Prerequisiti:

- Possedere il concetto di limite di una funzione.
- Saper calcolare limiti di semplici funzioni.
- Possedere il concetto di funzione continua.

Questa unità riguarda tutte le scuole superiori: gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, i Licei nella 5ª classe.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire la definizione di derivata di una funzione ed elencare le derivate delle funzioni fondamentali*
- *distinguere fra derivata in un punto e funzione derivata*
- *fornire l'interpretazione geometrica e qualche interpretazione fisica della derivata di una funzione*
- *fornire qualche esempio di funzione non derivabile in un punto*
- *enunciare e usare le regole di derivazione, in particolare per il calcolo della derivata di una somma, un prodotto, un quoziente, una funzione composta, una funzione inversa*
- *dimostrare qualcuno dei teoremi sulle operazioni con le derivate*
- *calcolare derivate di funzioni e fornire spiegazioni esaurienti che giustificano il procedimento*
- *trovare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto*
- *calcolare derivate di funzioni utilizzando appositi software matematici*
- *spiegare il concetto di differenziale di una funzione*

Derivate
Unità 66

66.1 IL CONCETTO DI DERIVATA

66.1.1 In questa unità approfondiremo il concetto di derivata che adesso, con la definizione rigorosa di limite, ha una sicura base logica. Non ci preoccuperemo se a volte ripeteremo cose già dette in passato. Il nostro scopo è, in primo luogo, quello di metterti nelle migliori condizioni per un apprendimento efficace di uno degli argomenti fondamentali della matematica, e poi quello di procedere ad un consolidamento di quest'argomento.

Nel corso del 2° biennio (presumibilmente nel 4° anno [1]) hai imparato due cose importanti:

a) La pendenza di una curva di equazione y=f(x) nel suo generico punto di ascissa x, è espressa dal seguente limite:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,.$$
b) La velocità di un punto materiale, che si muove su una retta con la legge oraria x=x(t), nel generico istante t, è data dal seguente limite:
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\,.$$

Due questioni, apparentemente diverse, portano allo stesso modello matematico: *il calcolo di un particolare limite*.

Potremmo fornire altri esempi di situazioni che conducono allo stesso modello, ma questi bastano per far capire come nasca l'esigenza di affrontare e sviluppare l'argomento da un punto di vista generale, in astratto, per poterne poi applicare le conclusioni a tutti i casi concreti che si possono presentare.

66.1.2 Considerata una funzione y=f(x), il rapporto tra l'incremento f(x+h)−f(x), che subisce la funzione, quando x subisce l'incremento h, e lo stesso incremento h si chiama **rapporto incrementale** (o **saggio medio di variazione** o **pendenza media**) della funzione, relativo all'intervallo [x, x+h]. Esso è quindi l'espressione:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
ed è indicato pure in questo modo, mettendo Δx al posto di h:
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
o anche, in forma sintetica, con una delle scritture seguenti:
$$\frac{\Delta f}{h}\,,\ \frac{\Delta y}{h}\,,\ \frac{\Delta f}{\Delta x}\,,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$
Il limite, <u>se esiste finito</u>, del rapporto incrementale:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
si chiama **funzione derivata** di f(x) (o di y) rispetto ad x. Si chiama pure **saggio di variazione istantaneo** o **pendenza (locale)** della funzione e si indica con una delle seguenti scritture:
$$\mathbf{f'(x)},\ \ \mathbf{D_x f(x)},\ \ \mathbf{\frac{df}{dx}},\ \ \mathbf{y'},\ \ \mathbf{y'_x},\ \ \mathbf{\frac{dy}{dx}},\ \ \mathbf{D_x y};$$
a volte, in particolare quando la variabile x è uno spazio, funzione del tempo t, anche con $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$.

[1] Cfr.: Unità 51: Generalità sulle funzioni.

$f^{'}(x)$ si legge "f primo di x"; $\frac{df}{dx}$ si legge "df su dx";
$D_x f$ si legge "D x di f"; $\dot{x}(t)$ si legge "x punto di t".

Con riferimento ai due problemi con i quali abbiamo introdotto l'argomento, è chiaro quale sia il **significato geometrico** della derivata di una funzione e almeno un suo **significato fisico**. Significati che puoi esplicitare da solo.

Pensiamo invece che, quantunque tu la conosca già, sia opportuno ricordare la seguente regola, atta a determinare l'equazione della retta tangente ad una curva, di equazione assegnata, in un suo punto:

La **retta tangente** alla curva di equazione $y=f(x)$ nel suo punto $P\big(x_P, f(x_P)\big)$, supposto che la funzione $f(x)$ ammetta derivata in x_P, ha quest'equazione:

$$\mathbf{y - f(x_P) = f'(x_P)(x - x_P).}$$

66.1.3 Se la funzione f(x) ammette derivata in ogni punto x di un dato intervallo I allora si dice **derivabile** in I. In altri termini, posto che una funzione f(x) sia derivabile in un intervallo I:

La funzione derivata di $f(x)$ è quella funzione che ad ogni $x \in I$ associa $f'(x)$.

Sulla funzione derivata di f(x) si possono fare tutte quelle considerazioni che si fanno su una generica funzione. In particolare ci si può domandare se $f'(x)$ sia derivabile. Quando $f'(x)$ è derivabile in un intervallo I, si dice che f(x) è *derivabile due volte* in I e la derivata di $f'(x)$ si chiama **derivata seconda** di f(x). Si indica indifferentemente con una delle seguenti scritture:

$$\mathbf{f^{''}(x),\ \ D_x^2 f(x),\ \ \frac{d^2 f}{dx^2};}$$

oppure, se si è posto y=f(x), con una di queste altre scritture:

$$\mathbf{y^{''},\ \ y_x^{''},\ \ D_x^2 y,\ \ \frac{d^2 y}{dx^2};}$$

a volte, con riferimento alla funzione $x(t)$, anche con $\mathbf{\ddot{x}(t)}$.

Per uniformità di linguaggio, $f'(x)$ è chiamata, a volte, anche *derivata prima* di f(x).

Chiaramente la derivata seconda di una funzione misura il saggio di variazione istantaneo della derivata prima della funzione.

Generalizzando quanto detto per giungere alla derivata seconda, si può definire la **derivata n-esima** (o **di ordine n**) di una funzione y=f(x), che si indica indifferentemente con una delle seguenti scritture:

$$\mathbf{f^{(n)}(x),\ \ D_x^n f(x),\ \ \frac{d^n f}{dx^n},\ \ y^{(n)},\ \ y_x^{(n)},\ \ D_x^n y,\ \ \frac{d^n y}{dx^n}.}$$

Alcuni esercizi di verifica.

1) Con riferimento alla legge oraria $x=x(t)$ di un punto materiale che si muove su una retta, qual è il significato di $x^{''}(t)$?
2) Calcolare le derivate prima e seconda della funzione f(x), ricorrendo alla definizione di derivata e sapendo che:

   a) $f(x)=x^2-2x+1$. b) $f(x)=\frac{1}{x}$. c) $f(x)=\sqrt{x}$. d) $f(x)=x^3-x^2$.
3) Un corpo si trova nel punto O nell'istante 0. Cadendo liberamente da O, percorre lo spazio x nel tempo t. Si sa che è $x=\frac{1}{2}gt^2$, dove g è l'accelerazione di gravità ($g \approx 9{,}8\ m/s^2$). a) Trovare la legge che esprime la velocità v di caduta del corpo in funzione di t. b) Esprimere v in funzione di x e rappresentare

la legge ottenuta in un piano cartesiano in cui si prendono le x come ascisse e le v come ordinate.

66.1.4 Vogliamo mostrare adesso un esempio di funzione derivabile in un intervallo I, eccetto qualche punto dell'intervallo.

Per questo consideriamo la funzione: $y=|x^2-1|$. Osserviamo anzitutto che:

- se $x^2-1\geq 0$, ossia se $x\leq -1$ oppure $x\geq 1$, allora $|x^2-1|=x^2-1$;
- se $x^2-1<0$, ossia se $-1<x<1$, allora $|x^2-1|=-x^2+1$.

Pertanto la funzione può essere scritta nel modo seguente:

$$y=\begin{cases} x^2-1 \text{ se } x\leq -1 \text{ oppure } x\geq 1 \\ -x^2+1 \text{ se } -1<x<1 \end{cases}$$

Il suo andamento è noto (Fig. 1).

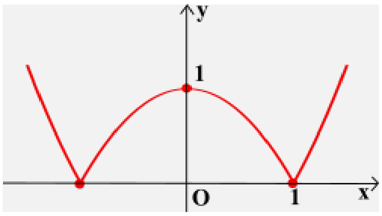

FIG. 1

Ora, è facile trovare la derivata y' nei punti $x\neq\pm 1$ e questo compito lo lasciamo a te; noi ci limitiamo a fornire il risultato:

$$y'=\begin{cases} 2x \text{ se } x<-1 \text{ oppure } x>1 \\ -2x \text{ se } -1<x<1 \end{cases}$$

Vediamo, invece, cosa succede nei punti 1 e –1. Partiamo dal punto 1, cominciando a calcolare il rapporto incrementale della funzione relativamente all'intervallo $[1,1+h]$:

$$\frac{\Delta y(1)}{h}=\frac{y(1+h)-y(1)}{h}=\frac{|(1+h)^2-1|-|1-1|}{h}=\frac{|h\,(2+h)|}{h}\ ;$$

si ha allora:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h\,(2+h)|}{h}=2, \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h\,(2+h)|}{h}=-2.$$

Non esiste, pertanto, $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y(1)}{h}$ e quindi non esiste $y'(1)$, cioè la funzione in esame non è derivabile nel punto 1. Siccome, però, esiste finito $\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y(1)}{h}$, si dice che la funzione è ***derivabile a destra*** nel punto 1 e questo limite si chiama **derivata destra** della funzione in 1 e si indica con la scrittura $y'_+(1)$.

