertice ne concorrono 3), 8 vertici e 12 spigoli (Fig. 18).
- Il poliedro regolare limitato da pentagoni è il **dodecaedro** regolare, che ha 12 facce (tali che in ogni suo vertice ne concorrono 3), 20 vertici e 30 spigoli (Fig. 19).

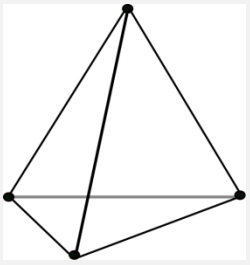
FIG. 15

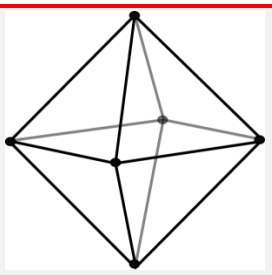
FIG. 16

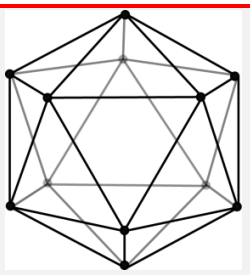
FIG. 17

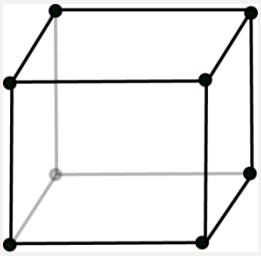
FIG. 18

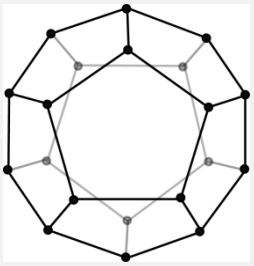
FIG. 19

La tabella sottostante (Tab. 1) sintetizza quanto appena detto riguardo ai poliedri regolari.

Poliedro regolare	Tipo di facce	Numero facce	Numero vertici	Numero spigoli
Tetraedro	Triangoli	4	4	6
Esaedro	Quadrati	6	8	12
Ottaedro	Triangoli	8	6	12
Dodecaedro	Pentagoni	12	20	30
Icosaedro	Triangoli	20	12	30

TAB. 1

La costruzione dei poliedri regolari, che costituisce la parte conclusiva del XIII libro degli *Elementi* di Euclide, era attribuita nell'antichità al filosofo ateniese **Platone** (per questa ragione ancor oggi i poliedri regolari sono detti talvolta *solidi platonici*), poiché costui ne tratta in un suo dialogo, il *Timeo*. In questo dialogo Platone immagina che le ultime particelle dei quattro elementi fondamentali – *fuoco, aria, acqua, terra* – siano collegate alle facce di quattro poliedri regolari – rispettivamente: *tetraedro, ottaedro, icosaedro, cubo* – . Quanto al *dodecaedro*, c'è, nel dialogo, soltanto un'allusione, peraltro sibillina: «*Rimaneva una quinta combinazione che Dio usò per disegnare l'Universo*». Ma in un altro dialogo, il *Fedone*, Platone chiarisce in qualche misura il concetto: «*L'Universo e la Terra hanno la forma di una palla con dodici facce colorate di forma pentagonale e i corpi celesti sono sospesi all'interno*». Insomma Platone sembra associare al dodecaedro l'elemento fondamentale del cosmo, quello che nella fisica greca fu chiamato la *quinta essenza*.
In uno scolio [4] al XIII libro degli *Elementi*, di datazione incerta, si dichiara però che la scoperta dei cinque poliedri regolari non deve essere attribuita a Platone (427-347 a.C.), poiché tre di essi (cubo, tetraedro e dodecaedro) erano noti ai Pitagorici (VI sec. a.C.) e gli altri due (ottaedro e icosaedro) erano dovuti a un matematico ateniese di nome **Teeteto** (circa 415-369 a.C.), seguace di **Teodoro** di Cirene, matematico di scuola pitagorica, attivo intorno al 390 a.C. Insomma, secondo lo scoliaste, i cinque poliedri regolari sono scoperte dei Pitagorici.

48.4.4 Alcuni esercizi sui poliedri regolari.

a) Descrivi il solido avente per vertici i centri delle facce di un:
1) tetraedro regolare; 2) esaedro regolare; 3) ottaedro regolare;
4) dodecaedro regolare; 5) icosaedro regolare.

b) Indicato con α l'angolo formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare e con β l'angolo che uno spigolo forma con una faccia che non lo contiene, trova i valori di α e β, approssimati al secondo. [**R.** $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = \sqrt{3}/3$; da qui...]

c) Indicato con α l'angolo formato da due spigoli consecutivi di un ottaedro regolare, ma non appartenenti alla stessa faccia, quanto vale α? Qual è il valore dell'angolo β formato da due facce consecutive dell'ottaedro, approssimato al secondo? [**R.** ...; $\cos\beta = -1/3$ e da qui ...]

d) Considerato il tetraedro regolare di vertici A, B, C, D e di spigolo s, e condotto per il punto D il piano α perpendicolare alla retta AB, calcola il perimetro e l'area della sezione di questo piano con il tetraedro. [**R.** $s\left(\sqrt{3}+1\right)$, $s^2\sqrt{2}/4$]

e) Determina lo spigolo del tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare di spigolo s. [**R.** $s/3$]

[4] Uno "scolio" è una nota critica ad un autore classico.

f) Determina lo spigolo dell'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un esaedro regolare di spigolo s. [**R.** $s\sqrt{2}/2$]

g) Determina lo spigolo dell'esaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare di spigolo s. [**R.** $s\sqrt{2}/3$]

h) Preso un tetraedro regolare di spigolo lungo s, calcola la lunghezza del segmento avente per estremi i punti medi di due suoi spigoli appartenenti a due rette sghembe. [**R.** $s\sqrt{2}/2$]

48.5 SOLIDI DI ROTAZIONE

48.5.1 I poliedri non sono gli unici solidi geometrici. Fermiamo la nostra attenzione sui cosiddetti *solidi di rotazione* (o *corpi rotondi*), in particolare su cilindri, coni e tronchi di cono. È fondamentale la tua collaborazione. Incominciamo col *cilindro*.

