Prerequisiti:
- Calcolare derivate e semplici integrali.
- Studiare una funzione.
- Risolvere equazioni.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità gli allievi devono essere in grado di:

- *definire un'equazione differenziale*
- *spiegare in cosa consiste il problema di Cauchy*
- *integrare semplici equazioni differenziali dei seguenti tipi: a variabili separabili, lineari dei primi due ordini*
- *fornire esempi di problemi tratti dalla vita reale che si risolvono mediante equazioni differenziali*

Questa unità è rivolta al Liceo Scientifico, compresa l'opzione Scienze applicate, ed ai seguenti indirizzi dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico:
- **Meccanica, Meccatronica ed Energia.**
- **Trasporti e Logistica.**
- **Chimica, materiali e biotecnologia.**
- **Costruzioni, Ambiente e Territorio.**

Gli studenti dell'Istituto Tecnico ne affronteranno lo studio nel 2° biennio, quelli del Liceo nella 5ª classe.

Equazioni differenziali
Unità 76

76.1 I TERMINI DELLA QUESTIONE

76.1.1 Nello studio condotto fin qui, ogni volta che abbiamo avuto a che fare con una equazione, l'incognita è risultata essere una variabile in un campo numerico. In altri termini, la soluzione dell'equazione è risultata essere un numero.

Accade così anche in quest'esempio, in cui sembra che la variabile sia invece una funzione:

Determinare la funzione $y = x^3 - ax + 2$, dove a è un parametro reale,
in modo che la curva che la rappresenta passi per il punto $(1,2)$.

L'incognita vera e propria è il parametro "a" e non la funzione.

Esistono tuttavia equazioni speciali in cui l'incognita è costituita effettivamente da una funzione. E non si pensi che si tratti di equazioni che hanno scarsa attinenza con questioni reali. Tutt'altro.
A questo riguardo mostriamo alcuni esempi che prendono lo spunto da problemi attinenti alla geometria, alla fisica, alla chimica.

- PROBLEMA 1. Determinare una funzione $y=y(x)$, il cui grafico, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), abbia come tangente in ogni punto una retta di pendenza uguale all'ascissa del punto.

RISOLUZIONE. Siccome la pendenza della retta tangente al grafico della funzione $y=y(x)$ nel generico punto di ascissa x è $y'(x)$, il modello matematico nel quale si traduce il problema è costituito dalla seguente equazione:

[1] $$y'(x) = x\ .$$

Si tratta chiaramente di un'equazione diversa da quelle che siamo abituati a trattare. Qui l'incognita è effettivamente una funzione: la funzione $y(x)$.
Essa stabilisce un legame tra una variabile, x, e la derivata di una funzione, $y'(x)$, di questa variabile.
Per il momento la abbandoniamo. Così come faremo per le relazioni che troveremo nei prossimi esempi di questo paragrafo 76.1.1. Ci ritorneremo su più avanti.

- PROBLEMA 2. Determinare la legge di decadimento di una sostanza radioattiva.

RISOLUZIONE. Si sa dalla fisica che la velocità di decadimento di una sostanza radioattiva è direttamente proporzionale alla quantità di sostanza radioattiva $Q=Q(t)$ presente in un certo istante t.
Siccome la velocità di decadimento è $Q'(t)$, una volta che sia stata indicata con k $(k>0)$ la costante di proporzionalità e si sia osservato che $Q(t)$ diminuisce al crescere di t, per cui $Q'(t) \leq 0$, il modello matematico nel quale si traduce il nostro problema è costituito dalla seguente equazione:

[2] $$Q'(t) = -k\,Q(t)\ .$$

Differisce leggermente dal modello [1]: lì assieme alla derivata della funzione figurava la variabile indipendente, qui figura la funzione stessa.

- PROBLEMA 3. Determinare la legge del moto di una particella di massa m, avente velocità v_0, quando venga sottoposta ad una forza costante F, agente nella direzione del moto.

RISOLUZIONE. Se $x=x(t)$ rappresenta la legge cercata, sappiamo che $x''(t)$ è l'accelerazione della particella. D'altra parte, per il 2° principio della dinamica: $F = m\,x''(t)$. Per cui il modello matematico che traduce il problema in esame è costituito dalla seguente equazione:

[3] $$x''(t) = a\ ,$$

dove si è indicato con a $(=F/m)$ l'accelerazione costante della particella.

- PROBLEMA 4. Determinare la legge del moto di un corpo libero di massa m, inizialmente in quiete, sottoposto ad una forza elastica tale che sia uguale ad h la forza che provoca lo spostamento unitario.

RISOLUZIONE. Sappiamo dalla fisica che la forza elastica F è tale che:

$$F = -h\,x,$$

dove il segno "–" indica che la forza è diretta in senso contrario allo spostamento x.

Del resto, se $x=x(t)$ rappresenta la legge del moto da noi cercata, sappiamo pure che:

$$F = ma \ \text{ e perciò } \ F = m\,x''(t)\ .$$

Sicché il modello matematico nel quale si traduce il nostro problema è costituito dalla seguente equazione:

[4] $$m\,x''(t) = -h\,x(t)\ .$$

Differisce dal modello [2] perché adesso, assieme alla funzione $x(t)$, figura la sua derivata seconda.

- PROBLEMA 5. Una soluzione di zucchero si trasforma nel tempo in un miscuglio di fruttosio e glucosio. Qual è la legge che regola tale trasformazione?

RISOLUZIONE. Sappiamo dalla chimica che la concentrazione di zucchero nella soluzione è una funzione del tempo: Z=Z(t). La legge che regola la conversione della soluzione di zucchero in un miscuglio di fruttosio e glucosio è la seguente:

[5] $$Z'(t) = -k\,Z,$$

dove k è una costante rispetto al tempo.

76.1.2 Le relazioni [1], [2], [3], [4], [5] trovate sopra sono equazioni particolari. In esse infatti l'incognita non è una variabile bensì una funzione, la quale figura però anche (ed eventualmente soltanto) attraverso una sua derivata. Equazioni di questo tipo si chiamano *equazioni differenziali*. In generale:

Un'**equazione differenziale** è un'equazione in cui l'incognita è una funzione ed in cui figura almeno una derivata – prima e/o di ordine superiore – di questa funzione.

L'ordine della derivata di ordine massimo, che figura nell'equazione, si dice ***ordine dell'equazione differenziale***.

A titolo di esempio, le equazioni dei tipi [1], [2], [5] sono del 1° ordine; quelle dei tipi [3], [4] sono del 2° ordine.

Noi ci occuperemo soltanto di alcune semplici equazioni differenziali dei primi due ordini. Chi proseguirà gli studi in idonei corsi universitari ad indirizzo scientifico avrà modo ed occasione di approfondire l'argomento.

76.1.3 Riprendiamo il problema 1 e scriviamo l'equazione [1], che ne costituisce la traduzione in uno schema matematico, in questa maniera equivalente:

$$\frac{dy}{dx}=x\,,$$

o anche così:

$$dy = x\,dx\ .$$

Calcoliamo gli integrali dei due membri:

$$\int dy = \int x\,dx;$$

ossia:

$$y+c_1=\frac{x^2}{2}+c_2\ ;$$

o ancora meglio, indicando con c la costante c_2-c_1:

$$y=\frac{x^2}{2}+c\,.$$

È questa la funzione che risolve l'equazione [1]. Del resto si verifica immediatamente che risulta $y'(x)=x$.

Per la verità quella trovata sopra è una famiglia di funzioni, dipendenti dall'unico parametro c. Si chiama *integrale generale* dell'equazione differenziale [1]. Il suo grafico, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), è costituito da una famiglia di curve – nella fattispecie parabole (Fig. 1) – chiamate *curve integrali* dell'equazione differenziale.

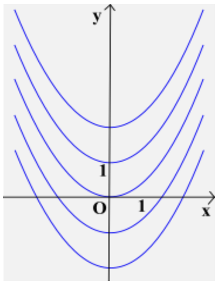

FIG. 1

In generale:

Si chiama **integrale** (o **soluzione**) **generale** di un'equazione differenziale nell'incognita y(x) l'insieme delle funzioni y=y(x) che soddisfano all'equazione.

Il grafico di ogni funzione integrale si chiama ***curva integrale*** dell'equazione differenziale.
L'operazione atta a determinare l'integrale generale di un'equazione differenziale va sotto il nome di *integrazione dell'equazione differenziale*.
Come detto, l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(x)=x$ è la famiglia di funzioni:

$$y=\frac{x^2}{2}+c\,,$$

dove c è un parametro reale.
Naturalmente se si fissa una condizione del tipo $y(x_0)=y_0$, dove x_0, y_0 sono valori noti, dalla famiglia di funzioni suddette si ottiene una funzione particolare: si chiama *integrale particolare* dell'equazione differenziale, soddisfacente alla condizione assegnata.
Per esempio, con riferimento all'equazione differenziale $y'(x)=x$, fissata la condizione $y(0)=1$, si trova l'integrale particolare:

$$y=\frac{x^2}{2}+1\,.$$

Di norma, per ottenere un ***integrale*** (o ***soluzione***) ***particolare*** di un'equazione differenziale, della quale si sa calcolare l'integrale generale:

- se l'equazione è del 1° ordine basta una condizione;
- se l'equazione è del 2° ordine occorrono due condizioni.