Analogamente, siccome esiste finito $\lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y(1)}{h}$, si dice che la funzione è ***derivabile a sinistra*** nel punto 1 e questo limite si chiama **derivata sinistra** della funzione in 1 e si indica con la scrittura $y'_-(1)$.

Nel nostro caso è chiaramente: $y'_+(1)=2,\ y'_-(1)=-2$.

Ritornando all'interpretazione geometrica della derivata, questo significa che, di tangenti al grafico nel punto di ascissa 1 ve ne sono due: una di coefficiente angolare 2 ed una di coefficiente angolare –2. Le loro equazioni sono nell'ordine: $y=2x-2$, $y=-2x+2$.

Per cui, non si può parlare di pendenza della curva nel punto 1.

Il ragionamento potrebbe essere ripetuto tale e quale nel punto –1. Ma ciò non è necessario. Infatti, data la simmetria della funzione rispetto all'asse y, possiamo concludere che: $y'_+(-1)=-y'_+(1)=-2$,

$y'_-(-1)=-y'_-(-1)=2$. Anche adesso nel punto di ascissa -1 il grafico ha due tangenti; esse hanno equazioni: $y=-2x-2$, $y=2x+2$.

I punti nei quali il grafico ha due tangenti distinte, si dicono **punti angolosi**.

66.1.5 Non bisogna pensare che tali punti siano una prerogativa di funzioni "inventate" dai matematici. Essi esistono anche in funzioni che descrivono fenomeni naturali. Alcuni esempi.

- ESEMPIO 1. Riprendiamo il fenomeno esaminato nell'unità precedente, n. 65.3.2, esempio 1, ma adesso supponiamo di studiare come varia la temperatura T del corpo (1 kg di ghiaccio a –10°C ed alla pressione atmosferica) mentre assorbe calore Q. Ebbene, la fisica insegna che la sua temperatura T aumenta linearmente fino a 0°C, per mantenersi poi costantemente uguale a questo valore fintantoché tutto il ghiaccio non è fuso. L'andamento grafico del fenomeno (Fig. 2) mostra che il punto A, in cui il ghiaccio comincia a fondere, è un punto angoloso.

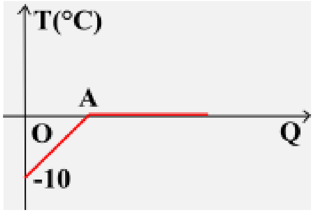

FIG. 2

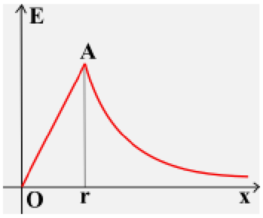

FIG. 3

- ESEMPIO 2. Riprendiamo il fenomeno esaminato nell'unità precedente, n. 65.3.2, esempio 2, ma adesso supponiamo che la sfera carica di elettricità sia di materiale dielettrico e sia uniformemente carica (in questo caso la carica elettrica è distribuita anche all'interno della sfera e non solo all'esterno come nel caso della sfera metallica). Ebbene, in tal caso il campo elettrico all'esterno della sfera non cambia il suo andamento, che cambia invece all'interno della sfera, essendo esso lineare e direttamente proporzionale alla distanza del punto che si considera dal centro della sfera. L'andamento grafico di E al variare della distanza x del punto dal centro della sfera (Fig. 3) mostra che il punto A, che segna il passaggio dall'interno della sfera all'esterno di essa, è un punto angoloso.
- ESEMPIO 3. Supponiamo che in un recipiente (Fig. 4) siano contenuti due liquidi non mescolabili e perciò aventi diverso peso specifico, per esempio acqua (peso specifico γ_1) e mercurio (peso specifico γ_2), per cui $\gamma_1<\gamma_2$. L'acqua occupi il recipiente per un'altezza h_1; il mercurio per un'altezza h_2. La pressione p esercitata su un piano orizzontale all'interno del liquido contenuto nel recipiente dipende dalla distanza H di questo piano dalla superficie libera del liquido, dove l'atmosfera esercita la pressione p_0. Un grafico (Fig. 5), evidenziando la variazione di p al variare di H, mostra pure che nel passaggio dall'acqua al mercurio c'è un punto angoloso.

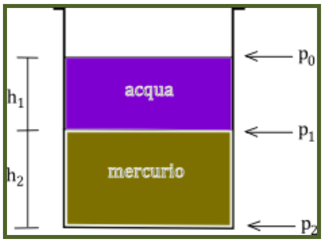

FIG. 4

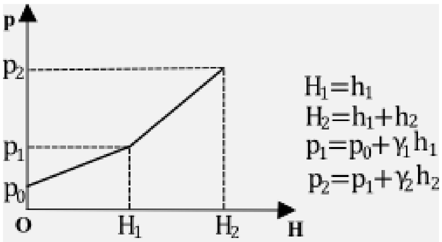

FIG. 5

66.1.6 Andiamo ad occuparci di due situazioni particolarmente interessanti.

- Consideriamo la funzione: $y=\sqrt[3]{x}$. Ricorrendo alla definizione si dimostra che è derivabile in ogni x reale diverso da 0. Infatti:

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}\ ;$$

siccome questo rapporto tende a $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per $h\to 0$, è chiaro che per $x\neq 0$ si ha: $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Osserviamo adesso che nel punto x=0 si ha:

$$\frac{\Delta y(0)}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}\ \text{ e perciò: }\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y(0)}{h}=+\infty\ .$$

Dobbiamo concludere che la funzione non è derivabile in 0. Tuttavia, con estensione di linguaggio, si dice che la derivata della funzione in 0 è ***infinita*** ed infinita è la sua pendenza in tale punto. Ma la funzione rimane ***non derivabile*** in 0.

Riprendendo il significato geometrico della derivata, osserviamo che in questo caso in cui $y'(0)=+\infty$ (ma questo vale anche quando la derivata è $-\infty$) il grafico (Fig. 6) presenta nel punto di ascissa 0 un'unica tangente, la quale risulta verticale ed attraversa la curva: si dice che il grafico presenta in quel punto un **flesso con tangente verticale**. Ritorneremo più avanti su questa faccenda dei "flessi".

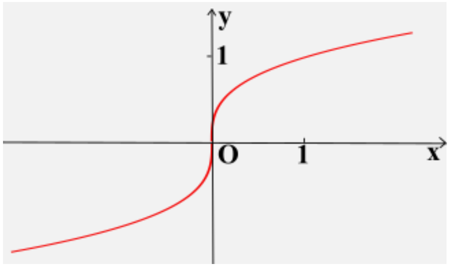

FIG. 6

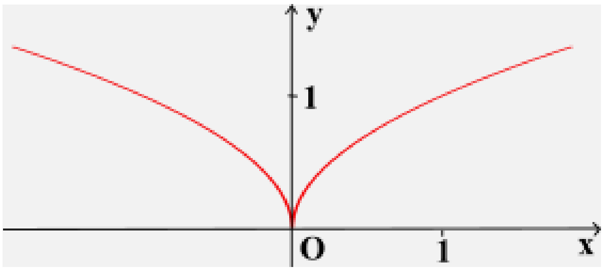

FIG. 7

- Consideriamo la funzione: $y=\sqrt{|x|}$. Anche questa funzione è derivabile in ogni $x\neq 0$ ma non è derivabile in 0. Infatti, dopo aver osservato che essa può mettersi in questa forma:

$$y=\begin{cases}\sqrt{-x} \text{ se } x<0\\ \sqrt{x} \text{ se } x\geq 0\end{cases}$$

si trova (ne lasciamo il compito a te):

$$y'=\begin{cases}-\frac{1}{2\sqrt{-x}} \text{ se } x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ se } x>0\end{cases}$$

Vediamo invece cosa succede nel punto 0. Anzitutto:

$$\frac{\Delta y(0)}{h}=\frac{y(0+h)-y(0)}{h}=\frac{\sqrt{|h|}}{h}\ .$$

Siccome per $h\to 0^+$ questo rapporto tende a $+\infty$, mentre per $h\to 0^-$ esso tende a $-\infty$, allora non esiste

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y(0)}{h}$, né finito né infinito. Quindi, non solo la funzione non è derivabile in 0, ma non ha neanche derivata infinita, giacché $y'_+(0)=+\infty$, $y'_-(0)=-\infty$.
Ai fini del significato geometrico, in questi casi in cui la derivata destra e la derivata sinistra sono infinite ma di segno opposto, il grafico (Fig. 7) presenta nel punto (quello di ascissa 0, nella fattispecie) un particolare punto angoloso, detto **cuspide**, nel quale ha un'unica tangente, che risulta verticale e per questo, con abuso di linguaggio, si dice che in quel punto la curva ha pendenza infinita.