Si dice **cilindro circolare retto** (o semplicemente **cilindro**) il solido generato da un rettangolo in una rotazione completa intorno alla retta di uno dei suoi lati (Fig. 20).

Questa retta è detta *asse* del cilindro. Il lato intorno a cui avviene la rotazione si chiama ***altezza*** del cilindro. I due cerchi generati dai lati perpendicolari all'asse di rotazione si dicono ***basi*** del cilindro; il loro raggio si dice anche ***raggio*** del cilindro.

Se l'altezza di un cilindro è uguale al doppio del suo raggio, il cilindro si dice ***equilatero***.

Quale figura geometrica si ottiene sezionando un cilindro equilatero con un piano passante per l'asse di rotazione? Quale figura si ottiene sezionando un cilindro con un piano che intersechi tutte le sue generatrici?

Consideriamo un cilindro e, nel medesimo tempo, un prisma retto avente la stessa altezza e le cui basi siano inscritte (Fig. 21) (risp.: circoscritte – Fig. 22) a quelle del cilindro: il prisma si dice *inscritto* nel cilindro (risp.: *circoscritto* al cilindro); il cilindro, a sua volta, si dice *circoscritto* al prisma (risp.: *inscritto* nel prisma).

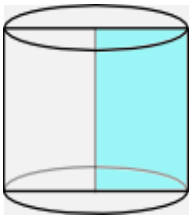
FIG. 20

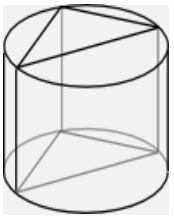
FIG. 21

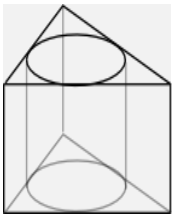
FIG. 22

48.5.2 Si definisce **cono circolare retto** (o semplicemente **cono**) il solido generato da un triangolo rettangolo in una rotazione completa intorno alla retta di uno dei suoi cateti (Fig. 23).

Questa retta si chiama *asse* del cono. Il cateto intorno al quale avviene la rotazione è l'***altezza*** del cono. Il cerchio generato dall'altro cateto ne è la ***base***; il raggio di questo cerchio è detto anche ***raggio*** del cono.

L'ipotenusa del triangolo che genera il cono si chiama ***apotema*** del cono. L'estremo dell'ipotenusa che sta sull'asse di rotazione si dice ***vertice*** del cono.

Se l'apotema di un cono è il doppio del suo raggio, il cono si dice ***equilatero***.

Quale figura geometrica si ottiene secando un cono con un piano passante per il suo asse? E con un piano strettamente parallelo all'asse? E con un piano che intersechi tutte le sue generatrici?

Consideriamo un cono e, nel medesimo tempo, una piramide avente lo stesso vertice e per base un poligono circoscritto alla base del cono (Fig. 24): la piramide si dice *circoscritta* al cono, che, a sua volta, è *inscritto* nella piramide.
Consideriamo invece una piramide avente sempre lo stesso vertice del cono ma per base un poligono inscritto nella base del cono (Fig. 25): la piramide si dice *inscritta* nel cono, che, a sua volta, è *circoscritto* alla piramide.
È evidente che un cono inscritto o circoscritto ad una piramide ha la stessa altezza di questa.
È pure evidente che una piramide circoscritta ad un cono è retta.
È necessariamente retta una piramide inscritta in un cono?

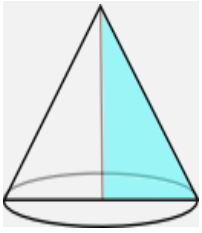
FIG. 23

FIG. 24

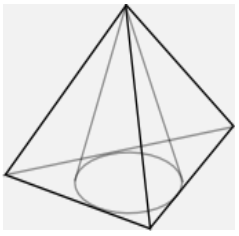
FIG. 25

48.5.3 Un cono, intersecato con un piano perpendicolare all'asse di rotazione ma non passante per il suo vertice, è diviso in due parti: una, quella contenente il vertice, è ancora un cono; l'altra si chiama **tronco di cono** (Fig. 26).
Un tronco di cono può essere definito, alla stessa maniera del cilindro e del cono, come solido di rotazione?
Sono elementi caratteristici di un tronco di cono l'***altezza***, l'***apotema*** ed i raggi delle basi detti anche ***raggi*** del tronco. Con riferimento alla figura 26, essi sono nell'ordine i segmenti AB, DC, AD, BC.

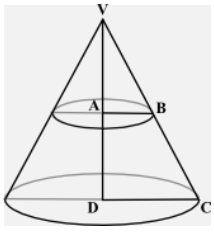

FIG. 26

48.5.4 Ti proponiamo alcuni esercizi.

a) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo di un giro completo attorno all'ipotenusa.
b) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo di un giro completo attorno ad una retta parallela (in senso stretto) all'ipotenusa e situata da parte opposta del vertice dell'angolo retto rispetto all'ipotenusa medesima.
c) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo di un giro completo attorno alla parallela all'ipotenusa condotta per il vertice dell'angolo retto.
d) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare di un giro completo un trapezio rettangolo attorno alla sua base maggiore.
e) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare un trapezio rettangolo di un giro completo attorno al lato obliquo.

f) Descrivi il solido che si ottiene facendo ruotare un rombo di un giro completo attorno ad uno dei suoi lati.
g) Descrivi le sezioni di un cilindro circolare retto, ottenute con piani paralleli al suo asse o con piani perpendicolari all'asse.
h) Descrivi le sezioni di un cono circolare retto, ottenute con piani passanti per il suo vertice o con piani perpendicolari al suo asse.
i) Descrivi le sezioni di un tronco di cono circolare retto, ottenute con piani passanti per il vertice del cono da cui il tronco si suppone ricavato o con piani perpendicolari all'asse del tronco.