Infatti, in quest'ultimo caso, come vedremo fra breve attraverso un esempio, intervengono due parametri effettivi nell'integrale generale.
Ciascuna di tali condizioni si chiama ***condizione iniziale***.

Si consideri un'equazione differenziale del 1° ordine, che nella sua forma generica è scritta nel modo seguente: $F\big(x, y(x), y'(x)\big)=0$. Il problema – consistente nella ricerca di un suo integrale particolare sotto la condizione $y(x_0)=y_0$, detta *condizione iniziale*, dove x_0 ed y_0 sono valori reali assegnati – è quello che si denomina un particolare **problema di Cauchy**.

Per esempio, è un "problema di Cauchy" quello di risolvere l'equazione differenziale $y'(x)=x$ sotto la condizione $y(0)=1$. Esso ammette una ed una sola soluzione, la funzione: $y=\frac{x^2}{2}+1$.

È ancora un particolare "problema di Cauchy" il problema di risolvere un'equazione differenziale del 2° ordine:

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)=0.$$

sotto le condizioni $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, dette *condizioni iniziali*, dove x_0, y_0, y_1 sono valori reali assegnati.

Naturalmente se si sa calcolare l'integrale generale di un'equazione differenziale, la ricerca di un integrale particolare, e quindi la risoluzione del relativo problema di Cauchy, è un'operazione del tutto banale. A volte tuttavia si riesce a risolvere il problema di Cauchy senza conoscere l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Ora però, l'integrazione delle equazioni differenziali ed in particolare la risoluzione di un problema di Cauchy sono operazioni assai complesse che, peraltro, solo in situazioni davvero eccezionali si concludono con esito positivo, nel senso cioè che viene trovata una soluzione. A parte il fatto che un problema di Cauchy non sempre ammette soluzione e, quando l'ammette, non è detto che sia unica.

In ogni caso, fra tali situazioni eccezionali noi ne prenderemo in esame solo alcune assolutamente elementari e nelle quali comunque si riesce a determinare l'integrale generale dell'equazione, rinviando a studi universitari la risoluzione di un vero e proprio problema di Cauchy.

ESERCIZIO. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, dopo aver verificato che la funzione posta a fianco è l'integrale dell'equazione differenziale considerata:

$a)\ \begin{cases} 3\,y' = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y = \dfrac{x^2}{3} + k$

$b)\ \begin{cases} y' = e^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad y = -e^{-x} + k$

$c)\ \begin{cases} (x^2+2)\,y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y = k(x^2+2)$

$d)\ \begin{cases} y' = xy + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y = k\,e^{x^2/2} - 1$

$e)\ \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad y = h\,e^{x} + k\,e^{2x}$

$f)\ \begin{cases} y'' - y = x \\ y\,(0) = 1,\ \ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad y = h\,e^{x} + k\,e^{-x} - x$

76.2 INTEGRAZIONE PER VARIABILI SEPARABILI

76.2.1 Le equazioni differenziali dei tipi [1], [2], [5] sono casi particolari di un'equazione che può mettersi nella seguente forma generale:

[6] $$\frac{dy}{dx}=a\,f(x)\,g(y)$$

dove a è una costante ed f(x), g(y) sono funzioni di x e di y rispettivamente.

In quest'equazione le variabili x, y possono essere ***separate***, in fondo come abbiamo già fatto vedere in 76.1.3 con riferimento all'equazione [1]. Sicché l'equazione [6], a patto che sia $g(y)\neq 0$, può scriversi così:

$$\frac{dy}{g(y)}=a\,f(x)\,dx\,.$$

Da qui, integrando entrambi i membri, si trova:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = a \int f(x)\, dx.$$

Se si sanno calcolare questi due integrali, si sa integrare l'equazione differenziale.

Facciamo notare, per inciso, che se y_0 è uno zero di g(y), vale a dire se $g(y_0)=0$, la funzione $y(x)=y_0$ è soluzione dell'equazione [6]. Si verifica infatti che i due membri di tale equazione sono entrambi nulli.

76.2.2 Abbiamo già descritto come si integra l'equazione [1]. Occupiamoci ora della [2]. Essa si può scrivere così:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ\,,$$

o anche, separando le variabili Q, t, in quest'altro modo:

$$\frac{dQ}{Q} = -k\, dt$$

e perciò, integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{dQ}{Q} = -k \int dt.$$

Da qui, tenendo presente che $Q>0$, segue:

$$\ln Q = -kt + \ln A,$$

dove si è preferito indicare con $\ln A$ (A>0) la costante d'integrazione. La relazione può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\ln \frac{Q}{A} = -kt$$

e infine:

$$Q = A\, e^{-kt}\,.$$

È l'integrale generale dell'equazione [2].

Se si pone la condizione che nell'istante $t=0$ la quantità di sostanza radioattiva presente sia Q_0, si ha: $Q_0=Ae^0$ e perciò: $A=Q_0$. Ne deriva che si ottiene il seguente integrale particolare della [2]:

$$Q = Q_0\, e^{-kt}\,.$$

76.2.3 Prendendo in esame l'equazione [5] e ragionando come sopra, si trova il seguente integrale generale:

$$Z = A\, e^{-kt}\,,$$

dove A (A>0) è la costante d'integrazione. Come prima, se si pone la condizione che nell'istante $t=0$ la concentrazione di zucchero nella soluzione sia Z_0, si ottiene la seguente soluzione particolare dell'equazione [5]:

$$Q = Z_0\, e^{-kt}\,.$$

76.2.4 Anche l'equazione [3] è a variabili separabili. Dapprima si scrive in questo modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,;$$

osservato poi che:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\big(x'(t)\big)}{dt}\,,$$

si ottiene: $d\big(x'(t)\big)=a\, dt$, da cui, integrando, segue: $x'(t)=at+c_1$, dove c_1 è la costante d'integrazione.

D'altro canto, essendo $x'(t)=\frac{dx}{dt}$, si ha: $\frac{dx}{dt}=at+c_1$, e perciò: $dx=(at+c_1)dt$.
Integrando ancora una volta i due membri, si trova l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$x=\frac{1}{2}at^2+c_1t+c_2\,.$$

Questa relazione mostra intanto che effettivamente, come avevamo anticipato, l'integrale generale di un'equazione differenziale del 2° ordine presenta due costanti di integrazione.
Nel caso specifico, tali costanti, c_1 e c_2, hanno un significato fisico ben preciso, legato ovviamente alle condizioni iniziali del moto. Precisamente, supponendo che nell'istante $t=0$ la velocità sia v_0, dall'equazione $x'(t)=at+c_1$ si desume che deve essere $x'(0)=c_1$ e perciò $c_1=v_0$. Ammesso poi che nell'istante $t=0$ la particella occupi sulla retta del moto la posizione x_0, dalla soluzione generale si deduce $c_2=x_0$.
Si ottiene così il seguente integrale particolare dell'equazione differenziale:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\,.$$

È la legge del "moto rettilineo uniformemente vario".

ESERCIZI. Integrare le seguenti equazioni differenziali e verificare l'esattezza del risultato ottenuto:

1) $2\,y'=3\,x$; $y'=2\,x+1$. $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{3}{4}x^2+k\,;\ldots\right]$
2) $y'=\sqrt{x}$; $y'=x^2-2\,x$. $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+k\,;\ldots\right]$
3) $y'=2\sqrt{y}$; $2\,y'=y$. $[\mathbf{R.}\ y=(x+k)^2;\ldots]$
4) $y''=0$; $y''=y'$. $[\mathbf{R.}\ y=a\,x+b;\ \ldots]$
5) $y'=x\,e^x$; $y'=\ln x$. $[\mathbf{R.}\ y=e^x(x-1)+k\,;\ldots]$
6) $y'\cos^2 x=2$; $y'e^x=1$. $[\mathbf{R.}\ y=2\tan x+k]$
7) $y'=2\,y$; $2\,y'=y-1$. $[\mathbf{R.}\ y=k\,e^{2x};\ldots]$
8) $(x^2+1)\,y'=xy$; $2\,x\,y\,y'=1-y^2$. $\left[\mathbf{R.}\ y=k\sqrt{x^2+1}\,;\ldots\right]$
9) $(y-1)\,y'=1-x$; $(x-1)y'=1-y$. $[\mathbf{R.}\ x^2+y^2-2\,x-2\,y+c=0;\ \ldots]$

76.3 EQUAZIONI LINEARI DEL 1° ORDINE

76.3.1 Si definiscono **equazioni lineari del 1° ordine** le equazioni del seguente tipo:

[7] $$y'(x)=a(x)\,y+b(x)\ ,$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue di x.
In particolare, se $b(x)$ è identicamente nulla, l'equazione si dice ***omogenea***, altrimenti si dice ***non omogenea***.