66.1.7 Facciamo notare che le funzioni prese in esame nei precedenti paragrafi sono tutte continue su $\mathbb{R}$, pur essendo non derivabili in qualche punto di $\mathbb{R}$. Questo significa che:

Una funzione continua in un punto
può essere derivabile in quel punto ma può anche non esserlo.

Addirittura esistono funzioni continue su tutto l'asse reale ma non derivabili in alcun punto.
La prima di tali funzioni è stata costruita dal matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) e pubblicata nel 1875. Poi ne sarebbero state costruite altre.
La funzione di Weierstrass, indicata con W(x), è la seguente:

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x)\,,\quad x\in\mathbb{R},$$

dove a è un qualsiasi numero reale appartenente all'intervallo $]0,1[$ mentre b è un intero dispari tale che $b>1$ e $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.
Questa funzione è, per l'appunto, continua in ogni x reale, ma ogni suo punto è un punto angoloso e quindi in esso la funzione non è derivabile.

Ribadito dunque che una funzione continua in un punto può essere ivi derivabile o non esserlo, vale invece il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **Una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto.**
DIMOSTRAZIONE. Ammesso che f(x) sia una funzione derivabile in un punto a, risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a),$$

dove $f'(a)$ è un numero reale. Per dimostrare che f(x) è continua in a è sufficiente provare che:

$$\lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a)\big)=0.$$

Ora, per $h\neq 0$ si ha:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\,;$$

da qui, passando al limite per $h\to 0$, segue:

$$\lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a)\big)=f'(a)\cdot 0=0. \qquad [\text{c.v.d.}]$$

Considerando il contronominale del teorema, possiamo concludere senz'altro che:

Se una funzione non è continua in un punto, in quel punto non è derivabile.

Nei grafici sottostanti (Fig. 8) sono rappresentate tre funzioni continue nell'intervallo [0,2]. Prova a dire se sono anche derivabili in tale intervallo e fornisci una spiegazione esauriente della risposta.

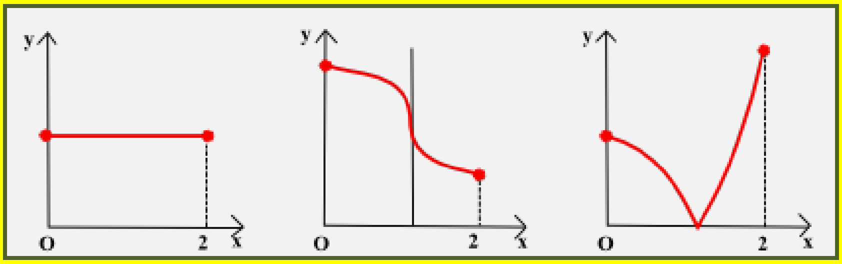

FIG. 8

66.2 REGOLE DI DERIVAZIONE

66.2.1 Il procedimento, basato sulla definizione, idoneo a calcolare la derivata di una funzione f(x) si chiama **derivazione**. Per quanto ne sai, questo procedimento richiede di:

1) costruire il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{h}$;

2) calcolare il limite di $\frac{\Delta f}{h}$ per $h \to 0$;

3) porre questo limite, se esiste finito, uguale ad $f'(x)$.

Ora, in certe situazioni, tale procedimento può essere molto lungo (vedi, al riguardo, i due esercizi trattati in 66.1.6). Può addirittura rivelarsi inefficace, nel senso che non permette di giungere a conclusione: pensa, tanto per fare un esempio, alla funzione $f(x) = \ln\cos x$ e immagina di doverne calcolare la derivata ricorrendo al procedimento su descritto. Non se ne viene fuori. Si preferisce allora seguire un'altra strada.

Grossomodo l'itinerario, che ricorda quello seguito a proposito dei limiti, è il seguente:

- si calcolano le derivate di alcune funzioni fondamentali, ricorrendo alla definizione;
- si dimostrano alcune regole, ricorrendo ancora alla definizione di derivata;
- si trovano le derivate di altre funzioni, utilizzando le regole e le derivate già note.

Di tutto questo ci occuperemo, per l'appunto, nel seguito del presente paragrafo 66.2 e nei successivi paragrafi 66.3 e 66.4.

66.2.2 DERIVATA DI UNA FUNZIONE COSTANTE**. La derivata di una funzione costante, f(x)=c, è 0:**

$$\mathbf{D_x\, c = 0}.$$

DIMOSTRAZIONE. La cosa s'intuisce facilmente: basta osservare che, al variare di x, f(x) è sempre uguale a c (Fig. 9) e perciò qualunque variazione di x non darà luogo ad alcuna variazione di f(x).

Questo ragionamento può anche essere formalizzato. Infatti:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0;$$

perciò:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = 0$$

e, di conseguenza: $D_x\, c = 0$.

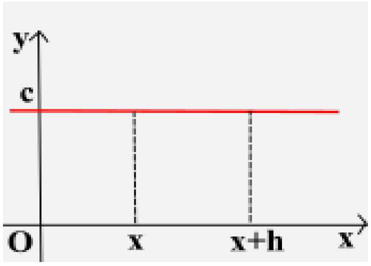

FIG. 9

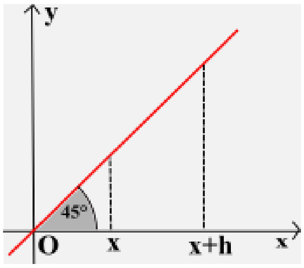

FIG. 10

66.2.3 DERIVATA DELLA FUNZIONE IDENTICA. **La derivata della funzione identica, f(x)=x, è 1:**

$$\mathbf{D_x\, x = 1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso il risultato è facilmente intuibile: basta ricordare che $f'(x)$ rappresenta la pendenza del grafico della funzione nel generico punto x e che, per la funzione f(x)=x, il cui grafico è la bisettrice del 1° e 3° quadrante (Fig. 10), la pendenza è costantemente uguale ad 1. Naturalmente, pure questo ragionamento può essere formalizzato. Infatti:

$$\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)-x}{h}=\frac{h}{h};$$

perciò:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=1$$

e, di conseguenza: $D_x\, x = 1$

66.2.4 DERIVATA DELLA FUNZIONE SENO. **La derivata della funzione seno, f(x)=sin x , è cos x :**

$$\mathbf{D_x \sin x = \cos x}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$$\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\cdot\sin x+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\,.$$

E siccome: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ e $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$, allora: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=\cos x$. Di conseguenza:

$$D_x \sin x = \cos x\,.$$

66.2.5 DERIVATA DELLA FUNZIONE COSENO. **La derivata della funzione coseno, f(x)=cos x, è –sin x :**

$$\mathbf{D_x \cos x = -\sin x}\,.$$

La dimostrazione è come la precedente e per questo la lasciamo a te per esercizio.

66.2.6 DERIVATA DELLA FUNZIONE LOGARITMO NATURALE. **La derivata della funzione logaritmo naturale, f(x)= ln x, è 1/x :**

$$\mathbf{D_x \ln x = \frac{1}{x}}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Incominciamo, come al solito, con il calcolo del rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{h}\cdot\ln\frac{x+h}{h}=\ln\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Siccome:

$$\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)=\frac{1}{x}\ln\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\ ,$$

allora: $D_x \ln x = \frac{1}{x}$.

66.2.7 DERIVATA DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE FUNZIONI. **Se $\mathbf{f(x)}$ e $\mathbf{g(x)}$ sono funzioni derivabili in uno stesso intervallo I allora per ogni x∈I risulta:**

$$\mathbf{D_x[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x).}$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto si ha:

$$\frac{\Delta[f(x)\pm g(x)]}{h}=\frac{[f(x+h)\pm g(x+h)]-[f(x)\pm g(x)]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ ;$$

siccome entrambe le funzioni f(x) e g(x) sono derivabili e perciò:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \text{ e } \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x),$$

allora: $D_x[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$.

La formula permette di calcolare la derivata della somma algebrica di un qualunque numero finito di funzioni. Basta tener presente la proprietà associativa dell'addizione.

Lo vediamo con un esempio.

- ESERCIZIO. Calcolare la derivata della funzione $y=x+\sin x-\cos x$.

RISOLUZIONE.

$$y'=D_x[(x+\sin x)-\cos x]=D_x(x+\sin x)-D_x\cos x=D_x x+D_x\sin x-D_x\cos x=1+\cos x+\sin x.$$

Nella pratica si saltano i passaggi intermedi e si scrive direttamente: $y'=1+\cos x+\sin x$.