48.6 SFERA E SUPERFICIE SFERICA

48.6.1 Si dice **sfera** (Fig. 27) l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da un punto assegnato (detto ***centro*** della sfera) non supera una lunghezza data (detta ***raggio*** della sfera).
Considerata una sfera S di centro C e raggio r, ogni punto avente da C distanza minore di r si dice *interno* ad S mentre ogni punto avente da C distanza maggiore di r si dice *esterno* ad S.
L'insieme dei punti che da C hanno distanza uguale ad r e che naturalmente costituiscono il contorno della sfera si chiama ***superficie sferica***.
Il centro e il raggio di una sfera si dicono anche ***centro*** e ***raggio*** della relativa superficie sferica.
Ogni segmento i cui estremi appartengono ad una superficie sferica si chiama ***corda*** della superficie sferica (e anche della sfera relativa). Ogni corda passante per il centro si dice ***diametro***.
Si giustifica facilmente che ogni diametro ha lunghezza doppia del raggio.

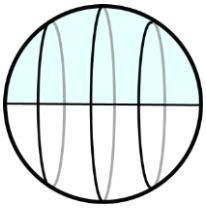

FIG. 27

Risulta evidente l'analogia di sfera e superficie sferica rispettivamente con cerchio e circonferenza. Del resto le due figure solide sono caratterizzate dalle seguenti proprietà, di facile giustificazione, che le legano fortemente alle corrispondenti figure piane:
Un cerchio, che compia una rotazione di mezzo giro intorno al suo diametro, genera una sfera; nel medesimo tempo la relativa circonferenza genera la superficie sferica che costituisce il contorno della sfera.

48.6.2 Vale il seguente teorema, che però non dimostriamo.

♦ TEOREMA. L'intersezione di una superficie sferica Σ con un piano α è rispettivamente l'insieme vuoto, un punto o una circonferenza c a seconda che il piano abbia dal centro della superficie sferica distanza maggiore, uguale o minore del raggio. In corrispondenza, l'intersezione della sfera, di cui Σ è il contorno, con α è l'insieme vuoto, un punto o il cerchio di contorno c.

A seconda che un piano non abbia punti in comune con una sfera o abbia in comune con essa solo un punto o la sechi secondo un cerchio, il piano si dice nell'ordine *esterno* (Fig. 28), *tangente* (Fig. 29) o

secante (Fig. 30) la sfera.
Analogo discorso per la superficie sferica.
Nell'ipotesi che un piano sechi una sfera (il discorso vale anche per una superficie sferica), il raggio del cerchio sezione cresce mentre la distanza del piano dal centro della sfera decresce da r a 0. Per cui questo raggio è massimo quando il piano passa per il centro della sfera. Per questo l'intersezione di una sfera con un piano passante per il suo centro si chiama ***cerchio massimo***.

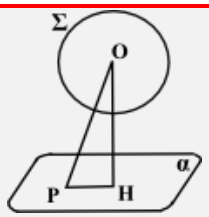

FIG. 28

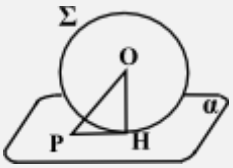

FIG. 29

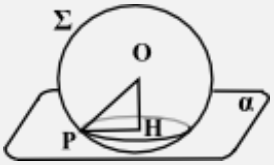

FIG. 30

48.6.3 Alcuni esercizi sulle proprietà della sfera.

a) Dimostra che il piano perpendicolare ad una corda di una sfera nel suo punto medio passa per il centro della sfera.
b) Dimostra che per una retta esterna ad una sfera si possono condurre due e due soli piani tangenti alla sfera.
c) Dimostra che i segmenti tangenti ad una sfera, condotti per un punto esterno ad essa, individuano la superficie laterale di un cono circolare retto.
d) Dimostra che per una retta tangente ad una sfera si può condurre uno ed un sol piano tangente alla sfera.
e) Dimostra che le rette tangenti ad una sfera, condotte per un punto della sua superficie, sono complanari.
f) Dimostra che ogni prisma triangolare retto è inscrivibile in una sfera.
g) Dimostra che ogni cilindro circolare retto è inscrivibile in una sfera. Quale condizione deve essere soddisfatta affinché esso sia anche circoscrivibile ad una sfera?

Il seguente problema è stato assegnato a "*Matematica senza Frontiere*", 2007. Ti invitiamo a risolverlo.

PROBLEMA. Un architetto progetta delle abitazioni di forma sferica destinate ad essere depositate sul fondo del mare. Queste sfere hanno un raggio di 5 m e tre livelli orizzontali abitabili (Fig. 31):

- il primo è situato a 2,50 m dal fondo della sfera;
- il secondo è situato a 5 m dal fondo della sfera;
- il terzo è situato a 7,50 m dal fondo della sfera.

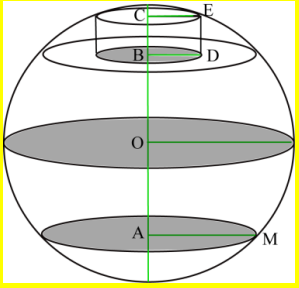

FIG. 31

Per quanto riguarda quest'ultimo livello, solo la parte di superficie con la volta di altezza superiore a 2 m è abitabile. Calcolare la superficie complessiva abitabile.

[**R**. $A_1=18{,}75\ \pi\ m^2$; $A_2=25\ \pi\ m^2$; $A_3=4{,}75\ \pi\ m^2$;...]