♦ Occupiamoci dapprima dell'<u>equazione lineare omogenea del 1° ordine</u>:

[7'] $$y'(x)=a(x)\,y\,.$$

Si integra per variabili separate. Infatti può essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{dy}{y}=a(x)dx$$

e perciò, dopo aver integrato:

$$\ln|y|=\int a(x)dx+\ln|k|,$$

dove k è una costante arbitraria. Da qui, indicata con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, si ottiene:

$$\ln\left|\frac{y}{k}\right| = A(x)$$

e perciò:

[8] $$y = k\, e^{A(x)},$$

che è l'integrale generale dell'equazione [7']. Peraltro basta eseguire una verifica.

♦ Occupiamoci adesso dell'equazione lineare non omogenea del 1° ordine, già scritta nella forma [7] dove $b(x)$ non è identicamente nulla.

Si considera anzitutto la cosiddetta equazione omogenea associata alla [7], vale a dire l'equazione [7']. Di essa abbiamo trovato poco sopra l'integrale generale [8].

Domanda: considerando k non più costante ma funzione di x, si può scegliere k(x) in modo che la [8] risulti soluzione della [7]?

Per controllare incominciamo a calcolare y'. Allora, dalla [8], supponendo che k=k(x), si ha:

$$y' = k'(x)\, e^{A(x)} + k(x)\, A'(x)\, e^{A(x)},$$

ossia, ricordando che $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e perciò $A'(x)=a(x)$:

$$y' = k'(x)\, e^{A(x)} + k(x)\, a(x)\, e^{A(x)}.$$

Sostituendo nella [7] al posto di y'(x) e di y i valori ottenuti dalla [8] e tenendo presente che invece di k si considera k(x), si ottiene:

$$k'(x)\, e^{A(x)} + k(x)\, a(x)\, e^{A(x)} = a(x)\, k(x)\, e^{A(x)} + b(x);$$

da cui, una volta cancellati nei due membri i termini uguali $a(x)\, k(x)\, e^{A(x)}$, segue:

$$k'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

e infine:

$$k(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx.$$

In definitiva, sostituendo nella [8], si ottiene il seguente integrale generale dell'equazione [7]:

[9] $$y = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx.$$

Che, ovviamente, è calcolato soltanto se si sa calcolare l'integrale al 2° membro.

76.3.2 A titolo di esempio, calcoliamo l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = x\,(1-y)\ ,$$

dove y è funzione di x.

Con riferimento alla [7] ed al suo integrale generale [9], nel caso specifico si ha:

$$a(x) = -x, \quad b(x) = x;$$

per cui, osservato che una primitiva di $-x$ è $-\frac{x^2}{2}$, si ha intanto:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \int x\, e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\,;$$

si tratta allora di trovare l'integrale:

$$I = \int x\, e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\,.$$

NOTA BENE. C'è un metodo idoneo a calcolare tale integrale, chiamato *metodo d'integrazione per sostituzione*: qualora tale metodo fosse al momento sconosciuto, ti suggeriamo di ricorrere ad un idoneo software matematico per il calcolo di quest'integrale I, come di quelli con cui avrai a che fare negli esercizi che ti proponiamo in seguito e che non riesci a trovare in modo immediato. Noi intanto ti forniamo il risultato dell'integrale I.

Si ha:

$$I = e^{\frac{x^2}{2}} + c.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right).$$

ossia:

$$y = c\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 1\,.$$

In figura 2 sono rappresentate le curve integrali (alcune) dell'equazione considerata.

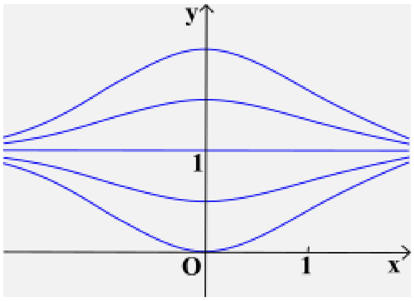

FIG. 2

ESERCIZI. Integrare le seguenti equazioni differenziali del 1° ordine e verificare l'esattezza del risultato ottenuto:

1) $y' = 3y + 2x\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right]$

2) $y' = x\,y - x\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{\frac{x^2}{2}}+1\right]$

3) $y' = x\,y + x\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{\frac{x^2}{2}}-1\right]$

4) $y' = 2\,x\,y - 3\,x.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{x^2}+\frac{3}{2}\right]$

5) $xy' = x^3 + x - y\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{(x^2+1)^2}{4x}+\frac{c}{x}\right]$

6) $2\,y' = x - 2\,y\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=\frac{1}{2}(ce^{-x}+x-1)\right]$

7) $y' = x + 2\,x\,y.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{x^2}-\frac{1}{2}\right]$

8) $x\,y' = 3\,x^2 - y.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=x^2+\frac{c}{x}\right]$

9) $y' = y + e^x\,.$ $[\mathbf{R.}\ y=e^x(x+c)]$

10) $y' = e^{-3x} - 2y.$ $[\mathbf{R.}\ y=e^{-2x}(c-e^{-x})]$

11) $y' = (y+1)\sin x.$ $[\mathbf{R.}\ y=ce^{-\cos x}-1]$

12) $y'=(2\,y-1)\cos x\,.$ $\left[\mathbf{R.}\ y=ce^{2\sin x}+\frac{1}{2}\right]$

76.4 EQUAZIONI LINEARI DEL 2° ORDINE

76.4.1 Si definiscono **equazioni lineari del 2° ordine** le equazioni di questo tipo:

[10] $$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)\ ,$$

dove y è funzione di x ed a, b, c sono costanti reali con $a\neq 0$.
In particolare, se f(x) è identicamente nulla l'equazione si dice ***omogenea***, altrimenti si dice ***non omogenea***. In realtà, siccome i coefficienti a, b, c sono costanti, la denominazione corretta per queste equazioni sarebbe "equazioni lineari del 2° ordine a coefficienti costanti".
Occupiamoci dapprima dell'equazione lineare omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti:

[10'] $$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0\ .$$

Procedendo come nella risoluzione delle equazioni lineari del 1° ordine, proviamo anzitutto se esiste una funzione del tipo:

$$y = e^{kx}$$

che sia soluzione della [10'].
Siccome: $y'=k\,e^{kx},\ y''=k^2e^{kx}$, sostituendo nella [10'] si trova:

$$\left(a\,k^2+b\,k+c\right)\,e^{kx}=0$$

e perciò:

[11] $$a\,k^2+b\,k+c=0\ .$$

Questa equazione nell'incognita k si chiama ***equazione caratteristica*** dell'equazione differenziale [10']. Si presentano tre casi, a seconda che il suo discriminante $\Delta=b^2-4ac$ sia positivo, nullo o negativo.

- Se $\Delta>0$, chiamate k' e k" le due radici reali e distinte dell'equazione [11], si può verificare agevolmente (il compito è lasciato a te) che ogni funzione del tipo:

  [12] $$y=Ae^{k'x}+Be^{k''x},$$

  dove A, B sono costanti arbitrarie, è soluzione della [10'].
- Se $\Delta=0$, chiamata k_0 la soluzione doppia della [11], si può verificare (anche questo compito è lasciato a te) che ogni funzione del tipo:

  [13] $$y=e^{k_0x}(A+Bx),$$

  dove A, B sono costanti arbitrarie, è soluzione della [10'].
- Se infine $\Delta<0$, chiamate $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$ le soluzioni complesse coniugate dell'equazione [10], si può verificare (e anche questo lo puoi fare da te) che ogni funzione del tipo:

  [14] $$y=e^{\alpha x}(A\sin\beta x+B\cos\beta x),$$

  dove A, B sono costanti arbitrarie, è soluzione della [10'].

Sarebbe poi possibile dimostrare che le funzioni [12] quando $\Delta>0$, le funzioni [13] quando $\Delta=0$ e le funzioni [14] quando $\Delta<0$ costituiscono l'integrale generale dell'equazione [10'].

76.4.2 A titolo di esempio ci soffermiamo su alcuni esercizi.

- ESERCIZIO 1. Posto che y sia funzione di x, risolvere l'equazione differenziale:

$$y'' - 4\,y = 0\ .$$

RISOLUZIONE. Consideriamo dapprima la sua equazione caratteristica: $k^2 - 4 = 0$.
Essa, risolta, fornisce le soluzioni reali 2 e –2.
Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y=A\,e^{2x}+B\,e^{-2x}$$

dove A, B sono costanti arbitrarie.

- ESERCIZIO 2. Risolvere l'equazione differenziale:

$$y'' - 2\,y' + y = 0,$$

dove y è funzione di x, sotto le seguenti condizioni: $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

RISOLUZIONE. La sua equazione caratteristica, $k^2-2k+1=0$, ha la soluzione doppia 1.

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = e^x(A+Bx)$$

dove A, B sono costanti arbitrarie.

Siccome $y(0)=A$ e inoltre $y'=e^x(A+Bx)+Be^x$ e di conseguenza $y'(0)=A+B$, deve risultare:

$$A = 1,\ \ A + B = 1;$$

e perciò: $A=1,\ B=0$.

In definitiva, l'integrale (particolare) dell'equazione differenziale data, sotto le condizioni stabilite, è:

$$y = e^x.$$

- ESERCIZIO 3. Risolvere l'equazione differenziale (vedere paragrafo 76.1.1, problema 4):

$$m\,x'' + h\,x = 0\,,$$

dove x è funzione di t ed m, h sono costanti positive assegnate.