66.2.8 DERIVATA DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI (O REGOLA DI LEIBNIZ). **Se $\mathbf{f(x)}$ e $\mathbf{g(x)}$ sono funzioni derivabili in uno stesso intervallo I allora per ogni x∈I risulta:**

$$\mathbf{D_x[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).}$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto si ha:

$$\frac{\Delta[f(x)g(x)]}{h}=\frac{[f(x+h)g(x+h)]-[f(x)g(x)]}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\ .$$

Siccome entrambe le funzioni f(x) e g(x) sono derivabili e perciò:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \text{ e } \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x),$$

e siccome la funzione g(x), in quanto derivabile, è anche continua e per questo g(x+h)→g(x) quando h→0, allora: $D_x[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

La regola di Leibniz permette di calcolare rapidamente la derivata del prodotto di un qualunque numero finito di funzioni. Basta tener presente la proprietà associativa della moltiplicazione.

Lo vediamo con un esempio.

ESERCIZIO. Calcolare la derivata della funzione $y = x\sin x\cos x$.

RISOLUZIONE. $y'=D_x[(x\sin x)\cos x]=\cos x\, D_x(x\sin x)+x\sin x\, D_x\cos x=$

$$= \cos x\,(\sin x\, D_x x + x\, D_x \sin x) + x \sin x\,(-\sin x) = \cos x \sin x + x \cos^2 x - x \sin^2 x\ .$$

Nella pratica i passaggi intermedi si saltano e si va direttamente alla conclusione. In questo modo:

$$y' = (D_x x)\sin x \cos x + x(D_x \sin x)\cos x + x \sin x\,(D_x \cos x) = \ldots.$$

Detto per completezza, la derivata trovata si può mettere anche in questa forma:

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x\,.$$

Sai spiegare perché?

Un caso particolare della formula del prodotto è quello che esprime la DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE:

$$\mathbf{D_x[k\,f(x)] = k\,f'(x)}.$$

Ne lasciamo a te la spiegazione. Ugualmente lasciamo a te la spiegazione della seguente formula:

$$\mathbf{D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}\,.$$

Ti proponiamo adesso un esercizio da risolvere.

ESERCIZIO. Considerate le funzioni:

a) $f(x)=(2x^2+1)(3x-2)$, b) $f(x)=(\cos x+1)(\sin x+1)$,

calcolarne le derivate rispetto ad x sia utilizzando la regola del prodotto sia utilizzando lo sviluppo algebrico delle funzioni medesime. Verificare che i risultati coincidono.

66.2.9 DERIVATA DELLA FUNZIONE x^n, CON $n \in \mathbb{N}_0$. **La derivata della funzione x^n è $n\,x^{n-1}$:**

$$\mathbf{D_x\, x^n = n\, x^{n-1}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto sappiamo che $D_x x=1$ o, scritta in forma equivalente: $D_x x=1x^0$.

Si giustifica poi facilmente (lo lasciamo fare a te per esercizio) che:

$$D_x\, x^2 = 2\,x^1,\quad D_x\, x^3 = 3\,x^2,\quad D_x\, x^4 = 4\,x^3.$$

Generalizzando, possiamo ipotizzare che, per ogni intero positivo n, risulti:

$$D_x\, x^n = n\, x^{n-1}.$$

Per provarlo ricorriamo al principio d'induzione matematica. Avendo visto che la formula è vera per $n=1$, è sufficiente dimostrare che, se essa è vera quando ad n si assegna il valore k, è pure vera quando ad n si assegna $k+1$. Di fatto:

$$D_x\, x^{k+1} = D_x\left(x^k \cdot x\right) = \left(D_x\, x^k\right)\cdot x + x^k \cdot D_x\, x = x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k.$$

Per esempio, considerata la funzione:

$$y = x^4 - 2x^3 + 3,$$

utilizzando regole e formule fin qui acquisite, risulta immediatamente:

$$y' = 4x^3 - 6x^2.$$

66.2.10 DERIVATA DEL QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI. **Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili in uno stesso intervallo I allora per ogni $x \in I$, in cui si abbia, però, $g(x) \neq 0$, risulta:**

$$\mathbf{D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto, indicata per comodità con $F(x)$ la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$, si ha:

$$\frac{\Delta F}{h}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}=$$

$$=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)\text{-}f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].$$

Siccome le funzioni f(x) e g(x) sono derivabili e perciò:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \text{ e } \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

e siccome la funzione g(x), in quanto derivabile, è anche continua e per questo $g(x+h)\to g(x)$ quando $h\to 0$, allora:

$$D_x\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

- Come prima applicazione di questa formula, dimostriamo che:

$$\mathbf{D_x \tan x=\frac{1}{\cos^2 x}}.$$

Infatti:

$$D_x\tan x=D_x\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

- Un altro esempio, in cui calcoliamo le derivate prima e seconda della funzione:

$$y=\frac{x^2}{x-1}.$$

Si ha:

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\ ;\quad y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

66.3. DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

66.3.1 Conosci, dagli studi passati, il concetto di "funzione composta", per cui non riteniamo necessario dilungarci su di esso, salvo proporre qualche esempio di funzione composta. In particolare:

- la funzione $y=\sqrt{x^3+1}$ è composta dalle funzioni $y=\sqrt{t}$ e $t=x^3+1$;
- la funzione $y=\sin^3 x$ è composta dalle funzioni $y=t^3$ e $t=\sin x$;
- la funzione $y=\sin^2 2x$ è composta dalle funzioni $y=t^2$, $t=\sin u$, $u=2x$;
- la funzione $y=\ln^2(1+e^x)$ è composta dalle funzioni $y=t^2$, $t=\ln u$, $u=1+e^x$.

65.3.2 REGOLA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE (O REGOLA DELLA CATENA). **Se la funzione y=f(x) è composta dalle funzioni y=f(t) e t=g(x) e se le due funzioni componenti sono derivabili, ciascuna rispetto alla propria variabile indipendente, allora anche la funzione y=f(x) è derivabile rispetto ad x e risulta:**

$$\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}}.$$

Tralasciamo la dimostrazione per soffermarci invece su alcune sue applicazioni.

- Incominciamo ad applicarla per calcolare la derivata della funzione $y=(2x^2+1)^3$, la quale può essere pensata composta dalle funzioni $y=t^3$ e $t=2x^2+1$. Per cui:

$$y'(x) = y'(t)\cdot t'(x) = 3t^2\cdot 4x = 12x(2x^2+1)^2.$$

Nella pratica i passaggi intermedi vengono sottintesi e si scrive subito:

$$y'(x) = 3(2x^2+1)^2\cdot 4x = 12x(2x^2+1)^2.$$

- Un altro esempio. Considerata la funzione $y=\sin^2 x$, composta dalle funzioni $y=t^2$ e $t=\sin x$:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x\,.$$

- Ancora un esempio. Data la funzione $y=\ln\cos x$, composta dalle funzioni $y=\ln t$ e $t=\cos x$:

$$y' = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\tan x\,.$$

Ricorderai come di questa funzione abbiamo sottolineato le difficoltà insormontabili qualora si volesse calcolarne la derivata col ricorso alla definizione.

ESERCIZI.

1. Considerate le funzioni:

a) $f(x)=(x^2+1)(x-2)^2$, b) $f(x)=(\sin x+1)^3$,

calcolarne le derivate rispetto ad x sia utilizzando la regola della catena sia utilizzando lo sviluppo algebrico delle funzioni medesime. Verificare che i risultati coincidono.

2. Considerata la funzione:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

determinare il suo dominio e calcolare la sua derivata rispetto ad x.

[**R.** Conviene prendere in considerazione il logaritmo naturale di entrambi i membri e calcolare le derivate dei due membri … . Si ottiene: $f'(x)=(1/x)^x(\ln(1/x)-1)$]

3. Un punto materiale si muove su una retta secondo la seguente legge oraria:

$$x = r\sin\omega t.$$

Dimostrare che la rappresentazione grafica dei punti (x,v), dove v è la velocità del punto è un’ellisse di semiassi r e ωr. Spiegare come varia v al variare di x.

La “regola della catena”, applicata in successione, permette di calcolare la derivata di una funzione composta da più di due funzioni componenti.

Lo vediamo con un esempio.

La funzione $y=\sin^2 2x$ può essere pensata composta dalle funzioni $y=t^2$ e $t=\sin 2x$; per cui:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\,.$$

D’altra parte la funzione $t=\sin 2x$ può essere pensata composta dalle funzioni $t=\sin u$ ed $u=2x$; di modo che:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,.$$

Infine:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,.$$

Pertanto, ritornando alla funzione $y=\sin^2 2x$:

$$y'(x)=y'(t)\cdot t'(u)\cdot u'(x)=2t\cdot\cos u\cdot 2=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x\,.$$

Anche in questo caso, nella pratica si possono sottintendere i passaggi intermedi e scrivere:

$$y' = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = \dots .$$

66.3.3 La regola della catena permette di trovare subito la derivata della funzione x^a, dove $a \in \mathbb{R}_0$ e il dominio della funzione è l'insieme $\mathbb{R}_0^+$ dei numeri reali positivi. Si ha, precisamente, che:

$$\mathbf{D_x\, x^a = a\, x^{a-1}}.$$

Osserviamo anzitutto che la funzione x^a è definita per $x>0$. Ora, siccome $\ln x^a = a \ln x$ allora $x^a = e^{a \ln x}$, per cui: $x^a = e^t$, dove $t = a \ln x$. Insomma la funzione $y=x^a$ è una funzione composta dalle funzioni $y=e^t$ e $t=a\ln x$. Dal momento che le due funzioni e^t ed $a \ln x$ sono entrambe derivabili rispetto alla loro variabile indipendente allora anche la funzione x^a è derivabile rispetto ad x e risulta:

$$D_x\, x^a = D_t\, e^t \cdot D_x\, (a \ln x) = e^t \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a\, x^{a-1}.$$

♦ In particolare, come puoi dimostrare da solo per esercizio:

$$\mathbf{D_x \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

66.4 FUNZIONI INVERTIBILI E LORO DERIVATE

66.4.1 Come quello di funzione composta, anche il concetto di "funzione invertibile" ti è noto dagli studi condotti negli anni passati. Per cui non ci dilunghiamo su di esso. Salvo per ricordare un fatto importante:

> Se $y=f(x)$ è una funzione invertibile, la sua inversa si indica con la scrittura $x=f^{-1}(y)$ e i grafici di queste due funzioni coincidono giacché si tratta di due modi diversi di indicare la stessa funzione. Se però nella funzione inversa si opera uno scambio di variabili fra x ed y, per cui la funzione inversa è indicata adesso con $y=f^{-1}(x)$, allora il grafico di f e quello di f^{-1} sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice $y=x$ del 1° e 3° quadrante degli assi di riferimento.