48.6.4 Considerato un poliedro, se esiste una sfera tangente a ciascuna delle sue facce allora il poliedro si dice ***circoscritto*** alla sfera, la quale a sua volta si dice ***inscritta*** nel poliedro. Il raggio della sfera si chiama *apotema* del poliedro.

Se esiste una sfera passante per tutti i vertici del poliedro allora il poliedro si dice ***inscritto*** nella sfera, la quale a sua volta si dice ***circoscritta*** al poliedro. Il raggio della sfera si chiama anche *raggio* del poliedro.

Se il poliedro è un poliedro generico non c'è garanzia che risulti circoscrivibile o inscrivibile in una sfera.

Se però si tratta di un poliedro regolare, è certamente sia inscrivibile sia circoscrivibile al una sfera. Anzi i centri delle due sfere coincidono e il loro centro comune si chiama anche *centro* del poliedro regolare.

- ESERCIZIO. Dimostrare che il centro di un tetraedro regolare divide la sua altezza in due parti, la maggiore delle quali (il raggio del tetraedro) è il triplo dell'altra (l'apotema del tetraedro).

RISOLUZIONE (traccia). Considerato il tetraedro regolare ABCD, si traccino le altezze AH e BK, le quali si intersecano nel centro O del tetraedro. Indicata con h l'altezza del tetraedro, si calcola anzitutto che il suo spigolo è lungo $\frac{3}{2}h\sqrt{2}$. Posto ora $\overline{OH}=\overline{OK}=x$, risulta … $x=h/4$. Pertanto … .

VERIFICHE [5]

1. Un cilindro circolare retto ha raggio r e altezza 3r. Calcolare il raggio della sfera circoscritta ad esso. Nel cilindro è possibile inscrivere una sfera? $\left[\mathbf{R}.\ \frac{r}{2}\sqrt{13}\ ;\ \text{NO}\right]$
2. Dimostrare che ogni cono circolare retto è circoscrivibile ad una sfera ed è inscrivibile in una sfera. Può verificarsi che i centri delle due sfere coincidano?
3. Un cono circolare retto ha raggio r e apotema $5r/4$. Calcolare i raggi delle sfere inscritta e circoscritta ad esso. $\left[\mathbf{R}.\ \frac{r}{3};\frac{25}{24}r\right]$
4. Dimostrare che ogni prisma regolare è inscrivibile in una sfera. Quale condizione deve essere soddisfatta affinché esso sia anche circoscrivibile ad una sfera?
5. Un prisma triangolare regolare ha lo spigolo di base lungo a e lo spigolo laterale lungo a/2. Calcolare il raggio della sfera circoscritta ad esso. Nel prisma è possibile inscrivere una sfera? $\left[\text{R}.\ \frac{a}{12}\sqrt{57};\ \text{NO}\right]$
6. Dimostrare che ogni piramide regolare è circoscrivibile ad una sfera ed è inscrivibile in una sfera.
7. Una piramide quadrangolare regolare ha lo spigolo di base lungo a e lo spigolo laterale lungo 2a. Calcolare i raggi delle sfere inscritta e circoscritta alla piramide. $\left[\mathbf{R}.\ \frac{a}{28}\left(\sqrt{210}-\sqrt{14}\right);\ \frac{2}{7}a\sqrt{14}\right]$
8. Dimostrare che il solido, che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo di un giro completo attorno all'ipotenusa, è inscrivibile in una sfera e circoscrivibile ad un'altra sfera. Supposto che i cateti

[5] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

del triangolo siano lunghi 6a e 8a, calcolare i raggi delle due sfere. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{24}{7}a, 5a\right]$

9. L'intersezione di un cubo con un piano può essere (ma non solo): un triangolo ed in particolare un triangolo equilatero, un rettangolo ed in particolare un quadrato, un esagono ed in particolare un esagono regolare. Descrivi, almeno in un caso, ciascuna delle diverse situazioni.

10. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Dopo aver calcolato la lunghezza della diagonale di un cubo il cui spigolo è lungo $\sqrt{3}$, condurre un piano perpendicolare ad una diagonale del cubo ed esprimere, in funzione della distanza x di tale piano da uno degli estremi della diagonale considerata, il perimetro $P(x)$ e l'area $A(x)$ della sezione di tale piano col cubo, facendo vedere che si ha:

$$P(x)=\begin{cases}3x\sqrt{6} & \text{per } 0\le x\le 1\\ 3\sqrt{6} & \text{per } 1<x<2\\ 3\sqrt{6}(3-x) & \text{per } 2\le x\le 3\end{cases}\qquad A(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} & \text{per } 0\le x\le 1\\ -3\sqrt{3}x^2+9\sqrt{3}x-\frac{9}{2}\sqrt{3} & \text{per } 1<x<2\\ \frac{3}{2}\sqrt{3}(3-x)^2 & \text{per } 2\le x\le 3\end{cases}$$

Disegnare i grafici delle due funzioni.

11. LABORATORIO DI MATEMATICA [Tratto da "*Matematica senza Frontiere*", 2008].
Flatlandia è un mondo a due dimensioni. Allorché una sfera attraversa questo mondo, i suoi abitanti osservano il fenomeno rappresentato dal film posto qui sotto (Fig. 32)

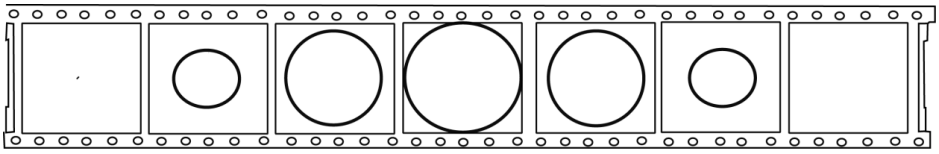

FIG. 32

Queste sette immagini, prese ad intervalli regolari di tempo, mostrano le sezioni della sfera (con il piano con cui si identifica Flatlandia).
Ecco che un bel giorno un cubo si appresta ad attraversare Flatlandia. Esso si presenta con un vertice e si muove a velocità costante nella direzione della diagonale passante per quel vertice. Questa direzione è perpendicolare a Flatlandia. Completare il film del passaggio del cubo attraverso Flatlandia (Fig. 33).