RISOLUZIONE. La sua equazione caratteristica, $mk^2+h=0$, ha le due soluzioni immaginarie $\pm\omega i$, dove si è posto per comodità $\omega=\sqrt{\frac{h}{m}}$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = A\sin\omega x + B\cos\omega x\,.$$

Ammesso che debbano essere soddisfatte le condizioni iniziali $y(0)=0,\ y'(0)=\omega r$, osservato che $y'=\omega\,A\cos\omega x-\omega\,B\sin\omega x$, deve risultare: $B=0,\ A=r$.

Cosicché una soluzione particolare dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = r\sin\omega x\,.$$

È la nota legge del "moto armonico semplice", dove ω è la pulsazione ed r è l'ampiezza.

ESERCIZI. Integrare le seguenti equazioni differenziali, in cui y è funzione di x, e verificare l'esattezza del risultato ottenuto:

1) $y''-3\,y'+2\,y=0.$ [**R.** $y=A\,e^x+B\,e^{2x}$]

2) $4\,y''-12\,y'+9\,y=0.$ [**R.** $y=e^{\frac{3}{2}x}(A+Bx)$]

3) $y''-4\,y'+5\,y=0.$ [**R.** $y=e^{2x}(A\sin x+B\cos x)$]

4) $2\,y''+y'-y=0\,;$ $\quad 2\,y''-3\,y'-2\,y=0\,.$

5) $y''+4\,y'+4\,y=0\,;$ $\quad 9\,y''-6\,y'+y=0\,.$

6) $y''-2\,y'+5\,y=0\,;$ $\quad y''-6\,y'+13\,y=0\,.$

76.4.3 Occupiamoci adesso dell'equazione lineare non omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti:

[10] $$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)\ ,$$

quando f(x) non è identicamente nulla.

Supponiamo che $y=p(x)$ sia l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea [10'], associata alla [10], e che q(x) sia un integrale particolare della [10]. Consideriamo la seguente funzione:

$$y = p(x) + q(x)\ ,$$

e facciamo vedere che è una soluzione della [10].
Siccome:

$$y' = p'(x) + q'(x) \ \text{ e } \ y'' = p''(x) + q''(x) \ ,$$

sostituendo nella [10] si ottiene:

$$a\,[p''(x)+q''(x)] + b\,[p'(x)+q'(x)] + c\,[p(x)+q(x)] = f(x) \ ;$$

da cui segue:

$$[a\,p''(x) + b\,p'(x) + c\,p(x)] + [a\,q''(x) + b\,q'(x) + c\,q(x)] = f(x) \ ;$$

quest'ultima uguaglianza, per il modo in cui sono state definite le funzioni $p(x)$ e $q(x)$, è un'identità. Perciò è provato che la funzione $y=p(x)+q(x)$ è un integrale dell'equazione [10].

La teoria mostra poi che questa funzione è in effetti l'integrale generale della [10]. Ma questo lo dobbiamo accettare senza dimostrazione.

In sostanza, il problema di integrare l'equazione differenziale non omogenea [10] è ricondotto alla ricerca di un suo integrale particolare, dal momento che sappiamo trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea [10'], associata alla [10].

Ora i casi possibili, riguardo alla determinazione di un integrale particolare dell'equazione differenziale [10], sono numerosi e variano a seconda della forma che assume la funzione f(x). Ci limitiamo a prenderne in esame solo tre.
Non prima di aver fatto notare che se nella [10] risulta $b=c=0$ allora l'integrazione è a variabili separabili. Per cui supporremo che b, c non siano contemporaneamente nulli.

- ♦ <u>1° caso</u>: $f(x)$ sia un polinomio di grado m.
  Un integrale particolare dell'equazione [10] è allora un polinomio di grado n:

  $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

  dove $n=m$ se $c\neq0$ mentre $n=m+1$ se $c=0$.

  - ESERCIZIO 1. Risolvere la seguente equazione differenziale:

  $$y'' - 4\,y = x \ ,$$

  dove y è funzione di x.
  RISOLUZIONE. Conosciamo già l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata all'equazione data (vedere n. 76.4.2, esercizio 1):

  $$y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$$

  dove A, B sono costanti arbitrarie.
  È sufficiente trovare allora un integrale particolare dell'equazione assegnata. Esso è del tipo:

  $$y = a_0\,x + a_1 \ ,$$

  dove a_0, a_1 sono costanti da determinare.
  Ora, siccome: $y'=p$ e $y''=0$, sostituendo nell'equazione data, si ha identicamente:

  $$-4\,(a_0\,x + a_1) = x;$$

  per cui deve essere: $a_0=-\frac{1}{4}$, $a_1=0$.
  Quindi un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata è:

  $$y = -\frac{1}{4}x \,.$$

  Cosicché il suo integrale generale è:

  $$y=Ae^{2x}+Be^{-2x}-\frac{1}{4}x \,.$$

- ♦ 2° caso: f(x) è del tipo ke^{hx}, dove k, h sono costanti. Bisogna distinguere due sottocasi, a seconda che h sia o no radice dell'equazione caratteristica $at^2+bt+c=0$, associata all'equazione differenziale in esame.
  - Sottocaso I: h non è radice dell'equazione caratteristica.
    Un integrale particolare dell'equazione [11] è una funzione del tipo:
    $$y = a_0 e^{hx}$$
    dove a_0 è una costante da determinare.
    - ESERCIZIO 2. Risolvere la seguente equazione differenziale:
    $$y'' - 2y' = 2e^{3x},$$
    dove y è funzione di x.
    RISOLUZIONE. Come puoi controllare date, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione data è:
    $$y = A\,e^{2x} + B$$
    dove A, B sono costanti arbitrarie.
    È sufficiente allora trovare un integrale particolare dell'equazione assegnata.
    Siccome l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $t^2-2t=0$, le cui radici sono 0 e 2, si constata che la costante h=3 non è radice di tale equazione caratteristica. Ne discende che un integrale particolare dell'equazione differenziale in esame è del tipo:
    $$y = a_0\,e^{3x}$$
    dove a_0 è una costante da determinare.
    Ora, siccome: $y'=3\,a_0\,e^{3x}$ e $y''=9\,a_0\,e^{3x}$, sostituendo nell'equazione differenziale assegnata si ha identicamente:
    $$9\,a_0\,e^{3x} - 2\cdot 3\,a_0\,e^{3x} = 2\,e^{3x},$$
    da cui segue facilmente $a_0=2/3$. Quindi un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata è:
    $$y = \frac{2}{3}e^{3x}.$$
    Sicché il suo integrale generale è:
    $$y = A\,e^{2x} + B + \frac{2}{3}e^{3x}.$$
  - Sottocaso II: h è una radice dell'equazione caratteristica di molteplicità ν (nel caso specifico è $\nu=1$ oppure $\nu=2$).
    Un integrale particolare dell'equazione [11] è una funzione del tipo:
    $$y=a_0x^{\nu}e^{hx},$$
    dove a_0 è una costante da determinare.
    - ESERCIZIO 3. Risolvere la seguente equazione differenziale:
    $$y'' - 2y' = 2e^{2x},$$
    dove y è funzione di x.
    RISOLUZIONE. Come nella risoluzione del precedente esercizio 2. Solo che adesso la costante h=2 è una radice, di molteplicità 1, dell'equazione caratteristica. Pertanto un integrale particolare dell'equazione differenziale è del tipo:
    $$y = a_0\,x\,e^{2x}$$
    dove a_0 è una costante da determinare.

Ora, siccome: $y' = a_0 e^{2x}(1+2x)$ e $y'' = 4a_0 e^{2x}(1+x)$, sostituendo nell'equazione differenziale assegnata si ha:

$$4a_0 e^{2x}(1+x) - 2 \cdot a_0 e^{2x}(1+2x) = 2e^{2x},$$

da cui segue facilmente $a_0=1$. Quindi un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = x\, e^{2x}$$

ed il suo integrale generale è:

$$y = A\, e^{2x} + B + x\, e^{2x}\,.$$

♦ <u>3° caso</u>: $f(x)$ è del tipo $c_1 \sin px + c_2 \cos px$, dove c_1, c_2, p sono delle costanti. Anche adesso bisogna distinguere due sottocasi, a seconda che pi (i è l'unità immaginaria) sia o no radice dell'equazione caratteristica associata all'equazione [11].

Nel caso in cui pi non è radice dell'equazione caratteristica, un integrale particolare dell'equazione [11] è una funzione del tipo:

$$y = a_1 \sin px + a_2 \cos px\ ;$$

nel caso in cui invece lo è, un integrale particolare dell'equazione [11] è una funzione del tipo:

$$y = x\,(a_1 \sin px + a_2 \cos px)\ ;$$

a_1 ed a_2 sono ovviamente costanti da determinare.

Ci limitiamo a fornire un esempio relativo al primo sottocaso.

- ESERCIZIO 4. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y = \cos 2x\,,$$

dove y è funzione di x.

RISOLUZIONE. Come tu stesso puoi calcolare, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale data è:

$$y = A \sin x + B \cos x$$

dove A, B sono costanti arbitrarie.