Si dimostra (cosa che però non facciamo) la seguente proprietà:

Se una funzione $y=f(x)$ è invertibile e continua in un intervallo I, la sua inversa $y=f^{-1}(x)$ è continua nell'intervallo J, immagine di I nella f.

66.4.2 Tra le funzioni invertibili ricordiamo le seguenti:

- La **funzione esponenziale**: $y=a^x$, dove a è un numero reale positivo diverso da 1.
  La sua inversa, con lo scambio di variabili fra x ed y, è la funzione logaritmo: $y=\log_a x$.
- La **funzione tangente**: $y=\tan x$, con $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ed $y \in \mathbb{R}$.
  La sua funzione inversa è la funzione arcotangente che, con lo scambio di variabili fra x ed y, si indica con: $\mathbf{y = atan\, x}$, dove $x \in \mathbb{R}$ ed $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
  Come noto, invece di **atan x** si scrive a volte **arctan x** o anche **arctg x**, oppure **atan(x)** e simili.
- La **funzione seno**: $y=\sin x$, con $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ed $y \in [-1,1]$.
  La sua funzione inversa è la funzione **arcoseno** che, con lo scambio di variabili fra x ed y, si indica così: $\mathbf{y = asin\, x}$, dove $x \in [-1,1]$ ed $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  Al posto di **asin x** si scrive a volte **arcsin x** o anche **arcsen x**, oppure **asin(x)** e simili.

- La **funzione coseno**: $y = \cos x$, con $x \in [0, \pi]$ ed $y \in [-1,1]$.
  La sua funzione inversa è la funzione **arcocoseno** che, con lo scambio di variabili fra x ed y, si indica così: $\mathbf{y = acos\, x}$, dove $x \in [-1,1]$ ed $y \in [0, \pi]$.
  Al posto di $\mathbf{acos\, x}$ si scrive a volte $\mathbf{acos(x)}$ o anche **arccos x** oppure **arccos(x)**.

66.4.3 Prima di procedere ti proponiamo di risolvere le seguenti questioni, senza l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico. Ti ricordiamo che esercizi analoghi abbiamo proposto in passato.

a) Semplificare le seguenti espressioni:

$$\operatorname{asin}\frac{1}{2}+\operatorname{acos}\frac{1}{2};\quad \operatorname{asin}\frac{2}{3}+\operatorname{acos}\frac{2}{3};\quad \operatorname{asin}\left(-\frac{1}{3}\right)+\operatorname{acos}\left(-\frac{1}{3}\right);$$

$$\operatorname{atan}2-\operatorname{atan}\frac{1}{3};\quad \operatorname{atan}\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{atan}\frac{\sqrt{3}}{5};\quad \operatorname{atan}\frac{2\sqrt{3}}{3}-\operatorname{atan}\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

b) Dimostrare che si ha:

$$\operatorname{asin}\frac{3}{5}+\operatorname{acos}\frac{4}{5}=\operatorname{asin}\frac{24}{25};\quad \operatorname{asin}\frac{4}{5}-\operatorname{asin}\frac{5}{13}=\operatorname{acos}\frac{56}{65};\quad \operatorname{atan}3-\operatorname{atan}2=\operatorname{atan}\frac{1}{7}.$$

c) Calcolare il valore di x per cui si ha:

$$\operatorname{asin}x=2\operatorname{asin}\frac{3}{5};\quad \operatorname{acos}x=2\operatorname{acos}\frac{3}{5};\quad \operatorname{atan}x=2\operatorname{atan}\frac{1}{2}.$$

66.4.4 REGOLA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERTIBILI. **Se y=y(x) è una funzione invertibile e se la funzione inversa x=x(y) è derivabile rispetto ad y allora anche y=y(x) è derivabile rispetto ad x e si ha:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Questo naturalmente quando $\frac{dx}{dy}\neq 0$**. Se invece** $\frac{dx}{dy}=0$ **allora** $\frac{dy}{dx}$ **è infinita.**

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che si ha identicamente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

dove Δx è l'incremento che subisce la variabile x(y) quando y subisce l'incremento Δy. Ossia: $\Delta x = x(y+\Delta y) - x(y)$. Ora, siccome la funzione x(y) è derivabile e perciò continua, quando $\Delta y \to 0$ anche $\Delta x \to 0$. Sicché:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

D'altronde: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ e $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{dx}{dy}$. La regola enunciata è perciò dimostrata.

66.4.5 La vogliamo applicare per giustificare le seguenti derivate:

$$\mathbf{D_x\, a^x = a^x \ln a},\quad \mathbf{D_x\, atan\, x=\frac{1}{1+x^2}},\quad \mathbf{D_x\, asin\, x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}},\quad \mathbf{D_x\, acos\, x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

- Considerata la funzione $y=a^x$, dove a è un numero reale positivo, diverso da 1, la sua inversa è la funzione $x=\log_a y$, con $x\in\mathbb{R}$ ed $y\in\mathbb{R}_0^+$. Si ha:

$$D_x\, a^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Nel caso particolare in cui a=e, dove "e" è la base dei logaritmi naturali, ricordando che $\ln e = 1$, si ha:

$$\mathbf{D_x\, e^x = e^x}.$$

La funzione e^x è l'unica funzione (a meno di una costante moltiplicativa) che, derivata, riproduce se stessa: $D_x(ke^x) = ke^x$.

- Considerata la funzione $y = \operatorname{atan} x$ e la sua inversa $x = \tan y$, con $x \in \mathbb{R}$ ed $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, si ha:

$$D_x \operatorname{atan} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Considerata la funzione $y = \operatorname{asin} x$ e la sua inversa $x = \sin y$, con $x \in [-1,1]$ ed $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha:

$$D_x \operatorname{asin} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Considerata la funzione $y = \operatorname{acos} x$ e la sua inversa $x = \cos y$, con $x \in [-1,1]$ ed $y \in [0, \pi]$, si ha:

$$D_x \operatorname{acos} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ESERCIZIO. Sono date le due curve k_1 e k_2 di equazioni rispettivamente $y=2^x$ e $y=3^x$.

1. A) Spiega in maniera rigorosa ed esauriente che esse si intersecano in uno ed un sol punto P: trova le coordinate di P.
   B) Trova le equazioni delle rette tangenti t_1 e t_2 alle due curve in P.
   C) Disegna le due curve sullo stesso riferimento cartesiano.
2. A) Dalla rappresentazione grafica delle due curve s'intuisce che nel punto P la pendenza della curva k_1 è minore di quella della curva k_2: dimostralo formalmente.
   B) Mediante l'uso, se occorre, di una calcolatrice scientifica, calcola l'ampiezza dell'angolo delle due tangenti t_1 e t_2, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata ai secondi.

66.5 QUADRO RIASSUNTIVO DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

66.5.1 Al giorno d'oggi esistono software matematici in grado di calcolare la derivata di una qualsiasi funzione, ma non per questo bisogna rinunciare a ragionare con la propria testa. Ora, questi ragionamenti sono basati sul presupposto che siano conosciute e possibilmente memorizzate alcune derivate fondamentali. La seguente tabella le riassume. È strutturata su due colonne: nella prima vi sono riportate le funzioni prese in considerazione, nella seconda le rispettive derivate.
Memorizzarle non è difficile e rende più immediato il loro uso all'occorrenza.

QUADRO DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

FUNZIONE	DERIVATA	FUNZIONE	DERIVATA	FUNZIONE	DERIVATA
x^a	$a\,x^{a-1}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$
$\operatorname{atan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{asin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{acos} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

66.5.2 Quando diciamo che «esistono software matematici in grado di calcolare la derivata di una qualsiasi funzione», intendiamo riferirci a funzioni assegnate esplicitamente. Possono presentarsi infatti questioni in cui la presenza di funzioni non esplicitate rende ininfluente l'uso di strumenti informatici. Eccone un esempio, tratto dalla prova assegnata nell'esame di Stato 2013, indirizzo scientifico sperimentale, sessione ordinaria.