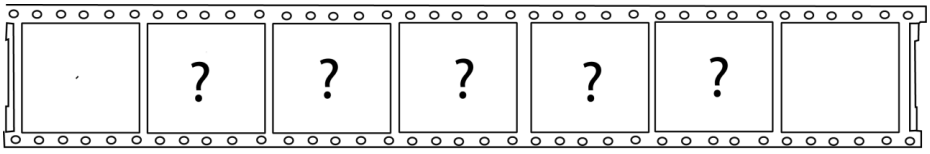

FIG. 33

12. ® Dimostrare che ogni numero primo maggiore di 2 può scriversi in un solo modo come differenza dei quadrati di due numeri naturali.
Successivamente, utilizzando tale proprietà, determinare i numeri interi c, d sapendo che sono le misure, espresse in cm, rispettivamente dell'altezza e della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, di cui le dimensioni della base sono:

1) a = 1 cm, b = 2 cm; 2) a = 2 cm, b = 3 cm; 3) a = 2 cm, b = 5 cm,

dopo aver controllato che a^2+b^2 (espresso in centimetri quadrati) è un numero primo.

13. L'apotema e il perimetro di una faccia laterale di una piramide quadrangolare regolare sono rispettivamente $p/2$ e $2p$, essendo p una lunghezza assegnata. Calcolare le lunghezze degli spigoli della pi-

ramide. [**R.** $3p/8, 5p/8$]

14. È dato il cubo ABCDEFGH (Fig. 34) il cui spigolo è lungo 1. Un piano contenente la diagonale AG interseca lo spigolo BF in P e lo spigolo DH in Q. Calcolare la distanza di P da B sapendo che l'area del quadrilatero APGQ è $\frac{\sqrt{26}}{4}$.

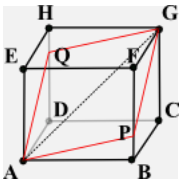

FIG. 34

[**R.** Chiamata PH l'altezza del triangolo PAG, conviene dapprima esprimere PH in funzione della lunghezza x di BP. Si trova: $PH=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{x^2-x+1}$. Da qui.... Due sol.: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$]

15. Con riferimento al tetraedro regolare ABCD, siano M, N, P i punti medi rispettivamente degli spigoli AB, BC, AD. Dimostrare che il triangolo MNP è rettangolo e calcolarne il perimetro e l'area sapendo che lo spigolo del tetraedro è lungo s. [**R.** $P\widehat{M}N$ retto, $\frac{s}{2}(2+\sqrt{2})$, $\frac{s^2}{8}$]

16. Nel tetraedro ABCD gli angoli $B\widehat{A}C, C\widehat{A}D, D\widehat{A}B$ sono retti. Inoltre gli spigoli AB e AC misurano rispettivamente 40 cm e 30 cm. Calcolare per quali valori di AD il triangolo BCD risulta rispettivamente rettangolo, acutangolo o ottusangolo. [**R.** rettangolo per $AD = 24\sqrt{2}$ cm; ...]

17. Sia r il raggio di base di un cono equilatero di vertice V e sia AB una corda del cerchio di base. Determinare la lunghezza di AB sapendo che l'area del triangolo VAB è $r^2\sqrt{3}$.

[**R.** Indicata con x la distanza di AB dal centro del cerchio, si ottiene: $x^2(x^2+2r^2)=0$, per cui...]

18. Determinare tre numeri interi positivi a, b, c, sapendo che $a+b+c=23$ e $a^2+b^2+c^2=195$.

[**R.** Il numero 195 può essere considerato come il quadrato della diagonale di …, per cui i numeri a, b, c non possono superare il numero … . Ammesso che sia $a \geq b \geq c$, si operano alcuni tentativi. Si trova una sola soluzione]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. In un cubo come si definiscono due vertici opposti? Come si definiscono due spigoli opposti?
2. È vero che una piramide si dice retta se l'altezza è perpendicolare alla base?
3. È vero che un prisma si dice retto se l'altezza è perpendicolare alle basi?
4. È vero che la sezione di un cubo con un piano perpendicolare ad una sua diagonale nel punto medio è un esagono regolare?
5. È vero che ogni prisma regolare è un poliedro regolare?
6. Quanti e quali sono i poliedri regolari le cui facce sono triangoli?
7. Si consideri il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare. Di che poliedro si tratta?

8. Si consideri il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare. Di che poliedro si tratta?
9. Se si seziona un cubo con un piano in modo da ottenere un quadrilatero, può accadere che questo non sia un parallelogramma?
10. In che modo può essere ottenuta un'ellisse come sezione di un piano con un solido di rotazione?

RISPOSTE.

1. Due vertici di un cubo si dicono opposti se non appartengono alla stessa faccia. Due spigoli si dicono opposti se sono paralleli e non sono contenuti nella stessa faccia. In un cubo ci sono 4 coppie di vertici opposti e 6 coppie di spigoli opposti. Il segmento che congiunge due vertici opposti si chiama *diagonale*. Il piano che contiene due spigoli opposti si chiama *piano diagonale*.
2. No. L'altezza è perpendicolare alla base in ogni piramide. Invece una piramide si dice retta se la base è circoscrivibile ad un cerchio e il piede dell'altezza coincide col centro del cerchio.
3. No. L'altezza è perpendicolare alle basi in ogni prisma. Invece un prisma si dice retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi.
4. Sì.
5. No. Tra i prismi regolari solo il cubo è un poliedro regolare.
6. Sono tre: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.
7. Si tratta di un tetraedro regolare.
8. Si tratta di un cubo.
9. No, è in ogni caso un parallelogramma.
10. Un'ellisse può essere ottenuta sezionando con un piano sia un cilindro sia un cono, a condizione che il piano intersechi tutte le generatrici del solido di rotazione che è preso in considerazione.