È sufficiente allora trovare un integrale particolare dell'equazione assegnata. Esso è del tipo:

$$y = a \sin 2x + b \cos 2x$$

dove a, b sono costanti da determinare.

Ora, siccome:

$$y' = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x \quad \text{e} \quad y'' = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x,$$

sostituendo nell'equazione assegnata si ha identicamente:

$$-4a \sin 2x - 4b \cos 2x + 2a \cos 2x - 2b \sin 2x = \cos 2x\,;$$

da cui segue: $2a+b=0$, $2(a-2b)=1$, e perciò $a=\frac{1}{10}$, $b=-\frac{1}{5}$.

Quindi un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata è:

$$y = \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x.$$

Sicché il suo integrale generale è:

$$y = A \sin x + B \cos x + \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x.$$

ESERCIZI. Integrare le seguenti equazioni differenziali, in cui y è funzione di x, e verificare l'esattezza del risultato ottenuto:

1) $y'' - y' = 2\,x$. [**R.** $y = A\, e^x - x^2 - 2x + B$]

2) $y'' - y = x$. [**R.** $y = A\,e^{x} + B\,e^{-x} - x$]

3) $y'' + 2\,y' = e^{-x}$. [**R.** $y = A\,e^{-2x} - e^{-x} + B$]

4) $y'' - y' = e^{x}$ [**R.** $y = Ae^{x} + x\,e^{x} + B$]

5) $y'' - 4\,y = \sin x$. $\left[\textbf{R.}\ y = A\,e^{2x} + B\,e^{-2x} - \frac{1}{5}\sin x\right]$

6) $y'' + 2\,y' + y = x^2 + 4\,x$. [**R.** $y = e^{-x}(Ax + B) + x^2 - 2$]

7) $y'' - 6\,y' + 9\,y = 5\ \sin 2x - 12\ \cos 2x$. [**R.** $y = e^{3x}(Ax + B) + \sin 2x$]

8) $y'' - 2\,y' + 5\,y = 5\sin 2x - 3\cos 2x$. [**R.** $y = e^{x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + (\sin 2x + \cos 2x)$]

9) $y'' + y = \sin x + \cos x$. $\left[y = A\sin x + \frac{1}{2}x(\sin x - \cos x) + B\right]$

10) $y'' + 2\,y' = x - 1$; $2\,y'' - y = 2\cos x$.

11) $y'' + 4\,y = x$; $y'' + y = 3\sin 2x$.

76.5 APPLICAZIONI E PROBLEMI

76.5.1 PROBLEMA. La pendenza di una curva di equazione $y=f(x)$ nel generico punto è uguale alla somma delle coordinate del punto. Determinare l'equazione della curva e disegnarne l'andamento in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), sapendo che passa per il punto (0,1).

RISOLUZIONE. La pendenza della curva nel generico punto $P(x,y)$ è y'. Pertanto deve essere:

$$y' = x + y\ .$$

Si tratta di integrare quest'equazione differenziale, che è del tipo [7], cioè un'equazione lineare del 1° ordine. Procedendo come descritto a suo tempo, si trova l'integrale generale:

$$y = A\,e^{x} - x - 1$$

dove A è una costante arbitraria.

Siccome $y(0) = A - 1$ e $y(0) = 1$, allora deve essere A–1=1 e perciò A=2.

In definitiva la curva cercata ha equazione:

$$y = 2\,e^{x} - x - 1\ .$$

Te ne lasciamo lo studio.

76.5.2 Il PENDOLO MATEMATICO. È detto così un punto materiale di massa m appeso ad un filo di lunghezza L, flessibile, inestensibile e senza peso. Sia S il punto in cui è fissato il filo (Fig. 3).

Se il punto materiale viene allontanato dalla posizione O di equilibrio e viene portato in A, dove viene abbandonato, esso è soggetto alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$, diretta verso il basso, essendo $\vec{g}$ l'accelerazione di gravità.

Questa forza può essere scomposta in due altre: una, agente nella direzione SA, è inefficace perché ad essa si oppone la reazione del vincolo; l'altra, agente nella direzione perpendicolare ad SA, è la forza di modulo $F = mg|\sin\alpha|$, dove α misura lo spostamento del filo dalla verticale.

Ora, per piccoli valori dell'angolo α, $\sin\alpha \approx \alpha$ e l'arco AB può confondersi con la corda AB o, ciò che è la stessa cosa, l'arco OA si può confondere col segmento HA. Del resto $\overline{HA} = L\sin\alpha \approx L\,\alpha$. Di modo che, posto $\overline{HA} = x$, si ha $\alpha \approx \frac{x}{L}$. Per cui, osservato che la forza F agisce in senso contrario allo spostamento x e tenuto presente che si ha $F = mx''(t)$, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$m\,x''(t) = -mg\frac{x}{L} \quad \text{ossia:} \quad x''(t) = -g\frac{x}{L}\ .$$

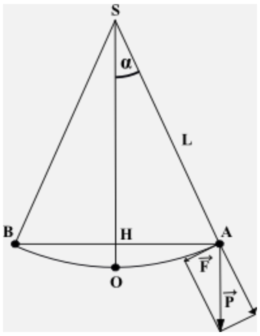

FIG. 3

Si tratta di un'equazione del tipo [10'], cioè di un'equazione lineare omogenea del 2° ordine. Si integra con lo stesso procedimento esposto nel paragrafo n. 76.4.2, esercizio 3.
Si trova l'integrale generale:

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

dove A, B sono costanti arbitrarie e $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$.

Posto che si assuma come istante iniziale $t=0$ quello in cui il punto materiale viene abbandonato in A e posto che la distanza AH in quell'istante sia a, ciò comporta che deve essere $x(0)=a$ ed $x'(0)=0$. Siccome $x(0)=B$ e $x'(0)=A$, risulta allora A=0 e B=a.
Sicché l'equazione del moto del pendolo è la seguente:

$$x = a\cos\omega t\,.$$

Si tratta chiaramente di un moto armonico semplice con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

76.5.3 EXTRACORRENTI DI CHIUSURA E DI APERTURA DI UN CIRCUITO. Come si sa dallo studio della fisica, un circuito elettrico (Fig. 4) con una resistenza R ed un'induttanza L, soggetto ad una forza elettromotrice costante V, è attraversato da una corrente costante i. Tuttavia, all'atto della chiusura del circuito (il commutatore viene portato in A) ed a quello dell'apertura (il commutatore viene trasferito molto rapidamente da A a B), la corrente i è variabile rispetto al tempo t: $i = i(t)$.

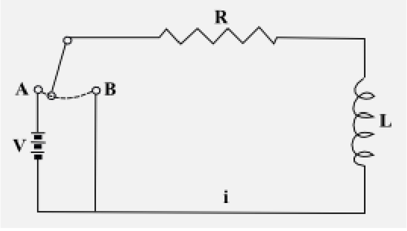

FIG. 4

- Vediamo dapprima cosa accade alla chiusura del circuito.

La relazione che lega le grandezze coinvolte è la seguente:

[15] $$V - L\frac{di}{dt} = Ri\,.$$

La legge $i=i(t)$, che esprime la variazione di i rispetto a t, è un integrale di quest'equazione differenziale. Equazione che si integra per variabili separate.

In successione, dall'equazione [15] si ottiene:

$$L\frac{di}{dt}=V-Ri\;;\quad \frac{di}{V-Ri}=\frac{1}{L}dt\;;\quad \int\frac{di}{V-Ri}=\frac{1}{L}\int dt\;;\quad \int\frac{-R}{V-Ri}di=-\frac{R}{L}\int dt\;;$$

ora, osservato che V–Ri>0, si trova:

$$\ln(V-Ri)=-\frac{R}{L}t+\ln A$$

dove A è una costante arbitraria positiva. Da qui si ricava:

$$V-Ri=A\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

o anche:

$$i=\frac{V}{R}-\frac{A}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Questo è l'integrale generale dell'equazione differenziale [15].

Osserviamo adesso che, nell'istante $t=0$, nel quale il circuito viene chiuso, il valore della corrente è $i(0)=0$. E siccome: $i(0)=\frac{V}{R}-\frac{A}{R}$, deve essere evidentemente $A=V$.

In definitiva, l'andamento della corrente, alla chiusura del circuito, è fornito dalla seguente funzione:

$$i=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

che rappresenta la cosiddetta <u>extracorrente di chiusura</u> del circuito.

In teoria $i=\frac{V}{R}$ solo quando $t\to+\infty$. In pratica l'intensità di corrente i si stabilizza sul valore $\frac{V}{R}$ dopo qualche piccolissima frazione di secondo.

A titolo di esempio, se $R=50\ \Omega$ ed $L=2{,}5$ H, dopo $t=0{,}4$ s il valore di i è: $i=\frac{V}{R}(1-0{,}0003)$; praticamente $i=\frac{V}{R}$.

- Occupiamoci adesso di ciò che accade all'apertura del circuito.

La relazione che lega le grandezze fisiche coinvolte è la stessa relazione [15]; solo che ora $V=0$. Per cui questa relazione in effetti diventa:

$$-L\frac{di}{dt}=Ri\,.$$

Integrando per variabili separate, si trova il suo integrale generale:

$$i=A\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

dove A è una costante arbitraria positiva.