QUESITO. Se la funzione $f(x)-f(2x)$ ha derivata 5 in $x=1$ e derivata 7 in $x=2$, qual è la derivata di $f(x)-f(4x)$ in $x=1$?

RISOLUZIONE. Posto $A(x)=f(x)-f(2x)$ e $B(x)=f(x)-f(4x)$ e constatato che $A(2x)=f(2x)-f(4x)$ e perciò $f(4x)=f(2x)-A(2x)$, risulta: $B(x)=A(x)+A(2x)$. Ora, sappiamo che per $x=1$ esiste la derivata di $A(x)$ ed è uguale a 5. Dimostriamo che, sempre per $x=1$, esiste anche la derivata di $A(2x)$.

Incominciamo a calcolare il rapporto incrementale di $A(2x)$ in $x=1$. Si ha:

$$\frac{\Delta A(2)}{h}=\frac{A\big(2(1+h)\big)-A(2)}{h}=2\cdot\frac{A(2+2h)-A(2)}{2h}.$$

D'altro canto, posto $2h=k$ e constatato che $k\to0$ per $h\to0$:

$$\lim_{2h\to0}\frac{A(2+2h)-A(2)}{2h}=\lim_{k\to0}\frac{A(2+k)-A(2)}{k}.$$

Ma questo limite è la derivata di $A(x)$ per $x=2$, che sappiamo esistere ed essere uguale a 7. Per cui esiste la derivata di $A(2x)$ per $x=1$ ed è uguale $2\cdot7$ cioè 14.

In altro modo, anche più rapido: la funzione $A(2x)$ può essere considerata come funzione composta di $A(y)$ e $y=2x$. Siccome $y=2x$ è derivabile per $x=1$ ed è $y'(1)=2$ e siccome $A(y)$ è derivabile per $y=2$ ed è $A'(2)=7$, allora la derivata di $A(2x)$ per $x=1$ è $2\cdot A'(2)$, vale a dire $2\cdot7$, cioè 14. Come sopra.

In definitiva, per $x=1$ esiste la derivata di $B(x)$, vale a dire di $f(x)-f(4x)$, ed è uguale a $5+14$ cioè 19.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Qualcuno potrebbe pensare al seguente procedimento alternativo.

Posto $A(x)=f(x)-f(2x)$ e $B(x)=f(x)-f(4x)$, si calcolano anzitutto le derivate di $A(x)$ per $x=1$ e per $x=2$. Si trova: $A'(1)=f'(1)-2f'(2)$, $A'(2)=f'(2)-2f'(4)$. Da qui, tenendo presente che $A'(1)=5$ e $A'(2)=7$, calcolando $f'(2)$ da entrambe le relazioni e confrontando, segue:

$$\frac{1}{2}\big(f'(1)-5\big)=2f'(4)-7 \quad \text{e perciò:} \quad f'(4)=\frac{1}{4}\big(f'(1)-19\big).$$

D'altro canto, calcolando la derivata di $B(x)$ per $x=1$, si ha:

$$B'(1)=f'(1)-4f'(4)=f'(1)-4\cdot\frac{1}{4}\big(f'(1)-19\big)=19.$$

Si troverebbe così lo stesso risultato ottenuto con l'altro procedimento. Ciò non di meno questo nuovo procedimento non è corretto. Esso è basato sull'ipotesi che non solo A(x) e B(x) siano derivabili per x=1 e/o per x=2, ma che lo siano anche f(x), f(2x) ed f(4x). Cosa questa non vera. La traccia infatti garantisce solamente che siano derivabili A(x) e B(x), non altro.
Questo secondo procedimento tuttavia acquisirebbe legittimazione se, oltre alle ipotesi date, si ammettesse che una delle tre funzioni f(x), f(2x) o f(4x) sia derivabile per x=1. In tal caso, infatti, si potrebbe dimostrare facilmente che anche le altre due lo sarebbero.

66.6 DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

66.6.1 Consideriamo la funzione f(x), derivabile in un intervallo I e sia G il suo grafico (Fig. 11).
Preso in I un punto x ed attribuito ad x l'incremento Δx in modo che anche x+Δx appartenga ad I, la funzione f(x) subisce l'incremento Δf=f(x+Δx)–f(x), che in figura è rappresentato dalla misura del segmento orientato (R,Q). Dunque: RQ=Δf.

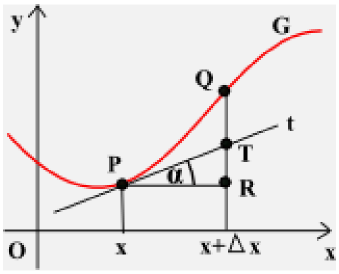

FIG. 11

Nel contempo l'ordinata del punto della tangente t a G in $P\big(x, f(x)\big)$ subisce l'incremento:

$$RT = PR\tan\alpha = f'(x)\Delta x.$$

Indichiamo questo incremento con df. Dunque: RT=df.
Siccome chiaramente RT+TQ=RQ, si ha: TQ=Δf–df. Inoltre:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{TQ}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x)\right) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Questo, all'atto pratico, vuol dire che, quando Δx è molto piccolo, si può sostituire Δf con $df = f'(x)\Delta x$, commettendo in tal modo un errore trascurabile. Per cui si ha:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \text{ o anche: } f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

- Un esempio, in cui si pone $\Delta f \approx f'(x)\Delta x$.

  Una lamina quadrata di alluminio ha il lato di 50 cm. Viene riscaldata da 0°C a 40°C. Si sa che ogni lato della lamina si allunga secondo la legge:

  $$L = L_0(1+\lambda t),$$

  dove $\lambda = 2{,}4\cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$ è il coefficiente di allungamento, L_0 è la lunghezza del lato a 0°C, cioè $L_0 = 50$ cm, ed L è quella a t°C. Si vuole determinare di quanto si dilatata la lamina.

  La dilatazione ΔS della lamina può essere equiparata all'incremento della funzione $f(L)=L^2$ per L=50 cm e $\Delta L=50\,(1+40\,\lambda)-50=50\cdot 40\,\lambda=4{,}8\cdot 10^{-2}$ (cm). Pertanto, siccome: $f'(L)=2L$, si ha:

  $$\Delta S = f'(50)\cdot\Delta L = 2\cdot 50\cdot 4{,}8\cdot 10^{-2} = 4{,}8\ (cm^2).$$

- Un secondo esempio, in cui si pone $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.

Con riferimento alla funzione $f(x)=\sin x$, per valori molto piccoli di α (supponiamo che gli angoli siano misurati in radianti), osservato che $f'(x)=\cos x$, si ha:

$$\sin(x+\alpha)\approx \sin x+\cos x\cdot\alpha.$$

In particolare:

- se $x=\frac{\pi}{6}$ ed $\alpha=\frac{\pi}{180}$ si ha: $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0{,}5151$;
- se $x=0$ allora (sempre per piccoli α): $\sin\alpha\approx\alpha$.

66.6.2 La quantità:

$$df = f'(x)\Delta x$$

si chiama **differenziale** di f(x). Quanto esposto prima ne chiarisce il **significato geometrico**.

Osserviamo adesso che se $f(x)=x$, risulta: $dx=1\cdot\Delta x$ e perciò: $dx=\Delta x$; per cui il differenziale della variabile indipendente si identifica con l'incremento che subisce la variabile stessa (Fig. 12).

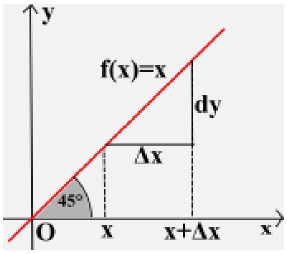

FIG. 12

Questo fatto permette di scrivere il differenziale di una funzione f(x) in questo modo:

$$\mathbf{df = f'(x)dx}$$

oppure, se $y=f(x)$, anche in questi altri modi:

$$\mathbf{dy = f'(x)dx},\quad \mathbf{df = y'dx},\quad \mathbf{dy = y'dx}.$$

I vari modi di scrivere il differenziale di una funzione esprimono due fatti importanti, l'uno inverso dell'altro:

- Il differenziale di una funzione è uguale al prodotto della derivata della funzione per il differenziale della variabile indipendente.
- La derivata di una funzione è uguale al rapporto tra il differenziale della variabile indipendente e quello della variabile dipendente.

VERIFICHE

Risolvere le seguenti questioni riguardanti il concetto di derivata (nn. 1- 7):

1. È assegnata la funzione $y=\sqrt{x^2-1}$. Calcolare:
   a) la pendenza media del suo grafico relativamente all'intervallo [1,3];
   b) la pendenza nel punto di ascissa 2;
   c) la pendenza nel punto di ascissa generica x.

2. È assegnata la funzione $y=1/x^2$. Calcolare:
   a) la pendenza media del suo grafico relativamente all'intervallo [1,2];

b) la pendenza nel punto di ascissa 2;
c) la pendenza nel punto di ascissa generica x.

3. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione $x^2+y^2=k$, dove k è un parametro reale positivo. Calcolare la pendenza di una qualunque di esse in un suo punto di ascissa assegnata x e verificare che è uguale a $-x/y$.