LETTURE

1. Ancora sui poliedri regolari.

Proponiamo una **riflessione sui poliedri regolari**. Lo facciamo soprattutto a beneficio di chi avesse particolare interesse a quest'argomento.
Si consideri il seguente problema:

Trovare gli spigoli dei cinque poliedri regolari inscritti in una sfera di raggio R e paragonarli fra loro.

A parte qualche dettaglio si tratta della proposizione 18 del XIII libro degli *Elementi* di Euclide. Ci piace riportare un frammento del commento di A. Frajese a questa proposizione [(6)]:
«È, questa, l'ultima proposizione degli Elementi di Euclide. […]. C'è un'aria festosa, come per salutare l'arrivo della meta dopo un viaggio lungo e faticoso. I cinque poliedri regolari vengono in certo senso riuniti, e confrontati fra loro […]. È quasi un'esaltazione dei risultati raggiunti, che viene effettuata mediante una sintesi finale».

[6] EUCLIDE, ***Gli Elementi*** (a cura di A. Frajese – L. Maccioni), coll. Classici, Torino, UTET, 1970, pag. 1032.

Ci proponiamo di risolvere il problema, ma non alla maniera di Euclide, che non possedeva i nostri strumenti di calcolo, anche se utilizzeremo molte delle sue idee. Incominciamo ad indicare con S_4, S_6, S_8, S_{12}, S_{20} gli spigoli dei 5 poliedri inscritti nella sfera di raggio R.

- Riguardo all'**esaedro** si trova subito che:

$$S_6 = \frac{2}{3} R \sqrt{3}.$$

È sufficiente constatare che la diagonale dell'esaedro è un diametro della sfera. La continuazione è banale.

- Anche per quanto concerne l'**ottaedro** il risultato è pressoché immediato:

$$S_8 = R\sqrt{2}.$$

Basta osservare che il piano passante per il centro della sfera e contenente uno spigolo dell'ottaedro seca l'ottaedro medesimo secondo un quadrato il cui lato è proprio lo spigolo S_8 e seca la sfera secondo il cerchio di raggio R circoscritto al quadrato. La continuazione è facile.

- Il ragionamento è leggermente più complicato quando si deve trovare S_4. Indicato allora con ABCD il **tetraedro** regolare inscritto nella sfera di centro O, la retta AO incontra la faccia BCD in H e la sfera ulteriormente in E. La retta BH seca CD in M. Si spiega agevolmente che:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_4 \quad \text{e} \quad \overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3} S_4 .$$

Trovato allora che:

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3} S_4 ,$$

ragionando sul triangolo rettangolo ABE, si giunge al seguente risultato:

$$S_4 = \frac{2}{3} R \sqrt{6}.$$

La spiegazione dettagliata dei vari passaggi richiede solamente un po' d'attenzione.

- Decisamente complicato è il ragionamento da fare quando si deve trovare S_{12}. Anzitutto bisogna osservare che le 12 facce del **dodecaedro** sono due a due simmetriche rispetto al suo centro O, che è anche il centro della sfera circoscritta. Considerate allora due qualsiasi di tali "facce opposte", il piano passante per O e parallelo ad esse interseca le altre 10 facce del dodecaedro e, per ragioni di simmetria, interseca ciascuna di esse secondo un segmento avente per estremi i punti medi di due lati consecutivi, per cui detto piano interseca il dodecaedro secondo un decagono regolare di cui un lato è il segmento AB di figura 35, dove è rappresentata una faccia del dodecaedro intersecata da tale piano.

Considerato dunque il lato AB di tale decagono e chiamato H il centro della faccia considerata, si indichi con M il punto medio di AB. Essendo OH perpendicolare alla faccia suddetta, è evidente che i triangoli OHM e OHC sono rettangoli in H (Fig. 36). Per trovare S_{12} conviene dapprima esprimere OC, lungo R, in funzione di S_{12}. Per questo è necessario calcolare anzitutto HC e OH. Ora, posto provvisoriamente per comodità $S_{12}=S$, si ha (Fig. 35):

$$\overline{CA} = \frac{S}{2}, \quad \overline{HC} = \frac{\overline{CA}}{\cos H\hat{C}A} = \frac{S}{2\cos 54°} ;$$

e inoltre:

$$\overline{HM} = \overline{AM}\tan H\hat{A}M = \overline{CA}\cdot \sin A\hat{C}M \cdot \tan H\hat{A}M = \frac{S}{2}\cdot \sin 54° \cdot \tan 54° .$$

D'altronde OM è l'apotema del decagono regolare in esame, per cui (Fig. 37):

$$\overline{OM}=\frac{\overline{AM}}{\tan A\hat{O}M}=\frac{\frac{S}{2}\sin 54°}{\tan 18°}\ .$$

Si ha pertanto (Fig. 36):

$$\overline{OH}^2=\overline{OM}^2-\overline{HM}^2=\frac{S^2}{4}\cdot\frac{\sin^2 54°}{\tan^2 18°}--\frac{S^2}{4}\cdot\sin^2 54°\cdot\tan^2 54°\,.$$

Di conseguenza (Fig. 37):

$$\overline{OC}^2=\overline{OH}^2+\overline{HC}^2=\frac{S^2}{4}\cdot\frac{\sin^2 54°}{\tan^2 18°}-\frac{S^2}{4}\cdot\sin^2 54°\cdot\tan^2 54°+\frac{S^2}{4\cos^2 54°}\ ,$$

ossia:

$$\overline{OC}^2=\frac{S^2}{4}\left(\frac{\sin^2 54°}{\tan^2 18°}-\sin^2 54°\cdot\tan^2 54°+\frac{1}{\cos^2 54°}\right)\ .$$