Siccome nell'istante $t=0$, nel quale viene aperto il circuito, $i(0)=\frac{V}{R}$ e siccome $i(0)=A$, allora $A=\frac{V}{R}$.

In definitiva, nell'istante in cui il commutatore viene trasferito da A a B (Fig. 4), il circuito (che comprende ancora R ed L ma dal quale è stato escluso il generatore) è attraversato da una corrente, detta <u>extracorrente di apertura</u>, data dalla seguente funzione:

$$i=\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

La sua durata è di qualche piccolissima frazione di secondo. (Per questo il commutatore deve essere trasferito molto rapidamente da A a B.)

Per esempio, ritornando alla situazione descritta a proposito della chiusura del circuito, dopo $t=0{,}4$ s il valore di i è: $i=\frac{V}{R}\cdot 0{,}0003$; praticamente $i=0$.

76.5.4 OSCILLAZIONI ELETTRICHE. Si consideri un circuito elettrico (Fig. 5) con una resistenza R ed un'induttanza L, nel quale siano inseriti una capacità C ed un alternatore di forza elettromotrice (f.e.m.) $E=E_0 \sin \omega t$.

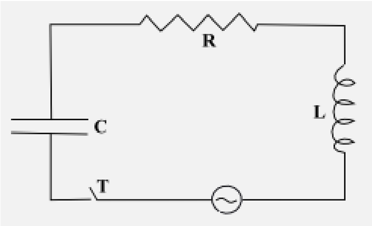

FIG. 5

Ci proponiamo di trovare l'espressione $i=i(t)$ della corrente che attraversa il circuito ad interruttore T chiuso.
Intanto sappiamo dalla fisica che la relazione che lega le grandezze coinvolte è la seguente:

[16] $$L\frac{d^2 i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\omega E_0 \cos \omega t\,.$$

La legge $i=i(t)$ – che esprime l'andamento di i rispetto a t – è un integrale di quest'equazione differenziale; la quale è del tipo [10], 3° caso.
Il suo integrale generale si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata ad essa un integrale particolare della stessa equazione [16].

- Incominciamo a trovare quest'ultimo, che sappiamo essere del tipo:

$$i=a \sin \omega t+b \cos \omega t$$

o, scritto in forma diversa, del tipo:

$$i=i_0 \sin(\omega t-\varphi)$$

dove i_0 e φ sono delle costanti che si determinano imponendo che questa espressione di i soddisfi la [16].
Ora, siccome:

$$i'(t)=\omega\, i_0 \sin(\omega t-\varphi) \text{ ed } i''(t)=-\omega^2 i_0 \sin\,(\omega t-\varphi),$$

sostituendo nella [16] si ha identicamente:

$$-L\,\omega^2 i_0 \sin(\omega t-\varphi)+R\,\omega\, i_0 \cos(\omega t-\varphi)+\frac{1}{C}i_0 \sin(\omega t-\varphi)=\omega\, E_0 \cos \omega t\ ;$$

ossia:

$$-L\,\omega^2 i_0(\sin \omega t \cos \varphi-\cos \omega t \sin \varphi)+R\,\omega\, i_0(\cos \omega t \cos \varphi+\sin \omega t \sin \varphi)+$$
$$+\frac{1}{C}i_0(\sin \omega t \cos \varphi-\cos \omega t \sin \varphi)=\omega\, E_0 \cos \omega t\ ;$$

da cui segue:

$$\left(-\omega^2 L \cos \varphi+\omega R \sin \varphi+\frac{1}{C}\cos \varphi\right) i_0 \sin \omega t+\left(\omega^2 L \sin \varphi+\omega R \cos \varphi-\frac{1}{C}\sin \varphi\right)=\omega E_0 \cos \omega t\ ;$$

per cui le costanti i_0 e φ devono essere scelte in modo che risulti:

$$\omega R \sin \varphi+\left(\frac{1}{C}-\omega L\right)\cos \varphi=0 \ \text{ e } \ \left[\left(\omega^2 L-\frac{1}{C}\right)\sin \varphi+\omega R \cos \varphi\right] i_0=\omega E_0\,.$$

Ora, dalla prima di queste equazioni nelle incognite i_0 e φ si ottiene:

$$\tan \varphi=\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}\ ;$$

mentre dalla seconda si ricava:

$$i_0=\frac{\omega\,E_0}{\left(\omega^2 L-\frac{1}{C}\right)\sin\varphi+\omega R\cos\varphi}=\frac{E_0}{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\sin\varphi+R\cos\varphi}$$

o anche, tenendo presente il valore di $\tan\varphi$ e constatando che:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L-\frac{1}{C}}{R}\right)^2}},$$

a conti fatti risulta:

$$i_0=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

In definitiva un integrale particolare della [16] è:

$$i=i_0\sin(\omega t-\varphi)\,,$$

dove i valori di i_0 e φ sono forniti dalle espressioni trovate sopra.

- Determiniamo adesso l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla [16], cioè dell'equazione differenziale:

[17] $$L\frac{d^2 i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0\,.$$

La sua equazione caratteristica è:

[18] $$L\,k^2+R\,k+\frac{1}{C}=0$$

il cui discriminante è: $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$.

Bisogna analizzare le tre situazioni relative ai diversi valori di Δ: positivo, nullo, negativo.

a) Sia $\Delta>0$. Dette k', k" le radici dell'equazione [18], esse risultano chiaramente reali e negative. La soluzione generale dell'equazione differenziale [17] è:

$$i=c_1 e^{k' t}+c_2 e^{k'' t}$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie.

In teoria i due termini $c_1 e^{k' t}$ e $c_2 e^{k'' t}$ tendono a 0 solo quando $t\to+\infty$; in pratica essi, dopo un tempo piuttosto breve, si possono considerare nulli o quantomeno trascurabili rispetto all'espressione di i fornita dall'integrale particolare trovato prima. Per cui la soluzione dell'equazione [16], trascurando per l'appunto i due termini specificati, è costituita dall'integrale particolare suddetto:

$$i=i_0\sin(\omega t-\varphi)\,.$$

Il significato fisico di questo fatto è evidente: dopo una fase transitoria, piuttosto breve, susseguente alla chiusura del circuito, la corrente che lo attraversa è alternata di ampiezza i_0 e pulsazione ω, sfasata di un angolo φ rispetto alla f.e.m..

b) Sia $\Delta=0$. Detta k_0 la radice reale doppia della [18], essa risulta negativa.

L'integrale generale dell'equazione [17] è:

$$i=e^{k_0 t}(c_1+c_2 t)$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie.

Come prima, anche il contributo di questa corrente, dopo un tempo piuttosto breve, si può considerare trascurabile rispetto all'espressione di i fornita dall'integrale particolare. Per cui, anche adesso, la soluzione dell'equazione [16] si può ritenere che sia:

$$i = i_0 \sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Il significato fisico di questo fatto è lo stesso del caso precedente.

c) Sia $\Delta<0$. È questo il caso più interessante dal punto di vista fisico. Risolvendo la [18] si trova:

$$k', k'' = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2\,L} = -\frac{R}{2\,L} \pm j\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{R^2}{4\,L^2}}$$

dove j indica l'unità immaginaria [1]. Ponendo allora per comodità:

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

l'integrale generale della [17] è:

$$i = e^{-\frac{t}{\tau}}(c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t).$$

ovvero, scritto diversamente, ma in forma equivalente:

$$i = A\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t - \psi)\,,$$

dove A, ψ sono costanti arbitrarie che possono essere determinate in base alle condizioni iniziali.

L'integrale generale della [16] è allora:

$$i = A\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t - \psi) + i_0 \sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Ora, il primo termine di questa somma in genere diventa trascurabile rispetto al secondo dopo un certo tempo, più o meno breve (dipende dal valore di τ); per cui, anche adesso, di norma il valore i tende a diventare il solito:

$$i = i_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Si presentano però dei casi eccezionali quando $\omega=\omega_0$ e quando $\omega\approx\omega_0$. Nel primo caso si ha il fenomeno cosiddetto della "risonanza"; nel secondo quello dei "battimenti". Ma per questo studio rimandiamo alla fisica.

76.5.5 DINAMICA DI UNA POPOLAZIONE.

PROBLEMA. Determinare la funzione $N=N(t)$ che esprime la variazione del numero di individui che compongono una popolazione rispetto al tempo, conoscendo la percentuale n di nascite annue e la percentuale m di morti annue.

Si supponga che non ci siano migrazioni e che nell'anno 0 ($t=0$) la popolazione sia di N_0 unità.