4. Un punto materiale si muove su una retta con la seguente legge oraria: $s=2t^3-6t^2+6t$, con $t\geq 0$.
a) Determinare la sua velocità e la sua accelerazione nel generico istante t.
b) Dopo aver stabilito che il corpo non inverte mai il suo moto, calcolare la sua velocità media nell'intervallo [0,2].

5. La quantità q di elettricità che attraversa la sezione di un conduttore è espressa dalla seguente legge: $q=3\sin t$, con $t\geq 0$. Trovare la legge che esprime l'intensità $i(t)$ di corrente che fluisce nel conduttore al variare di t.

6. La funzione f(x) è tale che f(2)=0.
1. Fornire un esempio di funzione f(x) che nel punto x=2 sia:
   A) continua e derivabile;
   B) continua ma non derivabile;
   C) non continua.
2. A) Spiegare perché nel caso 1C la funzione proposta è anche non derivabile.
   B) Dimostrare che non esiste alcuna funzione che, in un determinato punto, sia derivabile ma non continua.

7. Sono date le seguenti funzioni:
a) $f(x)=|x|+x$, b) $f(x)=|x^2+1|$, c) $f(x)=x\,|x-1|$,
d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} \text{ se } x\neq 1\\ 3 \text{ se } x=1\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} \text{ se } x\neq 0\\ 0 \text{ se } x=0\end{cases}$
Dopo aver stabilito se sono continue in ogni x reale, determinare se sono derivabili in ogni x reale.

Ricorrendo alle regole di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni rispetto alla variabile x e controllare l'esattezza del risultato per mezzo di un software matematico (nn. 8-22):

8. $\sin x+\cos x$.
9. $\sin x\cos x$.
10. $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.
11. x^4-2x.
12. $3x^2-4x+2$.
13. $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+2x$.
14. $x+\ln x$.
15. $x^2\log_2 x$.
16. $x\sin x+\ln x$.
17. $\dfrac{1}{x+1}$.
18. $\dfrac{x-1}{x^2}$.
19. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$.
20. $\dfrac{x-1}{x^3}$.
21. $\dfrac{2x-1}{2x^3}$.
22. $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Ricorrendo, se occorre, alla regola di derivazione di una funzione composta, calcolare le derivate prima e seconda delle seguenti funzioni nella variabile x e controllare l'esattezza del risultato per mezzo di un software matematico (nn. 23-38):

23. $(x^2+2)^{25}$.
24. $\sin^2 5x$.
25. $\sin^2 x+\sin 2x$.

26. $e^{1/x}$.

27. $\dfrac{1}{x^2+1}$.

28. e^{-x^2}.

29. $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

30. $\dfrac{x^3}{2x^2-1}$.

31. $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

32. $\dfrac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)}$.

33. $\sin^3 x+\cos^3 x$.

34. $\dfrac{2}{\sin 2x}$.

35. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$.

36. $\dfrac{2x}{x^2+x-1}$.

37. $\sqrt{1-x^2}$.

38. $\sqrt{\dfrac{x^3+2}{x}}$.

Tenendo presenti le derivate delle funzioni circolari inverse, oltre alla regola di derivazione di una funzione composta, calcolare le derivate prima e seconda delle seguenti funzioni rispetto alla variabile x e controllare l'esattezza del risultato mediante un software matematico (nn. 39-44):

39. $\operatorname{asin} 2x$.

40. $\operatorname{acos} 2x$.

41. $\operatorname{atan}(-2x)$.

42. $\operatorname{asin}\sqrt{x}$.

43. $\operatorname{acos}(x^2+1)$.

44. $\operatorname{atan}(3x-1)$.

Questioni varie (nn. 45-59):

45. Un punto materiale si muove su una retta con la seguente legge oraria (è la nota legge del *moto armonico*): $x=k\sin(\omega t+\alpha)$, con $t\geq 0$, dove k, ω, α sono costanti rispetto alla variabile t.

a) Calcolare la velocità v e l'accelerazione a del punto nel generico istante t.

b) Descrivere la curva che rappresenta i punti (x,v) e quella che rappresenta i punti (v,a).

c) Descrivere la variazione di v rispetto ad x e quella di a rispetto a v.

10. La legge oraria di un moto armonico semplice è, come noto, una funzione sinusoidale dello spazio x rispetto al tempo t. Si supponga che il periodo di oscillazione sia di 5 secondi e che l'ampiezza massima sia di 21 cm. Posto che sia $x(0)=20$ cm, trovare l'espressione della velocità del moto nel generico istante t. $\left[\textbf{R.}\ v=-14\,\pi\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)\right.$, dove v è misurata in centimetri al secondo e t in secondi$\left.\right]$

11. Il periodo T di oscillazione di un pendolo semplice dipende dalla lunghezza L del pendolo secondo la seguente legge:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove g è l'accelerazione di gravità, che è indipendente da L. Calcolare il saggio di variazione istantaneo di T al variare di L.

12. La forza F di attrazione di due masse puntiformi M, m dipende dalla distanza d delle masse secondo la seguente legge (è la nota *legge della gravitazione universale*):

$$F=G\frac{Mm}{d^2}$$

dove G è la costante gravitazionale, che non dipende da d, come del resto M ed m. Calcolare il saggio di variazione istantaneo di F al variare di d.

13. Si consideri la funzione quadratica $q(x)=ax^2+bx+c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a\neq 0$. Chiamati x_1 ed x_2 i suoi zeri, si dimostri che si ha: $q'(x_1)+q'(x_2)=0$. Questa relazione, quando gli zeri sono reali ha un particolare significato geometrico: quale?

14. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = x^2 - 3|x| + 1$. [**R.** Per x>0: $f'(x)=2x-3$; per x<0: $f'(x)=2x+3$; $f'_+(0)=-3$; $f'_-(0)=3$]

b) $f(x) = |x^3 - 1|$. [**R.** Per x>1: $f'(x)=3x^2$; per x<1: $f'(x)=-3x^2$; $f'_+(1)=3$; $f'_-(1)=-3$]

c) $f(x) = \frac{1}{|x|}$. [R. Per $x > 0: f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; per $x < 0: f'(x) = \frac{1}{x^2}$]

d) $f(x) = \ln|x|$. [**R.** Per ogni $x\neq 0$: $f'(x) = \frac{1}{x}$]

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} \text{ se } |x| \leq 1 \\ |x| \text{ se } |x| > 1 \end{cases}$

[**R.** Per x<–1: $f'(x)=-1$; per –1<x<1: … ; per x>1: … ;$f'_+(-1)=+\infty$; $f'_-(-1)=-1$; …]

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ [R. Per $x \neq 0: f'(x) = \frac{x\sin x + \cos x - 1}{x^2}$; $f'(0) = \frac{1}{2}$]

15. È assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

1. A) Spiegare perché è continua e derivabile su ℝ.
   B) Calcolare i limiti della funzione per x→+∞ e per x→–∞.
   C) Detto G il suo grafico in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), trovare i punti in cui G seca gli assi coordinati.
   D) Spiegare perché G è simmetrico rispetto al punto O.
2. A) Trovare l'equazione della tangente a G in O.
   B) Determinare i punti in cui G ha tangente orizzontale.
3. A) Mettendo assieme le informazioni ottenute, provare a disegnare un andamento approssimato di G e cercare conferma del grafico con quello ottenuto per mezzo di un software matematico.

16. È assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1. A) Spiegare perché è continua e derivabile su ℝ.
   B) Calcolare i limiti della funzione per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.
   C) Detto G il suo grafico in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), trovare i punti in cui G seca gli assi coordinati.
   D) Spiegare perché G è simmetrico rispetto all'asse y.
2. A) Determinare i punti in cui G ha tangente orizzontale.
3. A) Mettendo assieme le informazioni ottenute, provare a disegnare un andamento approssimato di G e cercare conferma del grafico con quello ottenuto per mezzo di un software matematico.

17. È assegnata la funzione:

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x, \text{ con } x\in[0,2\pi].$$

1. A) Spiegare perché è continua e derivabile nel dominio assegnato.
2. A) Detto G il suo grafico in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), trovare i punti in cui esso seca l'asse x.
   B) Determinare i punti in cui G ha tangente orizzontale.
3. A) Mettendo assieme le informazioni ottenute, provare a disegnare un andamento approssimato di G e cercare conferma del grafico con quello ottenuto per mezzo di un software matematico.

18. Risolvere la stessa questione precedente per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad \text{con } x \in [0, 2\pi].$$

19. La funzione f(x) è derivabile su ℝ. Considerata la funzione:

$$F(x) = f(x) - [f'(x)(x-2) + f(2)]$$

calcolare: $F'(2)$ e $F''(2)$ sapendo che $f''(2) = 3$.

20. Calcolare la derivata della seguente funzione:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ [**R.** Per $x \neq 0$: $f'(x) = \cdots$; $f'(0) = 0$]

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2} \text{ se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ se } x = 0 \end{cases}$ [**R.** Per $x \neq 0$: $f'(x) = \cdots$; $f'(0) = -\infty$]

21. Si considerino le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ per } -2 \leq x < 0 \\ -x^2+2x+2 \text{ per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{3x} \text{ se } x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3} \text{ se } x=0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x+1}{2x} \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x=0 \end{cases}$

Sono derivabili nel punto 0? Se qualcuna di esse lo è, calcolare tale derivata.