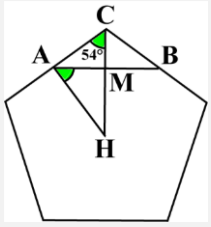

FIG. 35

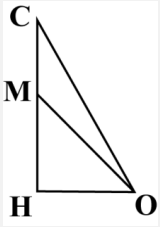

FIG. 36

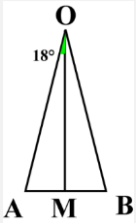

FIG. 37

In seguito ad una serie di calcoli noiosi, seppure non difficili, che però possono essere evitati se si usa un idoneo software matematico in grado di fornire direttamente il valore semplificato dell'espressione in parentesi, si trova:

$$\overline{OC}^2=\frac{3}{8}S^2\left(3+\sqrt{5}\right)\ .$$

Da qui, sempre con l'uso di un software matematico (se si vogliono evitare i calcoli), una volta sostituiti OC ed S rispettivamente con R ed S_{12}, segue infine:

$$S_{12}=\frac{R}{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

- Il ragionamento per trovare lo spigolo S_{20} dell'**icosaedro** non è molto dissimile dal precedente. Anzitutto si constata che i 20 vertici del poliedro sono due a due simmetrici rispetto al suo centro O, che è anche il centro della sfera circoscritta. Tracciata quindi la retta di due di tali "vertici opposti", il piano passante per O e perpendicolare a questa retta interseca le 10 facce dell'icosaedro che non contengono alcuno di quei due vertici e, per ragioni di simmetria, interseca ciascuna faccia secondo un segmento avente per estremi i punti medi di due lati. Ragion per cui detto piano interseca l'icosaedro secondo un decagono regolare di cui un lato è il segmento AB di figura 38, dove è rappresentata una faccia dell'icosaedro intersecata dal piano suddetto.

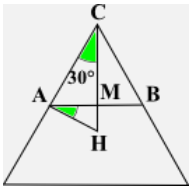

FIG: 38

Da qui in poi basta ragionare come nel caso del dodecaedro, con l'unica variante che adesso, al posto dell'angolo di 54°, figura l'angolo di 30°. Si trova pertanto:

$$\overline{OC}^2 = \frac{S^2}{4}\left(\frac{\sin^2 30°}{\tan^2 18°} - \sin^2 30° \cdot \tan^2 30° + \frac{1}{\cos^2 30°}\right).$$

E da qui, a conti fatti:

$$\overline{OC}^2 = \frac{S^2}{8}\left(5+\sqrt{5}\right).$$

O anche, una volta sostituiti OC ed S con R ed S_{20} e fatti i debiti calcoli:

$$S_{20} = \frac{R}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

• Si ottengono così i seguenti risultati approssimati:

$$S_6 \approx 1{,}15\ R,\ \ S_8 \approx 1{,}41\ R,\ \ S_4 \approx 1{,}63\ R,\ \ S_{12} \approx 0{,}71\ R,\ \ S_{20} \approx 1{,}05\ R.$$

Pertanto:

$$S_{12} < R < S_{20} < S_6 < S_8 < S_4.$$

Euclide non disponeva certamente del nostro agile calcolo simbolico né tanto meno di strumenti di calcolo automatico e tuttavia è giunto ugualmente alla precedente conclusione. Lo ha fatto con considerazioni e ragionamenti di natura esclusivamente geometrica, mostrando fra l'altro che **S_{12} è sezione aurea di S_6**.

2. Poliedri pseudo-regolari.

Si possono costruire poliedri non regolari, aventi tuttavia per facce poligoni regolari uguali, ma di almeno due tipi diversi e per questo si chiamano **poliedri pseudo-regolari**.

Forniamo alcuni esempi di tali poliedri, precisando una volta per tutte che in ciascuno di essi i lati delle facce, ovvero gli spigoli dei poliedri, sono fra loro uguali.

- Poliedro formato da 32 facce, di cui 20 esagoni regolari uguali e 12 pentagoni regolari uguali (Fig. 39). È probabilmente il poliedro pseudo-regolare più famoso, se non altro perché il tradizionale pallone del gioco del calcio è, di norma, un solido siffatto.
- Poliedro formato da 14 facce, di cui 6 quadrati uguali e 8 triangoli equilateri uguali (Fig. 40). Qualcuno lo chiama ***cubottaedro***.

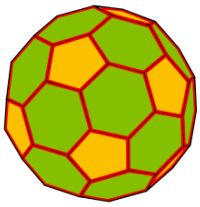

FIG. 39

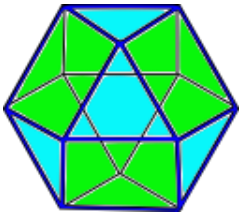

FIG. 40

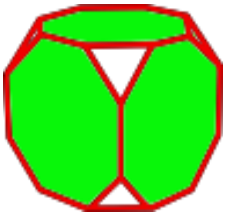

FIG. 41

- Poliedro ottenuto recidendo convenientemente in un cubo 8 piramidi triangolari regolari uguali, aventi i vertici propriamente detti nei vertici del cubo. Questo ***cubo troncato*** è formato da 14 facce, di cui 6 ottagoni regolari uguali e 8 triangoli equilateri uguali (Fig. 41).

Ma, lo ribadiamo, questi poliedri non sono regolari.

È evidente anche ad un osservatore distratto che una faccia pentagonale, nella figura 39, è meno estesa di una faccia esagonale, ma qual è, con approssimazione, il rapporto fra l'area di una faccia pentagonale e quella di una faccia esagonale?