RISOLUZIONE. L'incremento della popolazione tra l'istante t e l'istante $t+h$, ossia $N(t+h)–N(t)$, è evidentemente uguale alla differenza tra il numero dei nati e quello dei morti in quel periodo di tempo. Se quel periodo fosse di un anno, quella differenza sarebbe $(n–m)N$. Siccome il periodo è di h anni, la differenza è $(n–m)Nh$. Quindi:

$$N(t+h) - N(t) = (n - m)\, N\, h\,,$$

da cui segue:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (n - m)N$$

e infine, passando al limite per $h\rightarrow 0$:

$$\frac{dN}{dt} = (n - m)N.$$

Si ottiene così un'equazione differenziale a variabili separabili, facilmente integrabile. Si trova:

[1] L'abbiamo indicata così per evitare di confonderla con l'intensità i della corrente

$$\ln N = (n - m)t + \ln A$$

dove A è una costante arbitraria che può essere determinata in base alla condizione iniziale. Di fatto, siccome $N(0)=N_0$, si ha: $\ln N_0 = \ln A$; sicché la relazione precedente diventa:

$$\ln N = (n-m)\,t + \ln N_0\,,$$

da cui segue infine la legge cercata:

$$N = N_0 e^{(n-m)\,t}\,.$$

Si capisce che, se n>m, cioè se il tasso di natalità supera quello di mortalità, la funzione è crescente. Se invece n<m, il valore N decresce nel tempo fino ad annullarsi. Ciò avviene teoricamente quando $t \to +\infty$, ma, se n è abbastanza piccolo rispetto ad m, in pratica dopo un tempo finito.

Per esempio, in una popolazione di 40 milioni di unità, con un tasso costante annuo di natalità del 2% ed uno di mortalità dell'8%, la popolazione si annulla praticamente in meno di 30 anni.

Ma questa è una situazione molto semplificata. Nella pratica i tassi di natalità e di mortalità variano nel tempo per diverse ragioni e per questo le situazioni da prendere in esame si complicano. Esulano però dalla nostra indagine.

VERIFICHE

Delle seguenti equazioni differenziali determinare gli integrali particolari sotto le condizioni indicate a fianco (nn. 1 – 18):

1. $(x^2 - 2)\, y' = 2\, x\, y\, ;\;\; y(0) = 2.$ [**R.** $y = 2 - x^2$]

2. $(x^3 - 2\,x)\, y' = (3\,x^2 - 2)\, y\, ;\;\; y'(0) = 1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = -\frac{1}{2}x^3 + x\right]$

3. $(x^2 - 1)\, y' = x\, y\, ,\;\; y(2) = 1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}}\right]$

4. $y' = x\, y^2\, ;\;\; y(0) = -1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = -\frac{2}{x^2+2}\right]$

5. $(y - 2)\, y' + (x - 1) = 0\, ;\;\; y(0) = 0.$ [**R.** $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y = 0$]

6. $y' = x\, y - y\, ;\;\; y(0) = 2.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = 2\, e^{\frac{x^2}{2} - x}\right]$

7. $y' = y^2 + y\, ;\;\; y(0) = 1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = \frac{e^x}{2 - e^x}\right]$

8. $2\, y' = 2\, x + y\, ;\;\; y(0) = -2\, .$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = 2\, e^{x/2} - 2x - 4\right]$

9. $x\, y' = 2\, x^3 + y\, ;\;\; y'(0) = -3.$ [**R.** $y = x^3 - 3\,x$]

10. $x\, y' = 4\, x^3 - y\, ;\;\; y(1) = -1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = x^3 - \frac{2}{x}\right]$

11. $y' = \cos x - y \tan x\, ;\;\; y(0) = 0.$ [**R.** $y = x \cos x$]

12. $y' = 2\, y - e^x\, ;\;\; y(0)=0.$ [**R.** $y = e^x - e^{2x}$]

13. $2\, y'' - y' = x^2 - 8\, ;\;\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1\right]$

14. $y'' + 4\, y = 0\, ;\;\; y(0) = \sqrt{3},\; y'(0) = 2.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

15. $y'' - y' = e^x;\;\; y(0) = 1, y'(0) = 2.$ [$y = e^x + x\, e^x$]

16. $4\, y'' + y = \sin 2x\, ;\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = \frac{4}{15}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{15}\sin 2x\right]$

17. $y'' - 2\, y' + y = \cos x\, ;\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1.$ $\left[\mathbf{R.}\;\; y = \frac{3}{2}x\, e^x - \frac{1}{2}\sin x\right]$

18. $-y'' + y = 5\, \cos 2x\, ;\;\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0.$ [**R.** $y = \cos 2x$]

Questioni varie:

19. Trovare le curve del piano cartesiano (Oxy), che in ogni loro punto (x,y) hanno pendenza uguale a:

a) $\pm x$; b) $\pm y$; c) $\pm\frac{x}{y}$, con $y\neq 0$; d) $\pm\frac{y}{x}$, con $x\neq 0$; e) xy ; f) $x+y$; g) $x-y$.

20. Tra le curve del piano cartesiano (Oxy), che in ogni punto (x,y) hanno pendenza uguale ad x/y, trovare quella che passa per il punto (2,1) e dopo aver fatto vedere che due suoi punti hanno ascissa uguale a 3, calcolare la pendenza della curva trovata in tali punti.

21. Il piano è riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. A) Trovare l'equazione delle curve che in ogni loro punto (x,y) hanno pendenza:
$$\frac{3x^2}{2y},\ \text{con } y\neq 0.$$
   B) Tra di esse determinare la curva K avente pendenza uguale a 2 nel punto di ascissa 2 e completamente situata nel semipiano y>0.
   C) Calcolare la pendenza della curva K nei punti di ascisse 0 ed 1.
2. A) Disegnare la curva K dopo aver verificato che si tratta di una curva crescente nel suo dominio ed averne studiato il comportamento agli estremi del dominio e determinato gli eventuali flessi.
   B) Mediante l'aiuto di un idoneo software matematico, calcolare un valore approssimato dell'area della regione piana D delimitata dalla curva K e dagli assi cartesiani.
   C) Calcolare infine il volume del solido generato dalla regione D quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

22. Si consideri la seguente equazione differenziale: y"(x)+4y(x) = 0.

1. A) Verificare che la funzione $y=A\sin 2x+B\cos 2x$, dove A e B sono parametri reali, è una sua soluzione. In realtà tale funzione è l'integrale generale dell'equazione.
   B) Risolvere il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale assegnata, sotto le condizioni $y(0)=-1$, $y'(0)=0$. Sia $y=y(x)$ la soluzione.
2. A) Trovare le ascisse a, b (con $0<a<b<3$) dei punti in cui il grafico γ della funzione $y=y(x)$ trovata sopra interseca l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano (Oxy).
   B) Calcolare l'area della regione piana D sottesa dal grafico γ sull'intervallo [a,b].
   C) Calcolare il volume del solido generato dalla regione D quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

$$\left[\mathbf{R.}\ldots;\ 2B)\ 1,\ \ 2C)\ \frac{\pi^2}{4}\right]$$

23. Determinare la legge del moto di una particella avente velocità v_0 quando non è soggetta a forze esterne o quando la risultante di queste forze è nulla. Di che moto si tratta?

24. Un'automobile, partendo da ferma, procede di moto uniformemente accelerato fino a raggiungere la velocità di 90 km/h in 8 secondi. Continua a muoversi per altri 35 secondi di moto uniforme e quindi decelera uniformemente fino a fermarsi in 5 secondi.

1. A) Disegnare il grafico della velocità dell'automobile $v=v(t)$ in funzione del tempo t, misurando t in secondi e v in metri al secondo.
   B) Fornire l'espressione analitica della funzione $v=v(t)$.
2. A) Esprimere la funzione $a=a(t)$ dell'accelerazione dell'automobile, misurando t in secondi ed a in metri al secondo per secondo.

B) Disegnare l'andamento di tale funzione.

3. A) Calcolare lo spazio percorso dall'automobile, esprimendolo in metri e rappresentandolo anche mediante una notazione integrale.

[**R.** 1B) per $0 \le t \le 8$, $v(t) = 25/8\ t$, ...; 2A) ..., per $43 < t \le 48$, $a(t) = -5$; ...; 3A) 1037,5 m dove t è misurato in secondi, v in metri al secondo ed a in metri al secondo quadrato]

25. Una somma di denaro C_0 viene impiegata al saggio annuo i, con capitalizzazione continua. Si determini il montante C di quella somma dopo t anni. Si precisa che, in caso di capitalizzazione continua, risulta: $C'(t) = i\,C(t)$. [**R.** $C = C_0 e^{it}$]

26. Trovare la funzione di domanda $Q=Q(P)$ sapendo che $Q=10$ per $P=4$ e sapendo inoltre che l'elasticità *e* della domanda Q rispetto al prezzo P è:

a) $e = -1$; b) $e = -2$; c) $e = -1/2$

Si fa presente che l'elasticità *e* della domanda rispetto al prezzo P è data dalla seguente formula:

$$e = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}.$$

[**R.** ... ; c) $Q=20/\sqrt{P}$]

27. Trovare la funzione di domanda Q=Q(P) sapendo Q=130 per P=10 e sapendo inoltre che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo è data dalla seguente espressione:

$$e = \frac{2P - P^2}{Q}.$$

Tenendo poi presente che sia P sia Q sono grandezze positive, determinare per quali valori di P è definita la funzione di domanda così determinata.