22. Si consideri la seguente famiglia di funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{k}x + 3 \text{ per } -\dfrac{5}{4} \leq x < 0 \\ -\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{12}{5}x + 3 \text{ per } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale positivo.

a) Dopo aver verificato che ogni funzione della famiglia è continua nel suo dominio, dimostrare che esiste una ed una sola funzione della famiglia che è anche derivabile in tale dominio.

b) La derivata (prima) della funzione così trovata è continua? È derivabile?

59. Si consideri la seguente funzione:

$$a)\ f(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{2x}; \quad b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^{x-1}.$$

Calcolarne il dominio e la derivata rispetto ad x.

Risolvere le seguenti questioni sul differenziale di una funzione (nn. 60-64):

60. Tenendo presente il significato di differenziale di una funzione, calcolare un'approssimazione dell'incremento che la funzione f(x) subisce quando passa dal valore che ha in x' a quello che ha in x'', sapendo che:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$, $x' = 2$, $x'' = 2 + 10^{-4}$. [**R.** $\approx 4 \cdot 10^{-4}$]

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x' = 2$, $x'' = 2{,}003$. [**R.** $\approx -3{,}6 \cdot 10^{-4}$]

c) $f(x) = x^2 e^x$, $x' = 1$, $x'' = 1{,}02$. [**R.** $\approx 0{,}16$]

61. Spiegare perché, per piccoli valori del numero α, risulta: $\tan\alpha \approx \alpha$.
Calcolare poi con una calcolatrice quale errore relativo si commette prendendo $1+\alpha$ al posto di $\tan\alpha$ quando $|\alpha| = 0{,}1$.

62. Un corpo si muove su una retta con la seguente legge oraria:

$$x = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3, \quad \text{con } t \geq 0,$$

dove t è misurato in secondi ed x in metri.

Dopo aver stabilito che nell'intervallo di tempo che va dall'istante t'=2 s all'istante t''=2,1 s il corpo non inverte il moto, calcolare con approssimazione fino al 2° decimale il cammino percorso da esso in quell'intervallo di tempo e la variazione della sua velocità.
Calcolare le stesse grandezze ricorrendo al significato del differenziale di una funzione e controllare l'errore relativo commesso per entrambe le misure quando si segue il secondo procedimento.

[**R.** ≈1,08 m; ≈1,66 m/s ; 1 m; 1,6 m/s ; $\varepsilon_r' = 0{,}7\%$; $\varepsilon_r'' = 0{,}4\%$]

63. La pressione atmosferica p varia in funzione della quota h, misurata rispetto al livello del mare, secondo la seguente legge:

$$p = 101.330\, e^{-1{,}25\cdot 10^{-4}\, h},$$

dove h è espressa in metri e p in Newton su metro quadrato.
Calcolare, con approssimazione all'unità, di quanto varia p quando si sale dai 1000 m ai 1100 m.
Determinare di quanto all'incirca diminuisce p per ogni metro di altezza, a partire dal livello del mare, purché non si considerino dislivelli troppo grandi. [**R.** $\approx -1118\ \mathrm{N/m^2}; \approx 12\ \mathrm{N/m^2}$]

64. Calcolare il differenziale di ciascuna delle seguenti funzioni:

a) $\sqrt{x}$. b) $\sqrt{1-x^2}$. c) $\sin 2x$. d) $\operatorname{atan} x$.
e) e^{x^2}. f) $\ln x$. g) $\operatorname{asin}\sqrt{x}$. h) $\ln\sin 2x$.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE.

DOMANDE.

1. Sussiste una differenza fra derivata di una funzione in un punto e funzione derivata?
2. È vero che la funzione f(x)=|x| è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?
3. È vero che una funzione continua in un punto è derivabile in quel punto?
4. È vero che la condizione di derivabilità di una funzione in un punto a è necessaria e sufficiente per la sua continuità in a?
5. Si sa che la funzione f(x) è derivabile per x=1. Si può concludere che anche la funzione f(2x) è derivabile per x=1?
6. È vero che la funzione $f(x)=\sqrt{x^2}$ è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$?
7. È corretto affermare che $D_x \log_a x = \frac{1}{x}\ \log_a e$?
8. È vero che $D_x \ln^2 x = 2\ln x$?
9. È vero che $D_x \sin^2 2x = 4\sin 2x$?
10. Esiste una funzione f(x) che coincide con la sua derivata?
11. Esponi un procedimento idoneo a calcolare la derivata della funzione $y=a^x$, con a numero reale positivo, diverso da 1.
12. Delle curve di equazione $y=a^x$, con a numero reale positivo e diverso da 1, una (ed una soltanto) ha pendenza uguale ad 1 nel punto di ascissa 0. Per quale valore di a si ha questa curva? Per quali valori di a si hanno curve con pendenza maggiore di 1 in tale punto? Per quali valori di a con pendenza minore di 1 (ma comunque maggiore di 0)?
13. È vero che è n! la derivata n-esima della funzione x^n ?
14. Considerata la funzione A(x)=f(x)+f(2x), si sa che la funzione A(x) è derivabile sia per x=1 sia per x=2 e si ha: A'(1)=2 e A'(2)=3. Dimostrare che la funzione B(x)=f(x)–4f (x) è derivabile per x=1 e calcolare B'(1).

15. Considerata la funzione $y=e^{kx}$, trovare i valori del parametro k per i quali si ha: $y''-2y'-3y=0$.
16. Considerata la funzione $y=\sin x$, quale relazione sussiste fra y e y” ?

RISPOSTE.

1. Sì, c’è una differenza: la derivata di una funzione in un punto è un numero reale che, in base al significato geometrico, esprime la pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto; la funzione derivata di una funzione data è per l’appunto una funzione, che esprime la derivata della funzione in un punto generico, vale a dire la pendenza della tangente al grafico in un punto generico di esso. Se si fa riferimento invece ad uno dei significati fisici della derivata, considerando ad esempio la funzione come la legge oraria di un moto, si può dire che la derivata di tale legge in un punto esprime la velocità in un determinato istante, mentre la funzione derivata esprime la legge della velocità del moto.
2. No. Essa è derivabile in ogni $x\neq0$ ma non in $x=0$ avendosi $f'_-(0)=-1,\ f'_+(0)=1$.
3. No. Basta considerare la funzione della domanda precedente: è continua in $x=0$ ma non è ivi derivabile.
4. No. La condizione è sufficiente ma non necessaria.
5. No, la conclusione sarebbe scorretta. Per mostrarlo basta un contro-esempio. Infatti, la funzione $f(x)=|x-2|$ è certamente derivabile per $x=1$, ma la funzione $f(2x)=|2x-2|$ non lo è. Lasciamo a chi legge il disegno dei grafici di queste due funzioni. Grafici che evidenziano bene quanto abbiamo detto.
6. No. Si tratta di un altro modo di scrivere la funzione $f(x)=|x|$, che come già detto non è derivabile in 0.
7. Sì, dal momento che $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.
8. No. Si tratta della derivata di una funzione composta e si ha: $D_x \ln^2 x=2\ln x\cdot D_x \ln x=\frac{2}{x}\ln x$.
9. No. Si ha infatti: $D_x \sin^2 2x=2\sin 2x\cos 2x\cdot 2=2\sin 4x$.
10. Sì. Si tratta della funzione $f(x)=e^x$, dove “e” è il numero di Nepero, cioè la base dei logaritmi naturali.
11. Basta conoscere la derivata della funzione logaritmo e ricorrere alla regola di derivazione delle funzioni invertibili. Infatti:
    essendo $x=\log_a y$ e $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, risulta: $y'=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=a^x\ln a$.
12. La pendenza nel generico punto della curva di equazione $y=a^x$ è $y'=a^x\ln a$. La pendenza nel punto di ascissa 0 è perciò: $y'(0)=\ln a$. Si ha allora $y'(0)=1$ se e solo se $a=e$, $y'(0)>1$ se e solo se $a>e$, $y'(0)<1$ se e solo se $0<a<e$.
13. È vero. Si ha infatti in successione:
    $D_x x^n=n\,x^{n-1}$,
    $D_x^{(2)} x^n=n(n-1)\,x^{n-2}$,
    $D_x^{(3)} x^n=n(n-1)\cdot D_x x^{n-2}=n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$,
    … … … … …,
    $D_x^{(n-1)} x^n=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot D_x x^2=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2x$,
    $D_x^{(n)} x^n=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot D_x x=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$.
14. Basta ragionare come nel caso del quesito presentato in 66.5.2. Si trova $B'(1)=-4$.
15. Una volta calcolate le funzioni y’ ed y”, si tratta di stabilire per quali valori di k si ha:

$$e^{kx}(k^2 - 2k - 3) = 0$$

e ciò accade per k=–1 e per k=3.

16. Data $y=\sin x$, si ha $y'=\cos x$ e $y''=-\sin x$ e pertanto la relazione cercata è: $y''=-y$.