Parimenti, con riferimento alla figura 40, qual è il rapporto fra un triangolo e un quadrato?
Quale, con riferimento alla figura 41, il rapporto fra un triangolo e un ottagono?

3. Il teorema di Monge [7].

ENUNCIATO. Siano tre cerchi complanari disuguali fra loro e non aventi parti in comune. Presi due a due, si traccino le rette tangenti comuni ad essi, ma in modo che, rispetto ad ogni tangente, i due cerchi coinvolti siano dalla stessa parte. I tre punti in cui s'incontrano le tre coppie di tangenti comuni sono allineati.
DIMOSTRAZIONE. Siano A, B, C i centri dei tre cerchi (Fig. 42). Le due rette tangenti ai cerchi di centri A e B s'incontrino nel punto P; quelle tangenti ai cerchi di centri B e C s'incontrino in Q e quelle tangenti ai cerchi di centri C ed A s'incontrino in R. Bisogna dimostrare che i punti P, Q, R sono allineati.

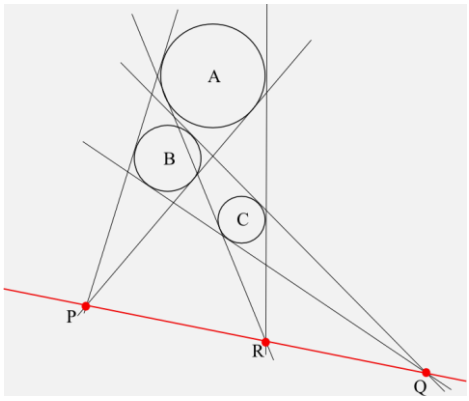

FIG. 42

Se i centri A, B, C fossero loro stessi allineati, se ne dedurrebbe banalmente che i punti P, Q, R si troverebbero sulla stessa retta di tali centri. Addirittura, in casi particolari, potrebbero coincidere.
Supponiamo pertanto che i centri A, B, C non siano allineati.
Questo teorema, pur essendo un teorema di geometria piana, ha un'elegante dimostrazione se si opera un'opportuna trasposizione nello spazio ordinario. Ed è proprio questa la ragione che ci ha indotto a proporlo, ancorché come lettura.
Consideriamo allora le tre sfere che hanno come cerchi massimi i tre cerchi dati. I tre angoli che contengono i cerchi, presi due a due, diventano adesso tre coni tangenti alle sfere, prese due a due. Questi coni hanno i vertici nei punti P, Q, R.
Consideriamo ora un piano α tangente alle tre sfere. Esso risulta anche tangente ai tre coni in una delle loro generatrici e pertanto passa per i loro vertici, ossia per i punti P, Q, R.
D'altro canto, il piano β dei tre punti A, B, C è piano di simmetria per la figura nel suo complesso e passa pertanto esso pure per i punti P, Q, R.
Ne discende che i punti P, Q, R appartengono all'intersezione dei due piani α, β, che com'è noto è una retta. I tre punti P, Q, R, sono perciò allineati.

[7] **Monge**, Gaspard, matematico francese, 1746-1818. Ebbe, fra le altre cose, il merito di aver saputo plasmare tutta una generazione di matematici che si segnalarono in special modo nell'elaborazione di testi scolastici di grande successo. Tra questi suoi allievi si ricorda in particolare Jean Baptiste Biot (1774-1862), forse più famoso per la celebre "legge di Biot e Savart" riguardante l'azione magnetica della corrente elettrica che fluisce in un filo metallico rettilineo.

4. Da Eulero a L'Huilier.

Abbiamo appreso (N° 48.4.2) che il numero f delle facce di un poliedro, il numero v dei suoi vertici e il numero s dei suoi spigoli sono legati dalla relazione di Eulero:

$$f + v = s + 2 \quad \text{o anche:} \quad f + v - s = 2.$$

Relazione che vale appunto per i poliedri, ma non per tutti i solidi geometrici che sono delimitati da facce poligonali. A titolo di esempio, consideriamo un solido avente la forma della cornice di un quadro (Fig. 43). Non ci vuol molto a capire che ha f=16 facce, v=16 vertici e s=32 spigoli. Ragion per cui risulta:

$$f + v - s = 0.$$

La differenza fra questo solido e un poliedro è che il poliedro non ha "buchi", mentre il solido in questione ne ha 1.

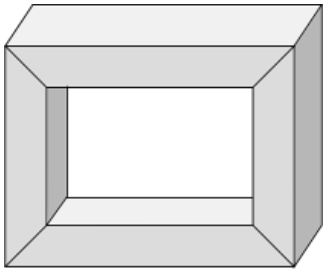

FIG. 43

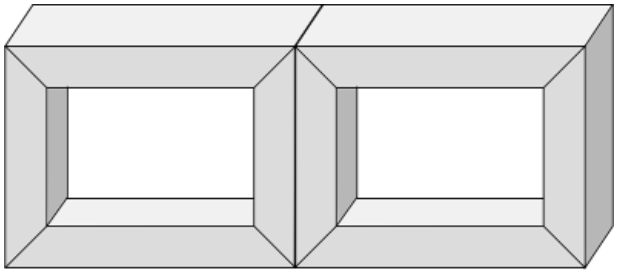

FIG. 44

Se poi si considera un solido avente la forma di una "doppia cornice" e perciò con 2 buchi (Fig. 44), si può spiegare che risulta:

$$f + v - s = -2.$$

In generale, se si considera un solido geometrico, delimitato da facce poligonali, con un numero b di buchi, vale la relazione seguente:

$$f + v - s = 2 - 2\,b.$$

Relazione che per b=0 si identifica ovviamente con la relazione di Eulero.
Questa relazione è stata scoperta dal matematico svizzero **Simon Antoine Jean L'Huilier** (1750-1840).