[**R.** Per il concetto di elasticità vedere es. prec. $Q=-\frac{1}{2}P^2+2P+160$; $0<P<20$]

28. Si supponga che un corpo, a temperatura T_0, venga posto in un ambiente a temperatura T_1, con $T_0>T_1$. Si ammetta che il tasso di diminuzione della temperatura T del corpo rispetto al tempo t sia regolato dalla legge di Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k|T_1 - T|$$

dove T è funzione di t e k è una costante.

Si dimostri che la legge che esprime l'andamento di T in funzione di t, naturalmente finché non si è raggiunto l'equilibrio termico, è la seguente:

$$T = (T_0 - T_1)\, e^{-kt} + T_1.$$

29. Si supponga che un punto materiale di massa m si muova, sotto l'azione di una forza elastica, in un mezzo che offra una certa resistenza. In particolare si ipotizzi che:

- alla posizione di equilibrio corrisponda il punto di ascissa 0, per cui la forza elastica è $F=-hx$, con h costante positiva;
- la resistenza del mezzo sia direttamente proporzionale alla velocità, per cui essa è $R=-kv$, con k costante positiva.

Dopo aver spiegato perché risulta:

$$m\,x''(t) + k\,x'(t) + h\,x(t) = 0\ ,$$

determinare la legge $x=x(t)$ del moto del punto materiale e discutere le varie situazioni possibili.

Integrare la discussione supponendo che sul corpo agisca anche una forza esterna uguale ad $F_0 \sin \omega t$, diretta come la forza data.

30. Dopo aver verificato che la funzione:

$$y=x+\frac{1}{x^2}$$

è un integrale particolare della seguente equazione differenziale:

$$y'=x^2y-x^3-\frac{2}{x^3}$$

se ne disegni il grafico G in un piano cartesiano ortogonale (Oxy).

Si scriva poi l'equazione della tangente nel punto A di G avente ordinata nulla e l'equazione della retta passante per A e tangente a G in un ulteriore punto B. Detta C l'intersezione della prima tangente con G, si calcoli l'area della regione piana delimitata da G e dal segmento BC.

[**R.** …; $27/16$]

31. La pendenza di una curva, considerata in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), in un suo generico punto P(x,y) si ottiene moltiplicando per l'opposto dell'ascissa del punto la sua ordinata aumentata di 1. Sapendo che la curva passa per il punto $(0,1)$, trovarne l'equazione e disegnarne l'andamento.

$\left[\textbf{R.}\ y=2\,e^{-x^2/2}-1\right]$

32. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''+4\,y=0\ ,$$

dove y è funzione di x. Tra le curve integrali rappresentate dall'integrale generale trovato, chiamare K quella che, nel punto di ascissa nulla di un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), ha come tangente la retta di equazione $y=4x+3$ e disegnarne l'andamento.

33. Considerata una curva di equazione $y=f(x)$, assegnata in un piano cartesiano ortogonale (Ox), si indichi con t la retta tangente ad essa in un suo generico punto P. Siano poi Q il punto in cui t interseca l'asse x ed H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Il segmento QH si denomina ***sottotangente*** alla curva in P. Dimostrare che le curve la cui sottotangente conserva la stessa lunghezza a al variare del punto P sulla curva hanno equazioni $y=k\,e^{x/a}$, dove k è una costante reale non nulla.

[**R**. Conviene prendere in esame due triangoli rettangoli "pressoché" simili, uno dei quali ha un vertice in P e cateti dx e dy. Per la cronaca, su questo problema si cimentò Cartesio, ma senza riuscire a risolverlo. Lo risolse invece Leibniz]

34. Tra le curve di equazione $y=y(x)$, considerate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), determinare quella che nel punto $(1,0)$ ha tangente parallela all'asse x e per la quale risulta:

$$y''=6\,(2\,x^2-2\,x-1)\ .$$

Studiare l'andamento di questa curva, trovando in particolare i suoi flessi.

[**R.** $y=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$; …]

35. Determinare l'integrale particolare della seguente equazione differenziale:

$$y\,y'=1-x\ ,$$

sotto la condizione $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Constatato che la curva integrale è una circonferenza γ passante per l'origine O del sistema di riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), determinare la parabola avente l'asse parallelo all'asse y, passante per O e tangente a γ nel punto $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calcolare infine le aree delle regioni piane in cui questa parabola divide il cerchio delimitato da γ.

$\left[\textbf{R.}\ x^2+y^2-2x=0\ ;\ y=-\frac{4\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{5\sqrt{3}}{3}x\ ;\ldots\right]$

36. Determinare l'integrale particolare della seguente equazione differenziale:

$$x\,y' = 2\,(y - x)\,,$$

sotto la condizione $y'(1) = 0$. Constatato che la curva integrale è una parabola p, la si disegni in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) e si trovi l'equazione della parabola q simmetrica di p rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Si calcoli anche l'area della regione piana delimitata dalle due parabole trovate.

[**R.** $p \equiv y=2x-x^2$; ...]

37. Si determini l'integrale particolare della seguente equazione differenziale:

$$x\,y' = 1 - x\,,$$

sotto la condizione $y(1)=-1$. Detta k la curva integrale, se ne disegni l'andamento in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), determinando in particolare un valore approssimato a meno di $1/100$ dell'ascissa del punto in cui k seca l'asse x, naturalmente con l'uso opportuno di uno strumento di calcolo automatico. [**R.** $y = \ln|x|-x$; ...]

38. Si faccia vedere che le curve integrali della seguente equazione differenziale:

$$y\,y' + x = 0$$

sono costituite da circonferenze aventi il centro nell'origine O del sistema di riferimento cartesiano ortogonale (Oxy).

Tra le suddette circonferenze si dica k quella che passa per il punto $M\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Si trovi la corda AB di k, parallela all'asse y, in modo che il triangolo MAB abbia area massima.

$$\left[\textbf{R.}\ \ldots;\ k\equiv x^2+y^2=4;\ x_A=x_B=\frac{1-\sqrt{33}}{4}\right]$$

39. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x\,y' + y = 3\,x^2.$$

Tra le curve integrali rappresentate dall'integrale generale trovato chiamare k' quella che passa per il punto (1,0) del sistema di riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) e k" quella che passa per il punto $(-1{,}0)$.

Spiegare perché le due curve k' e k" sono congruenti e, dopo aver disegnato il loro andamento, calcolare la distanza dei loro punti di minimo relativo approssimata per difetto a meno di $1/100$.

$$\left[\textbf{R.}\ y=x^2+\frac{c}{x};\ldots\right]$$

40. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x},$$

dove "e" è il numero di Nepero.

a) Trovare il suo integrale particolare sotto la condizione $y(0)=-1$.

b) Una volta constatato che l'integrale cercato è la seguente funzione:

$$y = (x - 1)e^{-x}\,,$$

studiare la funzione ottenuta e disegnarne l'andamento in un piano cartesiano (Oxy).

c) Calcolare infine:

$$\int_1^{+\infty} (x - 1)e^{-x}\,dx\,.$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE

1. Che cos'è un'equazione differenziale?
2. Cosa s'intende per ordine di un'equazione differenziale?
3. Cos'è l'integrale generale di una equazione differenziale?
4. Cosa s'intende per curva integrale di un'equazione differenziale?
5. Qual è la forma tipica di un'equazione lineare omogenea del 1° ordine? Qual è il suo integrale generale?
6. Qual è la forma tipica di un'equazione lineare omogenea del 2° ordine con coefficienti costanti? Qual è il suo integrale generale?

RISPOSTE

1. È un'equazione in cui l'incognita è una funzione e in cui figurano derivate di tale funzione.
2. È l'ordine della derivata di ordine più elevato che compare nell'equazione.
3. È la famiglia di funzioni che risolvono l'equazione differenziale.
4. È il grafico di una funzione integrale dell'equazione differenziale.
5. Un'equazione lineare omogenea del 1° ordine ha la seguente forma tipica:
$$y'(x) = a(x)\, y,$$
dove $a(x)$ ed y sono funzioni di x. Il suo integrale generale è la seguente famiglia di funzioni:
$$y = k\, e^{A(x)}$$
dove k è una costante arbitraria ed $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.
6. Un'equazione lineare omogenea del 2° ordine con coefficienti costanti ha la seguente forma tipica:
$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0,$$
dove a, b, c sono numeri reali assegnati. Per la determinazione del suo integrale generale bisogna considerare l'equazione caratteristica, associata all'equazione differenziale:
$$a\, k^2 + b\, k + c = 0.$$
Si presentano tre casi, a seconda del segno del discriminante Δ di questa equazione:
   a) se $\Delta>0$, dette k' e k'' le soluzioni (reali e distinte) dell'equazione caratteristica, l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato dalla seguente famiglia di funzioni:
$$y = A\, e^{k'x} + B\, e^{k''x}$$
dove A e B sono costanti arbitrarie;
   b) se $\Delta=0$, detta x_0 la radice (doppia) dell'equazione caratteristica, l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato dalla seguente famiglia di funzioni:
$$y = e^{k_0 x}(A + Bx)$$
dove A e B sono costanti arbitrarie;
   c) se $\Delta<0$, chiamate $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$ le radici (complesse coniugate) dell'equazione caratteristica, l'integrale generale dell'equazione differenziale è costituito dalla seguente famiglia di funzioni:
$$y = e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x)$$
dove A, B sono costanti arbitrarie.